Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2005

Blatt 5 Abgabetermin: Freitag, 27.5. 2005

Aufgabe 17 (Ein-Punkt Kompaktifizierung) 2 + 1 Punkte

Es seien X und Y lokal-kompakt und hausdorffsch.

a) Berechnen Sie $X^+ \vee Y^+$ und $X^+ \wedge Y^+$, wobei Sie den unendlich fernen Punkt als Grundpunkt wählen.

b) Beweisen Sie, dass X dicht liegt in X^+, falls X nicht kompakt ist.

Aufgabe 18 (Folgenkompakte und abzählbar kompakte Räume) 2 + 2 Punkte

Ein topologischer Raum X heisst folgenkompakt, falls jede Folge in X eine Teilfolge enthält, die gegen einen Punkt in X konvergiert. Ein Raum Y heisst abzählbar kompakt, falls jede unendliche Teilmenge von Y einen Häufungspunkt in Y hat. (Es gilt hier wieder einmal die übliche Warnung, dass oft für folgenkompakt und abzählbar kompakt hausdorffsch mitverlangt wird.)

a) Zeigen Sie, dass jeder kompakte Raum oder folgenkompakte Raum auch abzählbar kompakt ist.

b) Untersuchen Sie das folgende Beispiel auf Kompaktheit, Folgenkompaktheit und abzählbare Kompaktheit: Es sei $X = \mathbb{N}$ mit der Topologie, die von den Mengen $\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \ldots$ erzeugt ist.

Aufgabe 19 (Kompaktheit und Limites) 1 + 1 + 2 Punkte

a) Ist die unendlich dimensionale Sphäre $\mathbb{S}^\infty = \varinjlim(\mathbb{S}^0 \subset \mathbb{S}^1 \subset \ldots \subset \mathbb{S}^n \subset \ldots)$ kompakt?

b) Zeigen Sie, dass der Hawaiische Ohrring kompakt ist.

c) Es sei $\mathfrak{X}$ das direkte System auf den natürlichen Zahlen mit der gewöhnlichen Ordnung, das durch $n \mapsto \bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1$ gegeben ist. Die Strukturabbildungen sind durch $f_{n+1,n}\colon \bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1 \to \bigvee_{i=1}^{n+1} \mathbb{S}^1$ gegeben, wobei $f_{n+1,n}$ die Inklusion der n Summanden $\bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1$ in die ersten n Summanden von $\bigvee_{i=1}^{n+1} \mathbb{S}^1 = \bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ ist. Zeigen Sie, dass $\varinjlim \mathfrak{X}$ nicht kompakt ist.

Aufgabe 20 (Tychonov für lokal-kompakte Räume) 2 Punkte

Beweisen Sie eine Form des Satzes von Tychonov für lokal-kompakte Räume; zeigen Sie dass ein nicht-leeres Produkt topologischer Räume $X = \prod_{i \in I} X_i$ genau dann lokal-kompakt ist, wenn alle Faktoren X_i lokal-kompakt sind und alle bis auf endlich viele Faktoren kompakt sind.

Kür-Aufgabe (weitere Limites) 1+1+2+1 Pseudopunkte

a) Was ist der inverse Limes des Systems $\ldots \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}$ für eine Primzahl p?

b) Beschreiben Sie den direkten Limes des Systems $\mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \ldots$.

Eine Gruppe G heisst topologische Gruppe, wenn G ein topologischer Raum ist und wenn die Verknüpfung der Gruppe und die Inversenbildung stetig sind.

c) Ist $G_i, i \in I$ ein inverses System topologischer Gruppen und ist I eine gerichtete Menge, d.h. I hat eine Ordnung ($\leqslant$) und für alle $i, j \in I$ gibt es ein $k \in I$ mit $i, j \leqslant k$, so ist der inverse Limes der G_i eine topologische Gruppe.

d) Es sei $G_i = \mathbb{S}^1, i \in \mathbb{N}$ und $f_{i,j} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ sei gegeben durch $z \mapsto z^{p^{j-i}}$ für $i \leqslant j$. Zeigen Sie, dass der inverse Limes der G_i eine hausdorffsche, kompakte topologische Gruppe ist.