Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2005

Blatt 3 Abgabetermin: Freitag, 6.5. 2005

Aufgabe 9 (ABC)
Teilen Sie die deutschen Grossbuchstaben in Homöomorphieklassen auf. Benutzen Sie dabei serifenfreie Buchstaben, also A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z.

Aufgabe 10 (Zusammenhang und Trennungseigenschaften in Produkten)
Es sei $(X_i, i \in I)$ eine Familie topologischer Räume und $X = \prod_{i \in I} X_i$ sei ihr Produkt. Zeigen Sie:

a) X ist genau dann (weg)zusammenhängend, wenn jedes X_i (weg)zusammenhängend ist.

b) X ist genau dann hausdorffsch oder regulär, wenn jedes X_i hausdorffsch bzw. regulär ist. Erinnern Sie sich daran, dass die entsprechende Aussage für Normalität falsch ist.

Aufgabe 11 (Sphären in disguise)
Beweisen Sie durch Angabe expliziter Abbildungen, dass die folgenden Räume homöomorph zu Sphären sind:

a) $\mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1}$,

b) $\mathbb{S}^{n-1} \wedge \mathbb{S}^1$ und

c) $(\mathbb{S}^{n-1} \times [0,1])/(\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\} \cup \mathbb{S}^{n-1} \times \{1\})$.

Aufgabe 12 (Box-Topologie)
Es sei $(X_i, \mathcal{T}_i, i \in I)$ eine Familie topologischer Räume, deren Topologie $\mathcal{T}_i$ nicht nur aus $\varnothing$ und X_i besteht. Betrachten Sie auf $X = \prod_{i \in I} X_i$ die Topologie mit Basis

$$\mathcal{B} = \{\prod_{i \in I} O_i, O_i \in \mathcal{T}_i\}.$$

Diese Topologie heisst *Box-Topologie*. Zeigen Sie:

a) Diese Topologie ist feiner als die Produkttopologie. Beide stimmen genau dann überein, wenn I endlich ist.

b) Sind die Projektionsabbildungen stetig? Konstruieren Sie ein Gegenbeispiel für die universelle Eigenschaft.

c) Konstuieren Sie eine Folge, die in der Produkttopologie konvergiert, aber nicht in der Box-Topologie.

Kür-Aufgabe (Cantors Diskontinuum)
Es sei C der Raum, der aus dem Einheitsintervall $I = [0,1]$ entsteht, indem man zuerst das mittlere offene Drittel $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ entfernt. Dann entfernt man aus den beiden verbliebenen Teilen $[0, \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$ wiederum die offenen mittleren Drittel und so weiter.

Beschreiben Sie den Raum C als den Durchschnitt einer absteigenden Folge abgeschlossener Mengen $I = C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ und zeigen Sie

a) C ist überabzählbar.

b) C ist homöomorph zum Produkt $\prod_{n \geqslant 1} X_n$, wobei $X_n = \{0, 2\}$ für alle n.

c) Wie sehen die Zusammenhangskomponenten von C aus?