Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2005

Blatt 2 Abgabetermin: Freitag, 29. April 2005

Aufgabe 5 (T_1-Bedingung)
Ein topologischer Raum X erfüllt das Trennungsaxiom T_1, falls von je zwei verschiedenen Punkten aus X jeder eine Umgebung besitzt, die den anderen Punkt nicht enthält.

a) Zeigen Sie, dass für eine Menge X die koendliche Topologie die gröbste Topologie ist, für die X ein T_1-Raum ist.

b) Beweisen Sie, dass X genau dann ein T_1-Raum ist, wenn jede einpunktige Menge abgeschlossen ist.

c) Finden Sie ein Beispiel, das beweist, dass T_1-Räume nicht immer hausdorffsch sind. Aber T_3-Räume und T_4-Räume, die T_1 sind, sind auch hausdorffsch; d.h. wir hätten in der Definition von "regulär" und "normal" die hausdorffsch-Bedingung jeweils durch eine T_1-Bedingung ersetzen können.

d) Sind Unterräume von T_1-Räumen wieder T_1? Vererbt sich die Hausdorff-Eigenschaft auf Unterräume?

Aufgabe 6 (Urysohnscher Einbettungssatz)
Zeigen Sie, dass jeder metrische Raum X mit abzählbarer Basis in den Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{R})$ der quadrat-summierbaren reellen Folgen eingebettet werden kann. Überlegen Sie sich dazu die folgenden Schritte:

a) Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann eine Einbettung, wenn sie stetig und injektiv ist, und wenn für jedes offene B in X $f(B)$ von der Form $O \cap f(X)$ ist für ein offenes O in Y.

b) Erinnern Sie sich daran, dass X eine abzählbare dichte Teilmenge $D = \{P_1, P_2, \ldots\}$ besitzt und untersuchen Sie die Abbildung $f(x) := (\ldots, 2^{-n}d(x, P_n), \ldots)$.

Aufgabe 7 (T_4 und T_3)
Zeigen Sie, dass T_4 nicht T_3 impliziert. Finden Sie entweder ein eigenes Beispiel oder benutzen Sie die Menge $X = \{1, 2, 3, 4\}$ und betrachten Sie die Topologie mit Subbasis $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$.

Aufgabe 8 (Torusknoten)
Als Torus bezeichnet man den topologischen Raum $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

a) Zeigen Sie, dass T homöomorph ist zur Rotationsfläche, die entsteht, wenn man die Kreislinie $\{(x, z) \mid (x-2)^2 + z^2 = 1\}$ in der (x, z)-Ebene um die z-Achse rotieren lässt.

b) Zeigen Sie, dass man die Kleeblattschlinge in den Torus einbetten kann, indem Sie diesen Knoten als geschlossene Kurve auf T darstellen. Veranschaulichen Sie sich danach das entsprechende Bild auf dem Rotationsflächenmodell.

Kür-Aufgabe (Normalität)
Betrachten Sie die Topologie auf $\mathbb{R}$, die von den halboffenen Intervallen $[a, b)$ erzeugt wird. Zeigen Sie, dass die reellen Zahlen mit dieser Topologie normal sind. Beweisen Sie, dass das Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Topologie, die durch Produkte $[a, b) \times [c, d)$ erzeugt ist, dagegen nicht normal ist. Geben Sie dazu entweder einen direkten Beweis (den gibt es), oder beweisen Sie sich folgendes Lemma und suchen Sie sich geeignete Mengen S und D in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

Lemma: Enthält X eine dichte Teilmenge D und einen abgeschlossenen diskreten Unterraum S, dessen Kardinalität die Kardinalität der Potenzmenge von D nicht unterschreitet, dann ist X nicht normal.

(Sie wissen, dass $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}))$.)