Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2005

Blatt 1 Abgabetermin: Freitag, 22. April 2005

Aufgabe 1 (Produkte)
a) Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Beweisen Sie, dass

$$d'(x,y) := d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2),$$

$$d''(x,y) := \sqrt{(d_1(x_1,y_1))^2 + (d_2(x_2,y_2))^2} \quad \text{und}$$

$$d'''(x,y) := \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\}$$

Metriken auf dem Produkt $X_1 \times X_2$ definieren. Hierbei sind $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ Elemente aus $X_1 \times X_2$.

b) Es seien (X_n, d_n) für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ metrische Räume. Warum kann man die Definitionen aus Teil a) nicht einfach übertragen, um auf $X = \prod_{n \geqslant 0} X_n$ eine Metrik zu erhalten? Zeigen Sie, dass

$$d(x,y) := \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{d_n(x,y)}{1 + d_n(x,y)}$$

eine Metrik auf dem Produkt $\prod_{n \geqslant 0} X_n$ definiert.

Aufgabe 2 (Abstand zu Teilmengen)
Es sei (X, d) ein metrischer Raum, dann gilt:
a) Für jedes $x_0 \in X$ ist die Abbildung $x \mapsto d(x, x_0)$ stetig.
b) Für jede nichtleere Teilmenge $A \subset X$ ist die Abbildung $x \mapsto d(x, A) := \inf\{d(x,a) | a \in A\}$ stetig und das Urbild der Null ist $\bar{A}$.
c) Für je zwei nichtleere, disjunkte und abgeschlossene Teilmengen A und B von X gibt es eine stetige Abbildung $h : X \to \mathbb{R}$ mit $h^{-1}(0) = A$ und $h^{-1}(1) = B$.

Aufgabe 3 (Zum Warmwerden)
a) Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf einer Menge X der Form

$$\mathcal{T} = \{\varnothing, X, A, B\},$$

wobei A und B zwei nichtleere, echte, verschiedene Teilmengen von X sind. Welche Einschränkungen gibt es an A und B, damit $\mathcal{T}$ wirklich eine Topologie ist?
b) Listen Sie alle möglichen Topologien auf der Menge $X = \{a, b, c\}$ auf, die genau vier offene Mengen haben.
c) Geben Sie eine Menge X mit einer Topologie an, die nicht die diskrete Topologie ist, so dass die abgeschlossenen Mengen identisch sind mit den offenen Mengen.

Aufgabe 4 (Topologien in der Algebra)
a) Sei p eine Primzahl. Auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ definieren wir

$$d(x,y) := p^{-\nu(x-y)},$$

wobei $\nu(z) = \sup\{n : p^n \text{ teilt } z\}$. Wir benutzen die übliche Konvention, dass $p^{-\infty} = 0$. Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\mathbb{Z}$ ergibt, welche die folgende starke Dreiecksungleichung erfüllt:

$$d(x,z) \leqslant \max\{d(x,y), d(y,z)\}.$$

Was sind Einheitssphären in dieser Metrik? Wie sehen ε-Bälle um die 0 aus?
b) Die Zariski-Topologie eines kommutativen Ringes mit Eins R ist eine Topologie auf der Menge der echten Primideale $\mathrm{Spec}(R)$. Wir setzen die Mengen $V(I) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) | I \subset \mathfrak{p}\}$ als abgeschlossene Mengen an. Hierbei ist I ein beliebiges Ideal in R. Zeigen Sie, dass dies wirklich eine Topologie definiert (Hinweis: Betrachten Sie $V(I_1 \cdot I_2)$ und $V(\sum_j I_j)$). Was ist der Abschluss von (0) in $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$?

Kür-Aufgabe (Topologien auf Funktionenräumen)

a) Es sei $C([0,1],\mathbb{R})$ der Raum der stetigen, reellen Funktionen des Einheitsintervalls. Betrachten Sie die beiden Metriken

$$d_\infty(f,g) := \sup_x |f(x) - g(x)|$$

und

$$d_2(f,g) := \sqrt{\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx}.$$

Zeigen Sie, dass die Auswertungsabbildung $f \mapsto f(0)$ stetig bzgl. d_∞ aber nicht stetig bzgl. d_2 ist; insbesondere sind die beiden Metriken nicht äquivalent.

b) Es sei $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der Raum der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, und P bezeichne die Teilmenge der positiven stetigen Funktionen. Für ein gegebenes $p \in P$ und ein $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sei

$$U_p(f) := \{g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) | |f(x) - g(x)| < p(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}.$$

Für f seien diese $U_p(f)$ eine Umgebungsbasis; wir betrachten die dadurch bestimmte Topologie auf $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Beweisen Sie für die Nullfunktion $n(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dass es keine Folge in P gibt, die gegen n konvergiert, dass aber n trotzdem Berührpunkt von P ist. Also kann diese Topologie nicht von einer Metrik stammen.