Exposé der Doktorarbeit zum Thema

Globale Strukturen und spezielle Punkte von Modulräumen in der Spiegelsymmetrie

Max Pumperla

unter Betreuung von
Prof. Dr. Bernd Siebert

April, 2008

Einleitung und Überblick

Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten bilden eine außerordentlich interessante Klasse von algebraischen Varietäten, da weder das kanonische Bündel zusätzliche Struktur liefert, noch weitere Strukturen existieren wie im Fall der abelschen Varietäten oder der Hyperkählermannigfaltigkeiten. So weiß man in der niedrigsten interessierenden Dimension 3 noch nicht einmal, ob es endlich viele topologisch verschiedene Typen gibt; bekannt sind mehrere Millionen. Und obgleich die Modulräume glatt sind, ist ihre globale Struktur mit Ausnahme weniger Fälle unverstanden. Trotz der Fülle von Publikationen zu Calabi-Yau-Varietäten muss man daher feststellen, dass wir von einem systematischen Verständnis dieser faszinierenden Klasse von Varietäten weit entfernt sind.
Auf der anderen Seite treten in der Spiegelsymmetrie Paare topologisch unterschiedlicher Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten auf, die physikalisch die gleiche konforme Feldtheorie induzieren. Mathematisch drückt sich diese Dualität in unerwarteten Beziehungen zwischen der symplektischen Geometrie einer Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit und der komplexen Geometrie einer anderen aus. Das Studium dieses überraschenden Phänomens hat in den letzten Jahren immer wieder neue Ideen und Anstöße erfahren, die die Spiegelsymmetrie mittlerweile als eigenständiges Teilgebiet der Mathematik etabliert haben.

Stand der Forschung

Spiegelsymmetrie

Die tiefsten Ergebnisse und gleichzeitig größte Quelle von Spiegelpartnern liefert eine torische Konstruktion von Batyrev und Borisov [4], [5]. Sie erlaubt zwar sehr explizite Berechnungen mit traditionellen algebraisch-geometrischen Methoden, hat jedoch den Nachteil, keine strukturelle Erklärung für das Phänomen zu bieten.

Nach dem Ansatz von Strominger, Yau und Zaslow [36] hingegen wird Spiegelsymmetrie als eine Dualität von Bündeln spezieller Langrange-Tori verstanden. Dieses Bild bedarf in der Nähe singulärer Fasern, die in interessanten Fällen stets auftreten, allerdings gewissen Modifikationen. Es hat sich die Erkenntnis durchgesetzt, dass man im Grenzwert entartender komplexer und symplektischer Strukturen arbeiten muss, in dem das Bild dualer Torusfaserungen korrekt wird.
Im Programm von Mark Gross und Bernd Siebert, siehe [23], [24], [25] und [26], wird dieser Grenzprozess durch eine affine Mannigfaltigkeit realisert, die man sich als Basis der Torusfaserung vorstellen kann. Die Existenz singulärer Fasern spiegelt sich auf dieser Mannigfaltigkeit darin wieder, dass die affine Struktur Singularitäten längs eines Ortes der Kodimension zwei hat. Das Spiegelobjekt der affinen Mannigfaltigkeit erhält man nun durch eine Art Legendre-Transformation, die man aus der Kählerklasse konstruiert. Nach Wahl linearer Modulparameter ergibt sich daraus eine *kanonische* Konstruktion einer algebraischen Entartung von Calabi-Yau-Varietäten. Das Bemerkenswerte daran ist, dass die nötigen Korrekturen des Strominger-Yau-Zaslow-Zugangs durch tropische Geometrie auf der affinen Mannigfaltigkeit realisiert und damit einem expliziten Studium zugänglich gemacht werden. Dies erlaubt, zumindest nahe Punkten maximaler Entartung, eine vollständige Beschreibung der komplexen Seite der Spiegelsymmetrie.
Dieses Programm wirft eine Vielzahl von Fragen auf, seien es neue Vorhersagen oder die Bestätigung von Beobachtungen aus anderen Projekten.

Dreifaltigkeiten mit trivialem kanonischen Bündel

Der Fall drei-dimensionaler Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten ist der in der Stringtheorie relevanteste und weist außerdem mathematische Phänomene auf, die in höheren Dimensionen nicht mehr zu beobachten sind.
Anstatt gewöhnliche Doppelpunkte aufzublasen oder zu deformieren, gibt es unter anderem die Möglichkeit sie *klein* aufzulösen, d.h. den singulären Ort nur durch eine projektive Gerade zu ersetzen. In diesem Zusammenhang ist auch die hochinteressante Technik der Kegelfaltigkeitsübergänge zu nennen, siehe [9] und [11] für eine physikalische und [3], [6], [7], [8] und [13] für eine mathematische Beschreibung der Situation. Dabei wird eine glatte Calabi-Yau X zu einer nodalen Z deformiert und anschließend zu einer glatten Dreifaltigkeit Y mit trivialem kanonischen Bündel klein aufgelöst. $\hat{X}$ wird auf Grund der Struktur der Singularitäten häufig Kegelfaltigkeit und der induzierte Morphismus von X nach Y Kegelfaltigkeitsübergang genannt.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dotted] \arrow[dr] & & Y \\ & Z \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Diese Operation besitzt eine Vielzahl bemerkenswerter mathematischer und physikalischer Eigenschaften:

- Kegelfaltigkeitübergänge sind aus topologischer Sicht eine Chirurgie und verändern in kontrollierter Weise die kohomologischen Daten, wie in den Arbeiten [17] und [18] von Robert Friedman beschrieben.

- Die Physik liefert eine heuristische Erklärung durch masselose schwarze Löcher [21], [12], in der die Übergänge - im Gegensatz zur Topologie - einer stetigen Operation von Mannigfaltigkeiten entsprechen.
- Es gibt Hinweise, dass die über einen Übergang verbundenen Objekte bezüglich natürlicher Metriken auf den Modulräumen nur endlich weit von einander entfernt sind, siehe [9].
- Einer Spekulation von Miles Reid [34] zu Folge könnten alle Deformationstypen von Calabi-Yau-Varietäten über diese Operation miteinander verbunden sein.

Obwohl es in letzter Zeit mathematische Fortschritte im mathematischen Verständnis der Kegelfaltigkeiten im Rahmen der Spiegelsymmetrie gibt, unter anderem durch Batyrev [3] und Ruan [35], bleiben viele Fragen offen.

Fragestellung und Zielsetzung

Ausgehend von den oben genannten Themen und der großen Liste an Literatur, gibt es zahlreiche Ansatzpunkte für neue Forschungsprojekte.Das Ziel meines Promotionsvorhabens ist es, globale und lokale Aspekte der in der Spiegelsymmetrie interessanten Modulräume zu untersuchen. Hierbei stellen sich folgende Leitfragen, auf die im Folgenden genauer Bezug genommen werden soll:

- Welche Rückschlüsse kann man aus dem Gross-Siebert-Programm auf die globale Stuktur der betrachteten Modulräume ziehen?
- Ist Spiegelsymmetrie ein lokales, oder doch ein globales Phänomen, wie von einigen Physikern behauptet wird?

Methodik

Das Programm von Gross und Siebert ist lokal um gegebene Entartungspunkte formuliert. Durch analytische Methoden kann man die Konstruktion aber prinzipiell in größere Umgebungen fortsetzen. Eine interessante Frage ist nun, an welchen Punkten die Spiegelabbildung divergiert. In bekannten Beispielen von Calabi-Yau-Dreifaltigkeiten sind dies gerade die besprochenen Kegelfaltigkeitspunkte, also Punkte im Modulraum, an denen die entsprechenden Varietäten gewöhnliche Doppelpunkte aufweisen.
In meiner Dissertation werde ich untersuchen, ob und wie sich diese kritischen Punkte allgemein im Gross-Siebert-Programm identifizieren lassen und welche geometrischen Eigenschaften sie besitzen. Idealerweise lassen sich die Kegelfaltigkeitspunkte auf der affinen Mannigfaltigkeit, also der Basis der Faserung, durch tropische Geometrie beschreiben. In der Arbeit [35] von Ruan lassen sich die Punkte, sowie auch deren Auflösung durch affine Daten beschreiben. Dies ist ein Hinweis auf eine mögliche Interpretation im Gross-Siebert-Programm.

Des Weiteren ist nicht klar, ob Kegelfaltigkeiten die natürliche Klasse sind, um Probleme wie die Irreduzibilität von Modulräumen anzugehen. Eventuell ist es sinnvoll auch Varietäten mit komplizierteren, aber dennoch milden, Singularitäten zuzulassen, siehe [34]. In meiner Arbeit soll daher geklärt werden, ob diese Singularitäten sich den Kegelfaltigkeiten zumindest topologisch ähnlich verhalten und ob sie auch als Phänomen in der Spiegelsymmetrie aufgefasst werden können.
Zudem zeigt eine aktuelle Arbeit von Batyrev [3], dass man mit Kegelfaltigkeitsübergängen auch neue Spiegelpartner finden kann. Geht man von einer Calabi-Yau-Dreifaltigkeit Y aus und findet über einen Kegelfaltigkeitsübergang ein X, von dem man bereits einen Spiegelpartner $\hat{X}$ kennt, so sollte der Partner $\hat{Y}$ von Y entsprechend durch einen Übergang von $\hat{X}$ gefunden werden können.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dotted] \arrow[d] & \hat{Y} \\ X \arrow[r] & \hat{X} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Bei Batyrev ist das Paar $(X, \hat{X})$ gerade eines aus seiner torischen Konstruktion und der Übergang von $\hat{X}$ zu $\hat{Y}$ wird natürlich durch Spezifikation der komplexen Struktur induziert. Ein Analogon dieses Vorgangs im Gross-Siebert-Programm zu entdecken, würde das ohnehin schon weite Spektrum des Programms noch weiter vergrößern.
Um die genannten Fragestellungen anzugehen, werde ich mich auf das Studium von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten mit eindimensionalem Modulraum konzentrieren. Als geeignetes Testfeld bieten sich wohlbekannte Beispiele, wie etwa die Pfaffsche Calabi-Yau oder gewisse vollständige Durchschnitte in torischen Varietäten an.
Grundsätzlich soll das Programm von Gross und Siebert die methodische Grundlage der Dissertation sein und bei allen Fragestellungen als Ausgangs- und Endpunkt der Betrachtungen gelten.

Vorkenntnisse

Die Vielschichtigkeit der Theorie erfordert ein hohes Maß an Vorarbeiten. Während meines Studiums habe ich mich im Wesentlichen in den folgenden Gebieten spezialisiert:

- Algebraische Geometrie: Das Standardwerk [27] erweist sich als solide Grundlage für Betrachtungen des sogenannten B-Modells in der Spiegelsymmetrie.
- Torische Geometrie: Zum Verständnis der Arbeiten von Batyrev und anderer konvex-geometrischer Aspekte sind die Bücher [16], [19] und [33] bislang sehr hilfreich.
- Tropische Geometrie: Diesen sehr neuen Zweig der Geometrie konnte ich in einer Vorlesung von Andreas Gathmann erlernen. Durch die Arti-

kel [20] und [31] konnte ich mein Wissen über tropische Varietäten weiter vertiefen.

Seit Beginn der Promotion arbeite ich mich zudem in die zitierten Arbeiten zur Spiegelsymmetrie ein. Neben dem Gross-Siebert-Programm lese ich viele Übersichtsartikel und das Buch [14]. Auch das Projekt von Auroux, Katzarkov und Orlov [2] über homologische Spiegelsymmetrie [28] verfolge ich aufmerksam, da es thematisch eine Brücke zu meiner Diplomarbeit schlägt. Um Spiegelsymmetrie in ihren vielen Formen zu verstehen, erschien es mir außerdem ratsam, mich mit folgenden Themen auseinander zu setzen:

- Deformations- und Singularitätentheorie: Das relativ neue Buch von Greuel, Lossen und Shustin [22], sowie der Artikel von Vistoli [37], bieten eine gute Einführung in die Thematik und ergänzen die gute, aber alte Standardreferenz [1].
- Hodgetheorie: Diesen für die Spiegelsymmetrie sehr wesentlichen Bereich habe ich über das Buch [38] von Voisin erlernt.
- Differentialgeometrie: In diesem Bereich konnte ich stark von dem im letzten Wintersemester angebotenen Oberseminar in Differentialgeometrie und vielen nützlichen Diskussionen mit Kollegen profitieren.

Bisherige Ergebnisse und Ausblick

Ein aktuelles Resultat mit überraschend einfachem Beweis zeigt, dass eindimensionale Modulräume vollständiger Durchschnitte in torischen Varietäten stets rational sind. Dies gibt ein gutes Kriterium um Modulräume genuin nicht-torischer Art zu identifizieren. Außerdem ist damit gezeigt, dass eindimensionale Familien aus der Batyrev-Borisov-Konstruktion in gewissem Sinne sehr restriktiv sind. Im Augenblick studiere ich ein Beispiel einer Ein-Parameterfamilie aus einer Arbeit von Lu und Tian [30]. Es gibt Hinweise, dass diese Familie nicht rational sein kann.
Lassen sich andere Beispiele auf ähnliche Weise finden, so kann man erwarten, neue Klassen von Familien zu finden, die das Batyrev-Borisov-Programm überschreiten und somit eine weitere Rechtfertigung für die Gross-Siebert-Konstruktion liefern.

Literatur

[1] Michael Artin. *Lectures on deformations of singularities.* Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1976.

[2] Denis Auroux, Ludmil Katzarkov, Dmitri Orlov. *Mirror symmetry for weighted projective planes and their noncommutative deformations.* Ann. Math.

[3] Victor Batyrev, Maximilian Kreuzer. *Constructing new Calabi-Yau 3-folds and their mirrors via conifold transitions.* Preprint, arXiv: 0802.3376, 2008.

[4] Victor V. Batyrev. *Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties.* 3. J. Algebraic Geometry, 1994.

[5] Victor V. Batyrev, Lev Borisov. *On Calabi-Yau complete intersections in toric varieties.* Higher-dimensional complex varieties, de Gruyter, 1994.

[6] Victor V. Batyrev, Ionut Ciocan-Fontaine, Bumsig Kim, Duco van Straten. *Conifold transitions and mirror symmetry for Calabi-Yau complete intersections in Grassmanians.* 514. Nuclear Physics B, 1998.

[7] Victor V. Batyrev, Ionut Ciocan-Fontaine, Bumsig Kim, Duco van Straten. *Mirror symmetry and toric degenerations of partial flag manifolds.* 184. Acta Math., 2000.

[8] Cipiran Borcea. *Nodal quintic threefolds and nodal octic surfaces.* Number 3 in 109. Proceedings of the American Mathematical Society, 1990.

[9] Philip Candelas, Xenia C. de la Ossa. *Comments on conifolds.* B342. Nuclear Physics, 1990.

[10] Philip Candelas, Xenia C. de la Ossa, Paul S. Green, Linda Parkes. *A pair of Calabi-Yau Manifolds as an exact soluble superconformal field theory.* 359. Nuclear Physics B, 1991.

[11] Philip Candelas, Paul S. Green, Tristan Hübsch. *Rolling among Calabi-Yau vacua.* 330. Nuclear Physics B, 1990.

[12] Ti-Ming Chang, Brian Greene, Mark Gross, Yakov Kanter. *Black hole condensation and the web of Calabi-Yau manifolds.* CLNS-95/1367, hep-th/9511204, 1995.

[13] C. Herbert Clemens. *Double solids.* 47. Advances in Mathematics, 1983.

[14] D. A. Cox, S. Katz. *Mirror symmetry in algebraic geometry.* 68. Mathematical surveys and monographs, 1999.

[15] David Eisenbud. *Commutative algebra with a view towards algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1996.

[16] Günter Ewald. *Combinatorial convexity and algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1996.

[17] Robert Friedman. *Simultaneous resolution of threefold double points.* 274. Math. Annalen, 1986.

[18] Robert Friedman. *On threefolds with trivial canonical bundle.* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 53, 1991.

[19] William Fulton. *Introduction to toric varieties.* Princeton University press, 1993.

[20] Andreas Gathmann. *Tropical algebraic geometry.* arXiv:math/0408311.

[21] Brian R. Greene, David R. Morrison, Andrew Strominger. *Black hole condensation and the unification of string vacua.* CLNS-95/1335, hep-th/9504145, 1995.

[22] Gert-Martin Greuel, Christoph Lossen, Eugenii Shustin. Introduction to singularities and deformations Springer, Berlin, 2006.

[23] Mark Gross, Bernd Siebert. *Affine manifolds, log structures and mirror Symmetry.* 2003.

[24] Mark Gross, Bernd Siebert. *Mirror symmetry via logarithmic degeneration data I.* 2006.

[25] Mark Gross, Bernd Siebert. *Mirror symmetry via logarithmic degeneration data II.*

[26] Mark Gross, Bernd Siebert. *From real affine geometry to complex geometry.* arxiv math/0703822.

[27] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer, 1977.

[28] Maxim Kontsevich. *Homological algebra of mirror symmetry*, volume 1. Proc. ICM Zürich, 1994.

[29] Maxim Kontsevich, Yan Soibelman. *Affine structures and non-Archimedian analytic spaces*, volume 244. 2006.

[30] Peng Lu, Gang Tian. *The complex structures on connected sums of* $S^3 \times S^3$, volume 26. 1996.

[31] Grigory Mikhalkin. *Tropical geometry.* Buchprojekt: http://www.math.toronto.edu/mikha/book.pdf.

[32] Takeo Nishinou, Bernd Siebert. *Toric degenerations of toric varieties and tropical curves.* 135. Duke Mathematical Journal, 2006.

[33] Tadao Oda. *Convex bodies and algebraic geometry.* Springer, 1988.

[34] Miles Reid. *The moduli space of* 3*-folds with* $K = 0$ *may nevertheless be irreducible.* 278. Math. Annalen, 1987.

[35] Wei-Dong Ruan. *Lagrangian torus fibrations and mirror symmetry of Calabi-Yau manifolds.* arXiv:math/0104010, 2001.

[36] A. Strominger, S.-T. Yau, E. Zaslow. *Mirror symmetry is T-duality.* 479. Nuclear Physics B, 1996.

[37] Angelo Vistoli. *The deformation theory of local complete intersections.* arXiv:alg-geom/9703008, 1999.

[38] Claire Voisin. *Hodge theory and complex algebraic geometry I.* Cambridge University Press, 1 edition, 2003.

[39] Jürgen Werner. *Kleine Auflösungen spezieller dreidimensionaler Varietäten.* 186. Bonner Mathematische Schriften, 1987.