Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2005

Blatt 4 Abgabetermin: Freitag, 13.5. 2005

Aufgabe 13 (Reell-projektive Ebene)

Beweisen Sie, dass die folgenden Räume homöomorph zum $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{S}^2/(x \sim -x)$ sind:

a) $\mathbb{D}^2/\sim$, wobei $x \sim -x$ für $x \in \mathbb{S}^1$.

b) $M/\partial M$; hierbei ist M das Möbiusband und ∂M sein Rand.

c) Es sei $X = \mathbb{D}^2$, $A = \mathbb{S}^1 \subset X$ und $Y = \mathbb{S}^1$ und $f : A \to Y$ sei die Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $f(z) = z^2$. Untersuchen Sie $X \cup_f Y$.

Aufgabe 14 (Urbildfilter)

Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und F sei ein Filter auf Y. Bilden die Urbilder der Mengen von F eine Filterbasis, so heisst der Filter zu dieser Basis das *Urbild von F*. Es bezeichne $f^{-1}(F)$ diesen Urbildfilter, sofern er existiert. Zeigen Sie:

a) Es sei $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf Y. Der Filter $F_{\mathcal{B}}$ hat bzgl. f genau dann ein Urbild, wenn keine Menge aus $\mathcal{B}$ ein leeres Urbild hat. Ist f surjektiv, so besitzt also jeder Filter F auf Y ein Urbild.

b) Ist F schon Bild eines Filters F' auf X, so besitzt F ein Urbild.

c) Ist F' Filter auf X, so ist $f^{-1}(f(F'))$ gröber als F'. Es gilt $F' = f^{-1}(f(F'))$, wenn f injektiv ist. Ist F Filter auf Y und $f^{-1}(F)$ existiert, so ist $f(f^{-1}(F))$ feiner als F und stimmt mit F überein, falls f surjektiv ist.

Aufgabe 15 (Eigentliche Abbildungen)

Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heisst eigentlich, falls sie abgeschlossen ist und $f^{-1}(y) \subset X$ kompakt ist für alle $y \in Y$. Zeigen Sie, dass für eigentliche Abbildungen $f^{-1}(K)$ kompakt ist für jedes kompakte K.

Aufgabe 16 (Endlicher Tychonov)

Beweisen Sie den Satz von Tychonov für endliche Produkte, d.h. beweisen Sie dass $X \times Y$ genau dann kompakt ist, wenn X und Y kompakt sind. (Betrachten Sie dazu die Inklusion $i_y : X \to X \times Y$, $x \to (x, y)$ für ein festes y und wählen Sie zu einer offenen Überdeckung von $X \times Y$ eine endliche Teilüberdeckung von $i_y(X)$.)

Kür-Aufgabe (Einige Matrizengruppen)

a) Beweisen Sie, dass $SO(1) \cong SU(1) \cong *$, wobei $*$ einen einpunktigen topologischen Raum bezeichnet, und zeigen Sie, dass $SO(2) \cong U(1) \cong \mathbb{S}^1$ und $SU(2) \cong \mathbb{S}^3$.

b) Zeigen Sie, dass der reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^3$ homöomorph zur $SO(3)$ ist. Konstruieren Sie dafür eine Abbildung $f : \mathbb{S}^3 \to SO(3)$, die über $\mathbb{R}P^3 = \mathbb{S}^3/(x \sim -x)$ faktorisiert.

c) Weisen Sie nach, dass $O(n)$ für kein n zusammenhängend ist, während $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ und $Sp(n)$ wegzusammenhängend sind.