Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik

Zentrum für Modellierung und Simulation

Hamburger Beiträge
zur Modellierung und Simulation

Heft 15   Juli 2000

Exakte Naturwissenschaft und Modellbegriff

Claus Peter Ortlieb

Mathematische Modellierung und Simulation

Die mathematisch-naturwissenschaftliche Methode, gegründet auf der Überzeugung, dass „das Buch der Natur in der Sprache der Mathematik geschrieben" sei (Galilei), findet heute weit über ihren ursprünglichen Gegenstandsbereich hinaus Verwendung. *Mathematische Modellierung*, also der Versuch, das Nachdenken über eine Fragestellung in mathematische Termini zu übersetzen, verfolgt den Zweck, sich die Stringenz mathematischer Argumente auch für die Bearbeitung von Problemen außerhalb der Mathematik zu sichern. Im Begriff der *Simulation* ist in diesem Zusammenhang der Anspruch enthalten, dass die Analyse eines mathematischen Modells oder sein Nachvollzug auf dem Computer immer auch auf Erkenntnisse zielt, die über die Mathematik hinausweisen.

Der Erfolg dieser Methode bei der Behandlung physikalischer und technischer Systeme hat es nahegelegt, ihr Anwendungsfeld zu erweitern. In den *Lebens- und Sozialwissenschaften* geht es bis in Bereiche hinein, die gesellschaftliches Handeln zum Gegenstand haben und ihrerseits beeinflussen. Dabei werden häufig nur die wissenschaftlichen Ergebnisse wahrgenommen, während den Methoden, mit denen sie zustandekommen, blind vertraut wird. Doch die Mathematik als „höchste Form der Rationalität" anzupreisen, wie es auch mathematische Fachwissenschaftler gerne tun, besagt noch nichts über ihre Bedeutung für die Erkenntnis gesellschaftlicher und natürlicher Phänomene und Zusammenhänge. Zu hinterfragen ist insbesondere die verbreitete Auffassung, bei mathematischen Modellen handele es sich in aller Schlichtheit um „Abbilder der Wirklichkeit".

Das Zentrum für Modellierung und Simulation und diese Schriftenreihe haben zum Ziel, die *methodischen* Fragestellungen zu behandeln und zu durchleuchten, die die mathematische Bearbeitung „realer" Probleme aufwirft. Die Frage nach dem „richtigen" Einsatz mathematischer Modellierung im Einzelfall gehört ebenso dazu dazu wie die Frage nach Kriterien dafür im Allgemeinen. Gibt es eine „Methode" der Modellierung und Simulation, und worin bestehen ihre Regeln, ihre Möglichkeiten, ihre Grenzen? Es ist klar, dass eine so komplexe Fragestellung mehr als nur einen Zugang erfordert. Gefragt sind u. a.

- Darstellungen und Untersuchungen von selbst entwickelten ebenso wie die Auseinandersetzung mit in der Literatur vorgefundenen mathematischen *Modellklassen* und *Fallstudien*,
- Untersuchungen zu spezifischen, am Modelltyp orientierten *Instrumenten und Methoden* der mathematischen Modellierung,
- *wissenschaftstheoretische und -historische* Abhandlungen zur gesellschaftlichen Bedeutung von Mathematisierungsprozessen.

Zentrum für Modellierung und Simulation
Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Bundesstraße 55

D - 20146 Hamburg

Telefon 040 4123 5108
Fax 040 4123 5117
e –mail zms@math.uni-hamburg.de

Exakte Naturwissenschaft und Modellbegriff

Claus Peter Ortlieb

Der vorliegende Text ist als ein einführendes Kapitel einer Vorlesung über *Mathematische Modellierung und Simulation* gedacht. Ich versuche darin, den Modellbegriff und die "Methode" der mathematischen Modellbildung durch einen Blick auf mir besonders wichtig erscheinende Momente ihrer Entstehungsgeschichte zu erfassen. Sie liegen am Beginn der neuzeitlichen Naturwissenschaft im siebzehnten und im Übergang zur "modernen" Naturwissenschaft am Ende des neunzehnten Jahrhunderts.

1 Einleitung

Der *Begriff* des mathematischen Modells ist, wie noch ausgeführt werden soll, erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts aufgekommen. Nichtsdestoweniger ist mathematische Modellbildung aus heutiger Sicht das, was die neuzeitliche mathematische Naturwissenschaft seit Galilei betreibt. Das Kant'sche Diktum (Kant 1786/1996, Vorrede),

> *daß in jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist,*

besagt in moderner Terminologie: Es ist der Gebrauch *mathematischer Modelle*, der die *exakten Wissenschaften* "exakt" bzw. die *hard sciences* "hard" macht.

Nun ist weder "eigentlich" noch "exakt" noch "hart" ein in diesem Zusammenhang präzise geklärter Begriff.[1] Insofern handelt es sich bei der hier vorliegenden Aussage nicht um einen Tatsachenbehauptung, sondern sie ist schlicht definitorisch. Auf der anderen Seite sind die darin verwendeten Worte positiv besetzt, und in der Tat haben die exakten Naturwissenschaften ihrer sichtbaren technischen Erfolge wegen für andere Wissenschaften die Rolle eines Vorbilds übernommen, dem es nachzueifern gelte. Mathematische Modelle werden daher seit Ende des 19. Jahrhunderts zunehmend auch in "weichen" Wissenschaften eingesetzt, und sei es auch nur aus Gründen des wissenschaftlichen Prestiges.

Auch und gerade wenn es um den Einsatz, die Rolle, die Sinnhaftigkeit und die Grenzen mathematischer Modellbildung in den Lebens- und Sozialwissenschaften gehen soll, ist es nützlich, sich ihrer Herkunft aus der mathematisch-naturwissenschaftlichen Methode klar zu werden. Schließlich ist es nicht ausgemacht, dass ein Instrument, welches sich in einem bestimmten Umfeld (hier der Physik) bewährt hat, auch in jedem beliebigen anderen erfolgreich eingesetzt werden kann. Zu fragen ist daher

- nach der Rolle der Mathematik für die neuzeitliche Physik, mit der zusammen sie sich entwickelt hat,
- nach den Bedingungen der Möglichkeit dieses offenbar erfolgreichen Zusammenwirkens und

[1] "Wissenschaft" ist es übrigens ebenso wenig.

- nach dem Charakter und ggf. der Begrenztheit dieses Erfolges.

Das soll hier an einigen Beispielen aus den Anfängen geschehen, wobei der Schwerpunkt weniger auf den Ergebnissen als vielmehr auf der Methode liegt, mit der sie gewonnen wurden. Mein erstes Ziel ist es dabei, der irrigen empiristischen Auffassung entgegen zu treten, Ausgangspunkt und zentrales Werkzeug aller Naturwissenschaft sei die Erfahrung. Tatsächlich wird sich die Rolle der Mathematik als schwerer wiegend und damit zugleich problematischer erweisen als vielfach auch von Naturwissenschaftlern angenommen. Das eigentlich Neue an der neuzeitlichen exakten Naturwissenschaft ist die Vorstellung von *mathematischen Gesetzen* hinter den vielfältigen Erscheinungen des Naturgeschehens. Dieses Weltbild erst impliziert auch die besondere Rolle des Experiments: Nur hier, in der bewussten Herstellung einer künstlichen Situation, und nicht in der Beobachtung mit "freiem Auge", lassen sich die mathematischen Idealwelten mit der Erfahrung zumindest näherungsweise zur Deckung bringen. Die Konstitution der mathematisch-naturwissenschaftlichen Methode, mit der die Namen Galileis und Newtons verbunden sind, wird in den Abschnitten 2 bis 4 analysiert.

Bis ins 19. Jahrhundert hinein bilden Mathematik und Physik eine Einheit, gelten mathematische Sätze einfach als wahre Aussagen über die Natur. Dann aber beginnt diese Einheit zu bröckeln. Es wird deutlich und am Ende eines Jahrhunderts des Übergangs auch klar ausgesprochen, dass unsere Bilder von der Natur Schöpfungen unseres Geistes sind, die aus der Wirklichkeit nicht einfach herausgelesen werden. Im Zuge dieser wissenschaftlichen Revolution der Moderne wird die Mathematik zu einem eigenen Fach, und es entwickelt sich der Modellbegriff. Davon handelt Abschnitt 5.

2 Das Fallgesetz

Das Gesetz des freien Falls steht am Beginn der neuzeitlichen Physik. Es besagt,

- dass alle Körper gleich schnell fallen,
- dass bei einem Fall aus der Ruhelage die zurückgelegten Wege sich verhalten wie die Quadrate der Zeiten.

Um die Entdeckung dieses Gesetzes durch Galileo Galilei (1564 - 1642), mit der er in Widerspruch zu der in seiner Zeit vorherrschenden aristotelischen Wissenschaft geriet, ranken sich Legenden. Eine von ihnen besagt, Galilei habe im Jahre 1590 die aristotelische Wissenschaft herausgefordert und vor der versammelten Professoren- und Studentenschaft der Pisaner Universität ihre Falschheit durch Experimente demonstriert, ausgeführt von der Höhe des Pisaner Glockenturms. Die Geschichte ist 60 Jahre nach dem angeblichen Ereignis zum ersten Mal verfasst und später von Wissenschaftshistorikern immer wieder aufgegriffen und weiter ausgeschmückt worden. Sie widerspricht allen Gebräuchen an Universitäten dieser Zeit, sie ist von Galilei selbst, der die Kunst der Selbstdarstellung in hohem Maße beherrschte, nie erwähnt worden, und schließlich: Die Experimente, so wie beschrieben, wären schiefgegangen, die von ihm fallen gelassenen Gegenstände wären nicht gleichzeitig unten aufgeschlagen (s. Koyré 1998, S. 123 - 134).

Es handelt sich also wirklich nur um eine Legende. Die Frage ist, warum sie aufkam. Was hier erzählt wird, ist ein *Mythos des Empirismus'*, dem zu Folge die mittelalterliche Naturlehre ein durch Lehrbücher tradierter Dogmatismus war, während Galilei und mit ihm die neuzeitliche Physik einfach "die Tatsachen sprechen ließ". Hätte er das wirklich getan und wäre von Beobachtungen ausgegangen, so wäre er nie auf sein Fallgesetz gekommen.

2.1 Ausgangspunkt: Mathematische Definitionen und Sätze

Galilei selbst hat in einem reichhaltigen Schrifttum die von ihm entwickelten und verwendeten Methoden sehr genau beschrieben, und es überrascht nicht, dass sie ganz anders sind, als die Legende es erzählt. Galileis Alterswerk, die Discorsi von 1638 werden 300 Jahre später in der Jubiläumsausgabe von Max v. Laue als "erstes Lehrbuch der Physik" bezeichnet. Das typische Vorgehen wird am Dritten Tag[2] am Beispiel des freien Falls deutlich. Er beginnt mit einer einfacheren Bewegungsform

Definition 2.1 (Galilei 1638/1995, S. 141) *Ich nenne diejenige Bewegung gleichförmig, bei welcher die in irgendwelchen gleichen Zeiten vom Körper zurückgelegten Strecken unter einander gleich sind.*

über die dann zunächst einige Theoreme aufgestellt und mit geometrischen Mitteln bewiesen werden. Dann erfolgt der Übergang zur beschleunigten Bewegung (Galilei 1638 / 1995, S. 146):

> *Bisher war die gleichförmige Bewegung behandelt worden, jetzt gehen wir zur beschleunigten Bewegung über. Zunächst muss eine der natürlichen Erscheinung genau entsprechende Definition gesucht und erläutert werden. Obgleich es durchaus gestattet ist, irgend eine Art der Bewegung beliebig zu ersinnen und die damit zusammenhängenden Ereignisse zu betrachten ..., so haben wir uns dennoch entschlossen, diejenigen Erscheinungen zu betrachten, die bei den frei fallende Körpern in der Natur vorkommen, und lassen die Definition der beschleunigten Bewegung zusammenfallen mit dem Wesen einer natürlich beschleunigten Bewegung. ...*
>
> *Wenn ich daher bemerke, dass ein aus der Ruhelage von bedeutender Höhe herabfallender Stein nach und nach neue Zuwüchse an Geschwindigkeit erlangt, warum soll ich nicht glauben, dass solche Zuwüchse in allereinfachster, Jedermann plausibler Weise zu Stande kommen? Wenn wir genau aufmerken, werden wir keinen Zuwachs einfacher finden, als denjenigen, der in immer gleicher Weise hinzutritt. Das erkennen wir leicht, wenn wir an die Verwandschaft der Begriffe der Zeit und der Bewegung denken: denn wie die Gleichförmigkeit der Bewegung durch die Gleichheit der Zeiten und Räume bestimmt und erfasst wird ..., so können wir durch ebensolche Gleichheit der Zeittheile die Geschwindigkeitszunahmen als einfach zu Stande gekommen erfassen: mit dem Geiste erkennen wir diese Bewegung als einförmig und in gleicher Weise stetig beschleunigt, da zu irgend welchen gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeitszunahmen sich addiren.*

Die alltägliche Erfahrung kommt bei diesen Überlegungen insofern ins Spiel, als festgehalten wird, dass ein losgelassener Stein fällt und dabei immer schneller wird. Doch das ist alles, genauer wird die Bewegung nicht beschrieben. Vielmehr kommt jetzt das *Prinzip der Einfachheit* ins Spiel: Unter allen Bewegungen mit den genannten Eigenschaften wird eine möglichst einfache ausgewählt. Dieses Prinzip und nicht irgend eine vorausgegangene Messung oder genaue Beobachtung führt schließlich zu

Definition 2.2 (Galilei 1638/1995, S. 148) *Gleichförmig oder einförmig beschleunigte Bewegung nenne ich diejenige, die von Anfang an in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeitszuwüchse ertheilt.*

[2]Die *Discorsi* sind als ein über mehrere Tage sich hinziehendes Gespräch dargestellt.

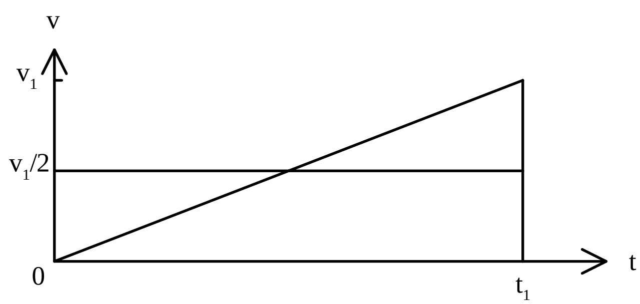
Die Empirie kann an dieser Stelle schon deswegen gar nicht zum Zuge kommen, weil sich die Geschwindigkeit eines fallenden Steines (zumindest zu Zeiten Galileis) nicht direkt messen lässt. Unmittelbar messen lassen sich Strecken und Zeitspannen.[3] Ob also die Definition 2.2 der gleichförmig beschleunigten Bewegung bei den frei fallenden Körpern in der Natur vorkommt, wie Galilei behauptet, lässt sich daher nicht so ohne weiteres feststellen. Galilei verbleibt denn auch auf der mathematischen Ebene und beweist mit geometrischen Mitteln zwei auf einander aufbauende Sätze:

Satz 2.1 (Galilei 1638 / 1995, S. 158) *Die Zeit, welche irgendeine Strecke von einem Körper von der Ruhelage aus mittelst einer gleichförmig beschleunigten Bewegung zurückgelegt wird, ist gleich der Zeit, in welcher dieselbe Strecke von demselben Körper zurückgelegt würde mittelst einer gleichförmigen Bewegung, deren Geschwindigkeit gleich wäre dem halben Betrage des höchsten und letzten Geschwindigkeitswerthes bei jener ersten gleichförmig beschleunigten Bewegung.*

Satz 2.2 (Galilei 1638 / 1995, S. 159) *Wenn ein Körper von der Ruhelage aus gleichförmig beschleunigt fällt, so verhalten sich die in gewissen Zeiten zurückgelegten Strecken wie die Quadrate der Zeiten.*

Zum Beweis:

In Satz 2.1 werden zwei verschiedene Bewegungen einander gegenüber gestellt: Eine gleichförmig beschleunigte, bei der im Zeitintervall $[0, t_1]$ die Geschwindigkeit gleichmäßig von 0 auf einen maximalen Wert v_1 zunimmt, und eine gleichförmige mit der konstanten Geschwindigkeit $v_1/2$.



Offenbar sind die Flächen unter den beiden verschiedenen Geschwindigkeitsprofilen gleich. Nun ist aber, in moderner Terminologie, bei einer gegebenen Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$

$$s = \int_0^{t_1} v(t)\, dt$$

der im Zeitintervall $[0, t_1]$ durchlaufene Weg, und dieses Integral beschreibt ja gerade die Fläche unter dem Graphen von $v(t)$, woraus sich die Aussage von Satz 2.1 ergibt. Galilei selbst steht wohl die Geometrie zur Verfügung, mit der die Gleichheit der beiden Flächen gezeigt werden kann, nicht aber der Integralbegriff, der sich in seinen Formulierungen allerdings bereits andeutet, in denen von sich addierenden *Geschwindigkeits-* oder *Bewegungsmomenten* die Rede ist.

[3] Die Zeitmessung stellte allerdings mangels präziser und für die Erfassung kurzer Zeitspannen geeigneter Uhren ebenfalls ein schwerwiegendes Problem dar.

Ist nun bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung zum Zeitpunkt t_1 die Geschwindigkeit v_1 und zum Zeitpunkt t_2 die Geschwindigkeit v_2 erreicht, so gilt nach Satz 2.1 für die jeweils zurückgelegten Wege

$$s_1 = \frac{1}{2}\, v_1\, t_1 \text{ und } s_2 = \frac{1}{2}\, v_2\, t_2 \ ,$$

andererseits wegen der gleichförmigen Beschleunigung

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_1}{t_2} \ ,$$

woraus

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$$

und damit Satz 2.2 folgt.

2.2 Experimente

Aus Satz 2.2 wird das Fallgesetz, wenn man in der Voraussetzung den mathematischen Begriff der gleichförmig beschleunigten Bewegung durch den physikalischen des freien Falls ersetzt. Ob diese Gleichsetzung berechtigt ist, lässt sich, wie bereits bemerkt, nicht direkt überprüfen, wohl aber in der Form des jetzt vorliegenden Satzes, in dem nur noch Wege und Zeiten auftreten, aber keine Geschwindigkeiten. Die mathematische Herleitung von Satz 2.2 erweist sich also als eine Voraussetzung dafür, dass überhaupt ein Experiment durchgeführt werden kann, und der Satz selbst gibt Hinweise darauf, was zu messen ist.

Die von Galilei beschriebenen Experimente fanden mit auf schiefen Ebenen abrollenden Kugeln statt. Tatsächlich befassen sich große Teile der *Discorsi* mit weiteren mathematischen Überlegungen, schiefe Ebenen betreffend, auf die ich nicht näher eingehe. Es zeigt aber, dass der vor dem allerersten Experiment getriebene theoretische Aufwand noch erheblich höher war, als in meiner Kurzfassung hier dargestellt.

Galilei (1638/1995, S. 162) beschreibt seine Experimente:

> *Auf einem Lineale, oder sagen wir auf einem Holzbrette von 12 Ellen Länge, bei einer halben Elle Breite und drei Zoll Dicke, war auf dieser letzten schmalen Seite eine Rinne von etwas mehr als einem Zoll Breite eingegraben. Dieselbe war sehr gerade gezogen, und um die Fläche recht glatt zu haben, war inwendig ein sehr glattes und reines Pergament aufgeklebt; in dieser Rinne liess man eine sehr harte, völlig runde und glattpolirte Messingkugel laufen.*
>
> *Nach Aufstellung des Brettes wurde dasselbe einerseits gehoben, bald eine, bald zwei Ellen hoch; dann liess man die Kugel durch den Kanal fallen und verzeichnete in sogleich zu beschreibender Weise die Fallzeit für die ganze Strecke: häufig wiederholten wir den einzelnen Versuch, zur genaueren Ermittlung der Zeit, und fanden gar keine Unterschiede, auch nicht einmal von einem Zehntheil eines Pulsschlages. Darauf liessen wir die Kugel nur durch ein Viertel der Strecke laufen, und fanden stets genau die halbe Fallzeit gegen füher. Dann wählten wir andere Strecken, und verglichen die gemessene Fallzeit mit der zuletzt erhaltenen und mit denen von* $\frac{2}{3}$ *oder* $\frac{3}{4}$ *oder irgend anderen Bruchtheilen; bei wohl hundertfacher Wiederholung fanden wir stets, dass die Strecken sich verhielten wie die Quadrate der Zeiten: und dieses zwar für jedwede Neigung der Ebene, d. h. des Kanales, in dem die Kugel lief. ...*

> *Zur Ausmessung der Zeit stellten wir einen Eimer voll Wasser auf, in dessen Boden ein enger Kanal angebracht war, durch den ein feiner Wasserstrahl sich ergoss, der mit einem kleinen Becher aufgefangen wurde, während einer jeder beobachteten Fallzeit: das dieser Art aufgesammelte Wasser wurde auf einer sehr genauen Waage gewogen; aus den Differenzen der Wägungen erhielten wir die Verhältnisse der gewichte und die Verhältnisse der Zeiten, und zwar mit solcher Genauigkeit, dass die zahlreichen Beobachtungen niemals merklich von einander abwichen.*

Einer unbefangenen, nicht durch entsprechende Schulversuche voreingenommenen Leserin der Beschreibung Galileis dürfte vor allem die absolute Künstlichkeit des ganzen Geschehens ins Auge springen. Hier wird nicht einfach beobachtet, wie schwere Gegenstände fallen, sondern es wird mit großem Aufwand eine besondere Situation bewusst *hergestellt*, die herbei zu führen einem Laien niemals in den Sinn käme. Aus der Sicht der mathematischen Naturwissenschaft kann das gar nicht anders sein, geht es doch darum, den im mathematischen Satz unterstellten Idealbedingungen möglichst nahe zu kommen und das heißt, störende Einflüsse auszuschalten. Aus der Sicht Außenstehender muss dieses Vorgehen die Aussagekraft der so gewonnenen Ergebnisse aber erheblich beeinträchtigen. Das Experiment (freilich nicht Beobachtung und Rückgriff auf Erfahrung) ist eine Erfindung der neuzeitlichen Naturwissenschaft, und niemand ist gezwungen, es als Erkenntnisinstrument zu akzeptieren. Ob die Natur sich außerhalb der künstlichen experimentellen Situation so verhält, wie die aus mathematischen Abstraktionen und experimentellen Überprüfungen gewonnenen Gesetze es besagen, darf schließlich mit Fug und Recht bezweifelt werden. Bei der Beurteilung der Auseinandersetzungen etwa Galileis mit den mittelalterlichen, aristotelischen Vorstellungen seiner Zeit sollte man sich diese Diskrepanz in den Erkenntnis*methoden* immer vor Augen halten. Ich komme darauf zurück.

Die tatsächliche Ausführung von Experimenten stößt in Galileis Zeiten auf größere Schwierigkeiten, als das aus der vorliegenden Textstelle deutlich wird, weil nämlich die technischen Voraussetzungen erbärmlich sind, verglichen etwa mit denen, die heute die Physiksammlung einer normalen Schule bietet. Galileis Versuche zur Bestimmung der konstanten Beschleunigung im freien Fall sind völlig wertlos, er vermeidet in seinen Schriften so weit wie möglich die Angabe eines konkreten Zahlenwerts, und wenn er es doch tut, liegt er jedes Mal völlig falsch, nämlich etwa bei der Hälfte des heute gültigen. Galilei bediente sich denn auch zur Stützung seiner Auffassung hin und wieder des "Kunstgriffs", Experimente, die er sich bloß erdacht hatte, als wirklich durchgeführte zu beschreiben (Koyré 1998, S. 129). Auch bei dem hier zitierten Text stellt sich die Frage, ob Versuchsergebnisse nicht einfach schöngeredet wurden.

Das von Galilei beschriebene Vorgehen zur Messung der Zeit weist auf ein weiteres, mit Experimenten verbundenes Problem hin. Nicht nur die Anlage von Experimenten ist theoriegeleitet, sondern bereits die Erhebung von Messdaten innerhalb eines Experiments ist es. Jeder Messung liegt eine *Theorie des Messinstruments* zu Grunde, im vorliegenden Text ist es diese: *Die aus dem Eimer fließende und anschließend gewogene Wassermenge ist der Zeit, in der sie ausfloss, proportional*; hinzu kommt noch die *Theorie der benutzten Waage.* Die jeweilige Theorie des Messinstruments wird in einem Experiment aber nicht überprüft, sondern immer vorausgesetzt.

Durch die Verfeinerung der Messinstrumente im Laufe der Entwicklung der Experimentalphysik wird dieses Problem nicht etwa behoben, sondern vielmehr verstärkt. Präzisionsuhren etwa beruhen in weit höherem Maße auf physikalischen Theorien als Galileis einfache Konstruktionen. Denkbar ist daher, dass in Experimenten Messinstrumente eingesetzt werden, die auf eben jenen Theorien beruhen, die im Experiment überprüft werden sollen. Dieser Problemstrang der mangelnden Aussagekraft von Experimenten wird im vorliegenden Text nicht weiter verfolgt, vgl. dazu Collins/Pinch 1999.

2.3 Zur Methodenabhängigkeit der Erkenntnisse

Der Unterschied zwischen Beobachtung und Experiment kann gar nicht scharf genug hervorgehoben werden, seine Nichtbeachtung hat schon viele in die Irre führt, so etwa den braven Übersetzer Emil Strauss von Galileis Dialog ins Deutsche 1890 in seiner Einleitung, der

> *... die falsche, ja thörichte aristotelische Behauptung ..., daß die Fallgeschwindigkeit proportional zur Schwere und umgekehrt proportional der Dichtigkeit des Mediums sei ...*

als Beleg für die Überlegenheit der neuzeitlichen Naturwissenschaft gegenüber mittelalterlichen und anderen Denkweisen anführt. Dieser Ausspruch ist ein besonders schönes Beispiel für ein unkritisches und geschichtsblindes Denken, das die eigene Erkenntnisform für die einzig mögliche und Vertreter anderer Kulturen, die zu anderen Ergebnissen kommen, einfach nur für dumm oder verblendet hält. Dabei hat Aristoteles so Unrecht ja nicht, solange man sich auf alltägliche Beobachtungen bezieht. Oder anders gesagt: Galilei wäre zu einem ähnlichen Ergebnis gekommen, wenn er so vorgegangen wäre, wie die Legende vom Schiefen Turm es erzählt. Galileis ganz anderes, als Fallgesetz formuliertes Ergebnis beruht auf einer ganz anderen Methode, die u. a. gerade darin besteht, von der "Dichtigkeit des Mediums" zu abstrahieren. Seine Überprüfung im Experiment setzt voraus, dass Versuchsbedingungen hergestellt werden, bei denen die Dichte vernachlässigt werden kann. Galilei selbst ist sich seines Vorgehens jedenfalls bewusster als sein Übersetzer 250 Jahre später. Im Zusammenhang mit der Wurfbewegung[4] schreibt er (Galilei 1638/1995, S. 224):

> *In Betreff des Widerstandes des Mediums gestehe ich zu, dass dessen störender Einfluss bemerklicher sein wird, und wegen seiner mannigfach verschiedenen Beschaffenheit kaum unter feste Regeln gebracht werden kann; so lange wir auch nur den Widerstand der Luft berücksichtigen, so wird dieser alle Bewegungen stören, auf unendlich verschiedene Weise, da unendlich verschieden Gestalt, Gewicht und Geschwindigkeit der geworfenen Körper sich ändern könnten. Wenn z. B. die Geschwindigkeit größer ist, so wird auch der Einfluss der Luft wachsen, und das zwar um so mehr, je leichter die Körper sind, sodass, obwohl die Strecken bei senkrechtem Fall sich wie die Quadrate der Zeiten verhalten sollten, dennoch selbst die allerschwersten Körper von bedeutender Höhe herab solchen Widerstand von der Luft erfahren, dass die Beschleunigung gänzlich aufhört und die Bewegung eine gleichförmige wird; letzteres tritt um so früher ein, und von um so geringeren Höhen, je leichter die Körper sind. ... Ueber alle die unendlich verschiedenen Möglichkeiten hinsichtlich der Schwere, der Geschwindigkeit und der Gestalt kann keine Theorie gegeben werden.*

Letztlich stimmt Galilei der "thörichten aristotelischen Behauptung" sogar zu, doch ist seine Fragestellung eine ganz andere. Die "Dichtigkeit des Mediums" ist für ihn nicht Untersuchungsgegenstand, sondern ein Störfaktor, den es auszuschalten gilt. Das Interesse der neuzeitlichen Physik gilt nicht der Vielfalt der Erscheinungen, denn darüber "kann keine Theorie gegeben werden", sondern den hinter den Erscheinungen wirkenden Gesetzen, von denen Galilei annimmt,

[4] *Ein gleichförmig horizontaler und zugleich gleichförmig beschleunigter Bewegung unterworfener Körper beschreibt eine Halbparabel.* (Galilei 1638/1995, S. 218)

dass sie mathematische seien.[5] Aristoteles hat die mathematisch-experimentelle Methode nicht gekannt, mit seinen auf unmittelbarer Beobachtung beruhenden Methoden musste er zu anderen Ergebnissen kommen.

Wir sind als moderne Menschen an die grundlegenden Auffassungen und Prinzipien der neuzeitlichen Naturwissenschaft so gewöhnt, dass wir die Welt nur noch in ihrem Lichte sehen und deshalb meinen, sie aus Erfahrung und Beobachtung gewonnen zu haben. "Uns entgeht die Waghalsigkeit Galileis, mit der er beschließt, die Mechanik als Zweig der Mathematik zu behandeln, also die wirkliche Welt der täglichen Erfahrung durch eine bloß vorgestellte Welt der Geometrie zu ersetzen" (Koyré 1998, S. 73), und Aussagen über die Natur gegen alle Empirie aus mathematischen Begriffen wie Zeit, Raum und Bewegung abzuleiten. Die hieraus entwickelte Naturauffassung, die uns so evident erscheint, wäre in der griechischen Antike und im Mittelalter als offenkundig falsch oder gar absurd eingestuft worden (vgl. Koyré 1998, S. 70 - 87).

Es kann heutzutage natürlich nicht darum gehen, zu "vormodernen" Auffassungen zurück zu kehren. Für das Verständnis der modernen Welt wichtig ist aber nicht nur die Kenntnis grundlegender naturwissenschaftlicher Ergebinisse (gar in Form unerschütterlicher "Tatsachen"), sondern ebenso die Kenntnis und Reflexion der Methoden, mit denen sie zu Stande kommen.

3 Infinitesimalrechnung und Differentialgleichungen

3.1 Das Gesetz der Veränderung als neuer mathematischer Gegenstand

Die neue Methode der Naturbetrachtung führt rasch auf mathematische Probleme, die mit den bis dahin zur Verfügung stehenden Begriffen und Methoden nicht zu lösen sind. An die Stelle geometrischer Objekte in bekannter Gestalt (Punkte, Geraden, Kreise, Kegelschnitte) treten beliebige Kurven, deren Form es zu bestimmen gilt. Isaac Newton (1642 - 1727) formuliert die beiden Grundaufgaben der Infinitesimalrechnung direkt in der Sprache der Mechanik (Peiffer / Dahan-Dalmedico, S. 236):

1. *Die Länge der durchlaufenen Strecke sei kontinuierlich angegeben. Man soll die Geschwindigkeit der Bewegung zu einem beliebigen aber festen Zeitpunkt bestimmen.*
2. *Die Geschwindigkeit der Bewegung sei kontinuierlich angegeben. Zu bestimmen ist die Länge der durchlaufenen Strecke zu einem beliebigen aber festen Zeitpunkt.*

Die bis in das 19. Jahrhundert hinein gehende Entwicklung und Präzisierung der Methoden und Begriffe (zu denen auch der der *Funktion* gehört) will ich hier nicht nachvollziehen, sondern vielmehr die Fragestellungen in moderner Darstellung erläutern.

Das erste Grundproblem lautet dann: Gegeben sei der Ort (die durchlaufene Strecke) $x(t)$ zu jedem Zeitpunkt t. Gesucht ist die Geschwindigkeit

$$v(t) = \dot{x}(t)$$

zu jedem Zeitpunkt t. Nach den üblichen physikalischen Konventionen bezeichne dabei

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

[5] In dieser Hinsicht steht Galilei und mit ihm die neuzeitliche Physik *Platon* näher als Aristoteles, vgl. Koyré 1998, 88 - 122).

die Ableitung nach der Zeit. Gesucht ist also die *Ableitungsfunktion* einer gegebenen (differenzierbaren) Funktion. Für die üblicher Weise betrachteten, sog. elementaren Funktionen (Polynome, trigonometrische Funktionen, Exponentialfunktion, Logarithmus und daraus zusammengesetzte Funktionen) ist dieses Problem bekanntlich durch den Differentialkalkül seit langer Zeit vollständig gelöst und lässt sich heute automatisch (durch Computeralgebra-Systeme wie *Mathematica* oder *Maple*) exakt bearbeiten.

Anders sieht es mit dem zweiten Grundproblem aus. Gegeben ist hier im einfachsten Fall die Geschwindigkeit $v(t)$ als Funktion der Zeit t. Gesucht ist die Länge der durchlaufenen Strecke zu jeden Zeitpunkt, also eine Funktion $x(t)$ des Ortes von der Zeit, für die

$$\dot{x}(t) = v(t) \ .$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist das nach Wahl eines beliebigen Zeitpunkts t_0 äquivalent zu

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)\ ds \ .$$

Zu bestimmen ist also das *Integral* der gegebenen Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$. Dieses existiert zwar für eine sehr viel größere Klasse von Funktionen als es die Ableitung tut (etwa für alle stetigen Funktionen), aber selbst für elementare Funktionen lässt es sich nur in Sonderfällen explizit angegeben (d. h. wiederum durch elementare Funktionen ausdrücken). Für physikalische Zwecke kommen daher *numerische Näherungsverfahren* ins Spiel, genauer gesagt Verfahren der *numerischen Integration*, wie z. B. die *Newton-Cotes-Formeln*, die das Integral durch endlich viele Auswertungen der zu integrierenden Funktion approximieren. Entsprechende Verfahren gehören heute zu jeder numerischen Standardsoftware, setzten aber den Möglichkeiten präziser physikalischer Berechnungen vor der Erfindung des Computers enge Kapazitätsgrenzen.

In allgemeinerer Form, wie sie in der Mechanik die Regel ist, lautet das zweite Grundproblem: Gegeben ist die Geschwindigkeit $v = v(t, x)$ als Funktion der Zeit t *und des Ortes* x. Gesucht ist eine Funktion $x(t)$ des Ortes von der Zeit, für die

$$\dot{x}(t) = v(t, x(t)) \ .$$

In dieser Form handelt es sich bei der zweiten Grundaufgabe der Infinitesimalrechnung um das Problem der Lösung oder *Integration* einer *Differentialgleichung*. Was schon für die Integration von Funktionen gesagt wurde, gilt auch hier: Erst im Computerzeitalter ist es möglich geworden, beliebige Differentialgleichungen beliebig genau numerisch zu lösen, was die exakte Lösung in Einzelfällen allerdings nicht ausschließt:

Newton legte in seinem Hauptwerk, den *Principia* (Newton 1687/1988) eine mathematisch-deduktive und vereinheitlichende Begründung der von Johannes Kepler (1571 - 1630) entdeckten Gesetzmäßigkeiten der Himmelsbewegungen und der wesentlich auf Galilei zurückgehenden sublunaren Physik vor[6] und machte damit aus der Mechanik ein naturwissenschaftliches und philosophisches Denkgebäude, das erst knapp 200 Jahre später zu bröckeln begann. Zugleich sind die *Principia* so etwas wie ein "erstes Lehrbuch der Differentialgleichungen", indem dort die Bewegung von Körpern auf abstrakte mathematische Weise, eben in Form von Differentialgleichungen abgehandelt werden. Der verwendete Formalismus und die Methoden sind allerdings noch ganz andere, als sie uns heute zur Verfügung stehen. Newton muss den sowohl in der Ableitung als

[6] In der aristotelischen Physik herrschten in den himmlischen Sphären noch ganz andere Gesetzmäßigkeiten als auf der Erde

auch im Integral steckenden Grenzwert für jedes einzelne Beispiel "neu erfinden", ohne ihn dabei auf den Begriff zu bringen. Umso bemerkenswerter sind die Erfolge der von ihm verwendeten Methoden, auf die hier nicht weiter eingegangen wird. Ich stelle im Folgenden einige Beispiele der klassischen Mechanik vor, verwende dabei aber den heute gebräuchlichen formalen Apparat. In den meisten Fällen handelt es sich dabei übrigens nicht um Differentialgleichungen für die Orts-, sondern um solche für die Geschwindigkeitsfunktion.

3.2 Gleichförmig beschleunigte Bewegung

Ist $v(t)$ die Geschwindigkeitsfunktion einer gleichförmig beschleunigten Bewegung, so darf bei gegebenem Zeitintervall der Länge $\Delta t > 0$ der Geschwindigkeitszuwachs $v(t+\Delta t) - v(t)$ nur von Δt abhängen:

$$v(t+\Delta t) - v(t) = f(\Delta t)$$

mit einer zunächst beliebigen reellen Funktion f. Die Existenz der gebildeten Grenzwerte vorausgesetzt, ist dann

$$\dot{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(\Delta t)}{\Delta t} =: b$$

mit einer reellen Zahl b, *der konstanten Beschleunigung*. Für einen beliebig gewählten Anfangszeitpunkt t_0 und zugehöriger Anfangsgeschwindigkeit $v(t_0) = v_0$ ergibt sich durch Integration

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} b \, ds = v_0 + b\,(t - t_0)\ .$$

Bezeichnet $x(t)$ den Ort der Bewegung zur Zeit t, so ist

$$\dot{x}(t) = v(t)\ ,$$

und daher liefert nochmalige Integration mit dem Anfangsort $x(t_0) = x_0$

$$x(t) = x_0 + v_0\,(t - t_0) + \frac{b}{2}\,(t - t_0)^2\ . \tag{3.1}$$

Mit der speziellen Wahl $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ und $v_0 = 0$ ergibt sich hieraus

$$x(t) = \frac{b}{2}\,t^2$$

das Fallgesetz entsprechend der Formulierung in Satz 2.2.

An diesem einfachsten Beispiel einer Differentialgleichung lässt sich hinsichtlich der adäquaten Problemstellung erkennen, was für Differentialgleichungen allgemein gilt: Um eine *eindeutige* Lösung zu erhalten, ist außer der Differentialgleichung ein *Anfangswert* vorzugeben, d. h. die in diesem Sinne adäquate Problemstellung für die gesuchte Funktion v hat die Form einer *Anfangswertaufgabe*

$$\dot{v} = b\ ,\ v(t_0) = v_0\ .$$

Das Problem der Bestimmung der gesuchten Ortfunktion x lässt sich auch als *Differentialgleichung 2. Ordnung* formulieren, in der die zweite Ableitung von x auftritt, der dann aber für die eindeutige Lösbarkeit zwei Anfangsbedingungen zugeordnet werden müssen:

$$\ddot{x} = b\ ,\ x(t_0) = x_0\ ,\ \dot{x}(t_0) = v_0\ .$$

Wie jede Differentialgleichung 2. Ordnung lässt sich auch diese als ein *System von Differentialgleichungen* 1. Ordnung in zwei unbekannten Funktionen (x und v) formulieren, was hier der ursprünglich gestellten Aufgabe eher entspricht:

$$\begin{aligned} \dot{x} = v \quad &, \quad x(t_0) = x_0 \\ \dot{v} = b \quad &, \quad v(t_0) = v_0 \end{aligned}$$

3.3 Im Verhältnis zur Geschwindigkeit gebremste Bewegung

Satz 3.1 (Newton 1687 / 1988, S. 123) *Die aufgrund des Widerstands verlorene Bewegung eines Körpers, dem im Verhältnis der Geschwindigkeit Widerstand geleistet wird, verhält sich wie die Wegstrecke, die er in seiner Bewegung zurückgelegt hat.*

Der kurze, bündige Beweis, den Newton hierfür gibt, lautet: *Denn weil die in einzelnen gleichen Zeitteilchen verlorene Bewegung wie die Geschwindigkeit ist, d. h. wie die Teilchen des zurückgelegten Weges, so wird, durch Aneinanderreihen, die in der ganzen Zeit verlorene Bewegung sein wie der ganze Weg. Q.e.d.*

Das "Aneinanderreihen der Zeitteilchen" entspricht im modernen Formalismus der Integration. Newtons Vorgehen besteht also darin, die zu Grunde liegende Differentialgleichung

$$\dot{v} = -\,c\,v \text{ (mit einer Konstanten } c > 0)$$

zu integrieren:

$$v(t) = v(t_0) - c \int_{t_0}^{t} v(s)\,ds = v(t_0) - c\,(x(t) - x(t_0))\ ,$$

woraus sich für die "verlorene Bewegung"

$$v(t_0) - v(t) = c\,(x(t) - x(t_0))$$

ergibt, was der Aussage des Satzes entspricht.

Satz 3.2 (Newton 1687/1988, S. 124) *Wenn einem Körper im Verhältnis der Geschwindigkeit Widerstand geleistet wird und derselbe sich allein aufgrund der eingepflanzten Kraft durch ein homogenes Medium bewegen soll, dabei aber gleiche Zeiten genommen werden sollen, so stehen die Geschwindigkeiten an den Anfängen der einzelnen Zeiten in geometrischer Progression, und die in den einzelnen Zeiten beschriebenen Wegstrecken verhalten sich wie die Geschwindigkeiten.*

Der von Newton gegebene Beweis ist nicht so kurz wie der von Satz 3.1, ich gehe daher sofort zur modernen Darstellung über:

Die gesuchte Geschwindigkeitsfunktion v genüge der Anfangswertaufgabe

$$\dot{v} = -\,c\,v\ ,\ v(0) = v_0 \tag{3.2}$$

mit einer positiven Konstanten c und einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 > 0$. Der Trick zur Lösung der Differentialgleichung besteht darin, alle Terme, in denen v vorkommt, auf die linke Seite zu bringen. Für alle Zeiten t, für die $v(t) > 0$, ist dann mit dem natürlichen Logarithmus log

$$\frac{d}{dt}\ \log v(t) = \frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = -\,c$$

und daher nach Integration

$$\log v(t) - \log v_0 = -\, c\, t \ .$$

Wendet man hierauf die (Newton noch nicht bekannte) Exponentialfunktion an, so ergibt sich die Lösung

$$v(t) = v_0 \, e^{-\, c\, t} \ . \tag{3.3}$$

In Kenntnis dieser Lösung von (3.2) ist deren Herleitung noch einfacher und allgemeiner (ohne die Voraussetzung $v(t) > 0$) zu haben: Für jede Lösung von (3.2) gilt nämlich

$$\frac{d}{dt}\left[e^{c\,t}\, v(t)\right] = e^{c\,t}\,[\dot{v}(t) + c\, v(t)] = 0 \ ,$$

woraus die Konstanz des Ausdrucks in eckigen Klammern auf der linken Seite folgt, der aber für $t = 0$ den Wert v_0 hat. Daraus ergibt sich die bereits gefundene Lösung (3.3) ohne jede Voraussetzung an das Vorzeichen von v_0 und $v(t)$.

Integriert man (3.3), so ergibt sich mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$

$$x(t) = \int_0^t v(s)\, ds = \frac{v_0}{c}\left(1 - e^{-\, c\, t}\right) \ . \tag{3.4}$$

Aufgabe 3.1 *Zeigen Sie, dass die Lösung (3.3), (3.4) die von Newton in Satz 3.2 angegebenen Eigenschaften hat.*

Aufgabe 3.2 *In einem Brief aus dem Jahre 1604 (zitiert in* Sengers *1998, S. 418) hat Galilei die Annahme vertreten, "daß der schwere Körper im natürlichen Fall beständig seine Geschwindigkeit vergrößert in dem Maße, wie die Entfernung von seinem Ausgangspunkt wächst". Danach wäre also die Geschwindigkeit nicht proportional zur Zeit, sondern proportional zum zurückgelegten Weg. Wie würde unter dieser Annahme der freie Fall aus der Ruhelage aussehen? Lässt sich, ohne präzise Messungen durchzuführen, begründen, warum Galilei diese Annahme wieder fallen gelassen und durch die der gleichförmig beschleunigtenen Bewegung entsprechend Definition 2.2 ersetzt hat?*

3.4 Beschleunigung gegen den Widerstand eines Mediums: Linearer Fall

Im Anschluss an Satz 3.2 betrachtet Newton (1687/1988, S. 125) die Bewegung eines Körpers, der einer gleichförmigen Schwere, also einer konstanten Beschleunigung unterliegt, dem aber zugleich durch das Medium, in dem er sich bewegt, Widerstand *im Verhältnis seiner Geschwindigkeit* geleistet wird. In moderner Form ist also für die Geschwindigkeit eine Differentialgleichung

$$\dot{v} = b - c\, v \tag{3.5}$$

mit positiven Konstanten b und c zu untersuchen. Eine *spezielle* Lösung von (3.5) ist die konstante Funktion

$$\bar{v}(t) = \frac{b}{c} \tag{3.6}$$

Aus ihr und der Kenntnis der Lösungen der zugehörigen *homogenen* Gleichung

$$\dot{v} = -\, c\, v \tag{3.7}$$

lassen sich aber sofort *alle* Lösungen von (3.5) bestimmen, und zwar auf Grund des folgenden, sofort nachzurechnenden Ergebnisses:

Satz 3.3 *v ist genau dann eine Lösung von (3.5), wenn $v - \bar{v}$ eine Lösung von (3.7) ist.*

Nun sind aber die Lösungen von (3.7) alle Funktionen $a\ e^{-\,c\,t}$ mit einer reellen Zahl a. Alle Lösungen von (3.5) sind daher von der Form

$$v(t) = \frac{b}{c} + a\ e^{-\,c\,t} \text{ mit } a \in \mathbb{R}\ .$$

Für die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\dot{v} = b - c\ v\ ,\ v(0) = v_0 \tag{3.8}$$

muss

$$v_0 = v(0) = \frac{b}{c} + a$$

und daher

$$a = v_0 - \frac{b}{c}$$

sein, woraus sich als eindeutige Lösung von (3.8)

$$v(t) = \frac{b}{c} + (v_0 - \frac{b}{c})\ e^{-\,c\,t} = \frac{b}{c}\ \left(1 - e^{-\,c\,t}\right) + v_0\ e^{-\,c\,t} \tag{3.9}$$

ergibt. Wegen $e^{-\,c\,t} \to 0$ gilt $v(t) \to \frac{b}{c}$ für $t \to \infty$, langfristig wird die Bewegung gleichförmig.

3.5 Beschleunigung gegen den Widerstand eines Mediums: Quadratischer Fall

Im letzten Beispiel wurde angenommen, dass der vom Medium gegen die Bewegung geleistete Widerstand der Geschwindigkeit proportional sei. Zu dieser Voraussetzung bemerkt Newton (1687/1988, S. 134):

> *Übrigens ist die Hypothese, daß der Widerstand der Körper sich wie die Geschwindigkeit verhalte, eher eine mathematische als eine natürliche. In Medien, die frei von aller Starrheit (Zähigkeit) sind, stehen die Widerstände der Körper im quadratischen Verhältnis der Geschwindigkeiten. Denn durch die Einwirkung eines schnelleren Körpers wird derselben Menge des Mediums in kürzerer Zeit eine größere Bewegung proportional zur größeren Geschwindigkeit mitgeteilt; und daher wird in gleicher Zeit, wegen der größeren Menge des aufgestörten Mediums, eine im quadratischen Verhältnis größere Bewegung mitgeteilt.*

Die Argumentation beruht darauf, dass die "Menge des aufgestörten Mediums", der die Geschwindigkeit v je Zeiteinheit "mitgeteilt" wird, wiederum zu v proportional ist. Betrachtet wird daher ein Bewegungsgesetz der Form

$$\dot{v} = b - c\ v^2\ ,\ v(0) = v_0$$

mit positiven Konstanten b und c und einer beliebigen Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \geq 0$. Mit

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{b}{c}}$$

lässt es sich in die Form

$$\dot{v} = c\,(\bar{v}^2 - v^2)\ ,\ v(0) = v_0 \tag{3.10}$$

bringen. Ist $v_0 = \bar{v}$, so ist offenbar die konstante Funktion $v = \bar{v}$ Lösung von (3.10). Ist dagegen $v_0 \neq \bar{v}$, so besteht der Trick zur Lösung der Differentialgleichung wiederum darin, alle Terme, in denen v auftritt, auf die linke Seite zu bringen. Für $v(t) \neq \bar{v}$ ist

$$\frac{\dot{v}}{2\,\bar{v}}\ \left(\frac{1}{\bar{v}+v} + \frac{1}{\bar{v}-v}\right) = \frac{\dot{v}}{\bar{v}^2 - v^2} = c\ .$$

Die linke Seite wurde hier (durch Partialbruchzerlegung) in eine Form gebracht, für die sich leicht eine Stammfunktion angeben lässt:

$$\frac{d}{dt}\ (\log|\bar{v}+v(t)| - \log|\bar{v}-v(t)|) = \dot{v}(t)\ \left(\frac{1}{\bar{v}+v(t)} + \frac{1}{\bar{v}-v(t)}\right) = 2\,c\,\bar{v}\ .$$

Unter Berücksichtigung der Rechenregeln für Logarithmus und Exponentialfunktion folgt daraus

$$\frac{\bar{v}-v(t)}{\bar{v}+v(t)} = A\ e^{-\,2\,c\,\bar{v}\,t}$$

mit einer Konstanten A, die sich wegen der Anfangsbedingung zu

$$A = \frac{\bar{v}-v_0}{\bar{v}+v_0}$$

ergibt. Umstellen nach $v(t)$ und anschließendes Einsetzen von A liefert als Lösung von (3.10)

$$v(t) = \frac{\bar{v}+v_0-(\bar{v}-v_0)\ e^{-\,2\,c\,\bar{v}\,t}}{\bar{v}+v_0+(\bar{v}-v_0)\ e^{-\,2\,c\,\bar{v}\,t}}\ \bar{v} = \frac{\bar{v}\ \sinh(c\,\bar{v}\,t) + v_0\ \cosh(c\,\bar{v}\,t)}{\bar{v}\ \cosh(c\,\bar{v}\,t) + v_0\ \sinh(c\,\bar{v}\,t)}\ \bar{v}\ . \tag{3.11}$$

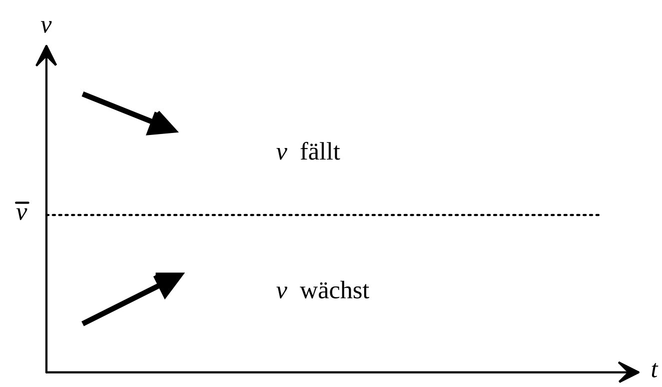
Auch hier gilt $v(t) \to \bar{v}$ für $t \to \infty$, die Bewegung wird gleichförmig.

3.6 Beschleunigung gegen den Widerstand eines Mediums: Allgemeiner Fall

Auch wenn nicht klar ist, ob der der Bewegung eines Körpers vom Medium geleistete Widerstand linear, quadratisch oder sonstwie von der Geschwindigkeit abhängt, so erscheint es vielleicht plausibel, dass er sich durch eine stetige, streng monoton über alle Grenzen wachsende Funktion $f(v)$ der Geschwindigkeit darstellen lässt, für die zudem $f(0) = 0$. Ist b die konstante Beschleunigung, so existiert wegen der Eigenschaften von f eine eindeutig bestimmte positive Geschwindigkeit $\bar{v}$ mit $f(\bar{v}) = b$, was zu dem Bewegungsgesetz

$$\dot{v} = f(\bar{v}) - f(v)\ ,\ v(0) = v_0 \text{ mit einem } v_0 \geq 0 \tag{3.12}$$

führt.



Auch wenn sich hier, mit einer nicht näher spezifizierten Funktion f, die Lösungen nicht explizit angeben lassen, so ist es doch möglich, ihr Verhalten qualitativ zu bestimmen. Wegen

$$\frac{d}{dt}\,(v(t)-\bar{v})^2 = 2\,(v(t)-\bar{v})\,\dot{v}(t) = 2\,(v(t)-\bar{v})\,(f(\bar{v})-f(v(t))) \leq 0$$

nähert sich jede Lösung $v(t)$ mit wachsendem t dem Wert $\bar{v}$ auf monotone Weise von oben oder unten. Daher existiert $\lim_{t\to\infty}\ v(t) = v_1$, und wegen der Monotonie von v ist dann $\lim_{t\to\infty}\ \dot{v}(t) = 0$. Der selbe Grenzübergang liefert dann in der Differentialgleichung (3.12)

$$0 = \lim_{t\to\infty}\ \dot{v}(t) = f(\bar{v}) - \lim_{t\to\infty}\ f(v(t)) = f(\bar{v}) - f(v_1)\ ,$$

woraus wegen der strengen Monotonie von f folgt, dass $v_1 = \bar{v}$. Es gilt somit

Satz 3.4 *Sei v Lösung von (3.12). Ist $v_0 = \bar{v}$, so ist*

$$v(t) = \bar{v} \text{ für alle } t \geq 0\ .$$

Ist $v_0 < \bar{v}$, so ist

$$v \text{ monoton wachsend, } v(t) \leq v_0 \text{ für alle } t \geq 0, \text{ und } \lim_{t\to\infty}\ v(t) = \bar{v}\ .$$

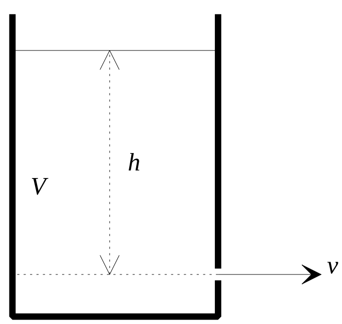
Ist $v_0 > \bar{v}$, so ist

$$v \text{ monoton fallend, } v(t) \geq v_0 \text{ für alle } t \geq 0, \text{ und } \lim_{t\to\infty}\ v(t) = \bar{v}\ .$$

In jedem Fall gilt also auch hier: $v(t) \to \bar{v}$ für $t \to \infty$, die Bewegung wird gleichförmig.

3.7 Galileis Zeitmessungen

Wie oben zitiert, berichtet Galilei, dass er bei seinen Experimenten die Zeit gemessen habe, indem er Wasser aus einem kleinen Loch in einem Eimer auffing und anschließend genau wog. Die Frage ist, ob die gewogene Wassermenge tatsächlich proportional zur verflossenen Zeit ist.



In einem zylindrischen Gefäß mit der Grundfläche a befinde sich unten ein kleines Loch mit dem Querschnitt b. Im Gefäß befinde sich Wasser, welches im Laufe der Zeit aus dem Loch austritt. Sei $h = h(t)$ die Höhe des Wasserspiegels über dem Loch zum Zeitpunkt t. Torricelli, ein Schüler Galileis, fand im Jahre 1643 heraus, dass die Geschwindigkeit, mit der das Wasser aus dem Loch tritt, ebenso groß sein muss wie die Geschwindigkeit, die ein Gegenstand erreicht, der aus der Ruhelage um die Höhe h frei herunterfällt, also

$$v = \sqrt{2\,g\,h}$$

mit der Erdbeschleunigung g. Nun ist aber $b\ v$ gerade das Wasservolumen, welches pro Zeiteinheit den Eimer durch das Loch verlässt. Für das gesamte, oberhalb des Loches befindliche Wasservolumen

$$V = a\ h$$

gilt daher

$$a\ \dot{h} = \dot{V} = -\ b\ v = -\ b\ \sqrt{2\ g\ h}\ .$$

Ist $h_0 > 0$ die Höhe des Wasserspiegels zum Beginn des Experiments (Zeitpunkt 0), so genügt also h der Anfangswertaufgabe

$$\dot{h} = -\ c\ \sqrt{v}\ ,\ h(0) = h_0\ ,\ \text{wobei}\ c = \frac{b}{a}\ \sqrt{2\ g} \tag{3.13}$$

Der Trick zur Lösung dieser Differentialgleichung besteht wieder darin, alle h enthaltenden Terme auf die linke Seite zu bringen und eine Stammfunktion für den dort entstehenden Ausdruck zu finden: Solange $h(t) > 0$, gilt

$$\frac{d}{dt}\ (2\ \sqrt{h(t)}) = \frac{\dot{h}(t)}{\sqrt{h(t)}} = -\ c\ ,$$

woraus

$$\sqrt{h_0} - \sqrt{h(t)} = \frac{c}{2}\ t$$

folgt. Lösung dieser Gleichung nach $h(t)$ liefert

$$h(t) = (\sqrt{h_0} - \frac{c}{2}\ t)^2\ .$$

Diese Herleitung stand unter der Voraussetzung $h(t) > 0$, was offenbar der Fall ist, solange

$$t < \frac{2}{c}\ \sqrt{h_0} =: \bar{t}\ .$$

Dagegen ist für die gefundene Lösung $h(\bar{t}) = 0$, d. h. zum Zeitpunkt $\bar{t}$ ist das Gefäß leer (jedenfalls oberhalb des Loches) und muss es dann aus physikalischen Gründen auch zukünftig bleiben. Als Lösung von (3.13) ergibt sich daher

$$h(t) = \begin{cases} (\sqrt{h_0} - \frac{c}{2}\ t)^2 & \text{für} \quad t < \frac{2}{c}\ \sqrt{h_0} \\ 0 & \text{für} \quad t \geq \frac{2}{c}\ \sqrt{h_0} \end{cases}\ . \tag{3.14}$$

Die im Zeitintervall $[0, t]$ mit $t < \bar{t}$ ausgelaufene Wassermenge ist nun aber proportional zu

$$h_0 - h(t) = c\ \sqrt{h_0}\ t - \frac{c^2}{4}\ t^2$$

und daher *nicht* proportional zu t. Für kleine Zeiten t fällt allerdings die in t quadratische Abweichung von der Proportionalität nicht ins Gewicht.

4 Die mathematisch-naturwissenschaftliche Methode

Obwohl Newton komplexere und damit "realistischere" Situationen untersucht als Galilei, wie etwa die Bewegung eines Körpers in einem Widerstand leistenden Medium, ist sein Vorgehen ebenfalls nichtempirisch, einen Bezug auf Beobachtungsdaten gibt es in den *Principia* nicht. Selbst seine Begründung dafür, dass der geleistete Widerstand von der Geschwindigkeit nicht linear, sondern quadratisch abhängt, ist rein theoretischer Natur. Der Ausgangspunkt aller Betrachtungen besteht in *mathematischen Fiktionen*, die durch die Erfahrung bestätigt werden können oder auch nicht, wobei letzteres sie keineswegs entwerte, wie bereits Galilei in einem Brief von 1637 betont (zitiert nach Cassirer 1910, S. 386):

> *Zeigt die Erfahrung nunmehr, daß solche Eigenschaften, wie wir sie abgeleitet, im freien Fall der Naturkörper ihre Bestätigung finden, so können wir ohne Gefahr des Irrtums behaupten, daß die konkrete Fallbewegung mit derjenigen, die wir definiert und vorausgesetzt haben, identisch ist: ist dies nicht der Fall, so verlieren doch unsere Beweise, da sie einzig und allein für unsere Voraussetzung gelten wollten, nichts von ihrer Kraft und Schlüssigkeit.*

In der modernen Terminologie des 20. Jahrhunderts mit der Mathematik als einem inzwischen eigenständig gewordenen Fach heißt das, dass die Korrektheit mathematischer Beweise nicht von der Empirie abhängt, was heute als Selbstverständlichkeit gilt. Auf die Idee, so an die Erkenntnis der Natur heranzugehen, muss man aber erst einmal kommen, sie ist alles andere als selbstverständlich.

4.1 Grundannahmen und Vorgehen

Insbesondere Galileis präzise Beschreibung seines Vorgehens macht es möglich, die Methode systematisch zu bestimmen, die sich in seiner Zeit herausgebildet hat und für die mathematische Naturwissenschaft immer noch grundlegend ist. Bei kritischer Betrachtung wird deutlich, dass diese Methode auf einer Reihe sich gegenseitig stützender Grundannahmen beruht, die sich ihrerseits nicht empirisch begründen lassen, sondern vielmehr umgekehrt aller naturwissenschaftlichen Erkenntnis vorausgehen:

Die mathematische Naturwissenschaft beruht auf der Grundannahme, dass es *universell gültige, d.h. von Ort und Zeit unabhängige Naturgesetze* gebe. Diese Annahme lässt sich durch einfache Beobachtung nicht belegen, die Wirklichkeit erscheint eher ungeordnet und unregelmäßig. Die aristotelische Wissenschaft meinte, dass die himmlischen Sphären ganz anderen Gesetzen folgen als die sublunare, sofern sie denn überhaupt von "Gesetzen" in unserem Sinne gesprochen hat, denn die Vorstellung universeller Naturgesetze setzt einen objektiven Begriff der *linearen und beliebig teilbaren Zeit* und einen Begriff des *Raumes als homogen* und nicht etwa in Sphären aufgeteilt voraus.

Die nächste Annahme lautet, dass sich die *Naturgesetze mathematisch beschreiben* lassen. Sie liegt dem für die Naturwissenschaften zentralen Begriff der *Messung zugrunde*. Denn die Idee, den Naturgesetzen auf dem Wege der Messung nachspüren zu können, wäre ansonsten ziemlich sinnlos.

Die ungeordnete und vielfältige Wirklichkeit lässt sich nicht messen. Daher wird denn auch anders vorgegangen, wie aus allen Schriften etwa Galileis und Newtons deutlich wird. Am Beginn steht eine mathematische Fiktion, ein *Gedankenexperiment*, also die Formulierung von *Idealbedingungen* (was wäre, wenn ...), aus denen auf mathematischem Wege Schlussfolgerungen gezogen werden können. Sowohl die Idealbedingungen als auch die mathematischen Schlussfolgerungen gehen dann in die experimentelle Überprüfung ein, erstere als *Randbedingungen*, die im Experiment genauestens zu beachten sind, letztere als Hinweise darauf, *was* eigentlich zu messen sei.

Erst auf der Basis derartiger Überlegungen kann ein *Experiment* stattfinden. Gute Experimentatoren müssen in der Lage sein, Versuchsanordnungen zu ersinnen, die den unterstellten Idealbedingungen möglichst nahe kommen und die die gewünschten Messungen ermöglichen, ohne dass der Messvorgang (der körperliche Einsatz des Experimentators) den idealen Ablauf stört. Das ist bekanntlich eine Wissenschaft für sich und erfordert, besonders in der Physik des 20. Jahrhunderts, einen ungeheuren technischen Apparat. Als Kriterium für ein gelungenes Experiment gilt seine *Wiederholbarkeit*: Wann immer dieselben Bedingungen hergestellt werden, muss sich derselbe Effekt einstellen, müssen die Messungen zum selben Ergebnis führen.

Die Tatsache, dass wirkliche Experimente bei Wiederholung nie zu exakt dem selben Ergebnis führen, noch nicht einmal im Rahmen der Messgenauigkeit, gilt nicht als Gegenargument. Die experimentelle Methode beruht nämlich auf der Vorstellung, die zu beobachtenden Erscheinungen seien eine überlagerung von mathematisch formulierbaren Naturgesetzen und so genannten *Störfaktoren*, das sind gewissermaßen Naturgesetze, die wir noch nicht im Griff haben. Experimente sind Handlungen, aktive Eingriffe in die Natur mit dem Ziel, Situationen künstlich zu schaffen, in denen Störfaktoren ausgeschaltet sind.[7]

Wird das eher regellos erscheinende Naturgeschehen durch die Brille der mathematisch-naturwissenschaftlichen Methode gesehen, so stellt es sich dar als ein Zusammenwirken verschiedener Naturgesetze. Um ein einzelnes von ihnen erkennen zu können, müssen die anderen ausgeschaltet, *in ihrer Wirkung konstant gehalten* werden. In diesem analytischen Vorgehen, der Zerlegung in Einzelfaktoren, liegt die Verbindung der Naturwissenschaften zur Technik: In dem Maße, wie es gelingt, Einzelfaktoren zu isolieren, lassen sie sich nach Belieben wieder neu zusammensetzen und zu technischen Systemen synthetisieren.

4.2 Revolution der Denkart

Was die hier beschriebene Methode produziert, wird üblicherweise als "objektive Erkenntnis" bezeichnet, als etwas, das unabhängig von allen subjektiven Vorstellungen richtig ist. Objektive Erkenntnis mache danach gerade den Unterschied zwischen gesichertem "Wissen" und bloßem "Glauben" aus. Nun ist aber das Einzige im Erkenntnisprozess, das sich nicht nur in den Köpfen der erkennenden Subjekte abspielt, sondern mit dem erkannten Objekt selbst zu tun hat, die Empirie. Und deshalb ist dieser auch im modernen Alltagsbewusstsein fest verankerte Begriff der objektiven Erkenntnis eng verbunden mit einer der Hauptströmungen der westlichen Philosophie, dem Empirismus, als dessen Begründer David Hume (1711 - 1776) gilt. Nun hat allerdings Hume selber bereits nachgewiesen, dass eine empiristische Begründung objektiver Erkenntnis unmöglich ist, da sich aus Erfahrung keine Naturgesetze zwingend ableiten lassen (Hume 1748/1993, S. 37/38):

> *Denn alle Ableitung aus Erfahrung setzt als ihre Grundlage voraus, daß die Zukunft der Vergangenheit ähnlich sein wird, und daß gleichartige Kräfte mit gleichartigen*

[7] Die von den Naturwissenschaften selbst unterstellte Allgegenwart von Störfaktoren macht übrigens den Gedanken des modernen Empirismus, es ginge um die "Falsifikation wissenschaftlicher Hypothesen durch Experimente" (Popper), mehr als fragwürdig. Das Fallgesetz etwa läßt sich nicht falsifizieren. Ein Experiment, dessen Messungen im Widerspruch zu diesem Gesetz stünden, würde entweder nicht ernstgenommen oder aber Anlass geben, nach unbekannten Störfaktoren zu suchen.

> *sinnlichen Eigenschaften zusammenhängen werden. Schöpfte man irgendwie Verdacht, daß der Naturlauf sich ändern könne und daß in der Vergangenheit nicht die Regel für die Zukunft enthalten sei, so wäre jede Erfahrung nutzlos und könnte zu keinem Ableiten oder Schließen Veranlassung geben. Daher ist es unmöglich, daß irgendwelche Erfahrungsbegründungen diese Ähnlichkeit der Vergangenheit mit der Zukunft belegen können, denn all diese Begründungen beruhen ja auf der Voraussetzung dieser Ähnlichkeit.*

Hier tut sich ein logischer Zirkel auf: Einerseits *sollen* Naturgesetze aus der Erfahrung abgeleitet werden, andererseits ist ihre Existenz vorauszusetzen, will man von vergangenen Erfahrungen auf zukünftige schließen. Der ehrliche Empirist muss angesichts dieses Widerspruchs zum Skeptiker werden, will er sich nicht selbst in die Tasche lügen (Hume 1748, S 163):

> *Mir scheint, daß die einzigen Gegenstände der abstrakten Wissenschaften oder der Demonstration Größe und Zahl sind, und daß alle Versuche, diese vollkommeneren Wissensarten über diese Grenzen hinaus zu erstrecken, nur Blendwerk und Täuschung bedeuten.*

Das hindert allerdings noch den modernen Empirismus nicht daran, es immer wieder zu versuchen und auf einer empiristischen Begründung aller naturwissenschaftlichen Erkenntnis zu beharren, womit deren Spezifika gerade verfehlt werden. Die historisch gesehen jüngste Erkenntnisform, die sich nur auf die unmittelbare Erfahrung bezog, wenn es denn je eine solche gab, dürfte die Naturlehre des Aristoteles gewesen sein, wie sie vom Mittelalter adaptiert wurde. Letztlich verteidigt also der Empirismus Aristoteles gegen Galilei, behauptet aber das Gegenteil.

Immanuel Kant (1724 - 1804), selbst zehn Jahre lang naturwissenschaftlich tätig und nach eigenen Worten von Hume "aus seinem dogmatischen Schlummer geweckt", argumentiert komplementär: Da objektive Erkenntnis offenbar möglich (zu Zeiten Hume und Kants eine Tatsache) ist, die Bedingungen ihrer Möglichkeit sich aber nicht aus der Erfahrung ableiten lassen, müssen sie a priori vorhanden, also aller Erfahrung vorgelagert sein. In der Vorrede zur 2. Auflage seiner *Kritik der reinen Vernunft* fasst er die mathematisch-naturwissenschaftliche Methode zusammen (Kant 1781/1787/1990, S. 17):

> *Als* Galilei *seine Kugeln die schiefe Fläche mit einer von ihm selbst gewählten Schwere herabrollen, oder* Torricelli *die Luft ein Gewicht, was er sich zum voraus dem einer ihm bekannten Wassersäule gleich gedacht hatte, tragen ließ, oder in noch späterer Zeit* Stahl *Metalle in Kalk und diesen wieder um in Metall verwandelte, indem er ihnen etwas entzog und wiedergab; so ging allen Naturforschern ein Licht auf. Sie begriffen, daß die Vernunft nur das einsieht, was sie selbst nach ihrem Entwurfe hervorbringt, daß sie mit Prinzipien ihrer Urteile nach beständigen Sätzen vorangehen und die Natur nötigen müsse auf ihre Fragen zu antworten, nicht aber sich von ihr allein gleichsam am Leitbande gängeln lassen müsse; denn sonst hängen zufällige, nach keinem vorher entworfenen Plane gemachte Beobachtungen gar nicht in einem notwendigen Gesetze zusammen, welches doch die Vernunft sucht und bedarf. Die Vernunft muß mit ihren Prinzipien, nach denen allein übereinkommende Erscheinungen für Gesetze gelten können, in einer Hand, und mit dem Experiment, das sie nach jenen ausdachte, in der anderen, an die Natur gehen, zwar um von ihr belehrt zu werden, aber nicht in der Qualität eines Schülers, der sich alles vorsagen läßt, was der Lehrer will, sondern eines bestallten Richters, der die Zeugen nötigt, auf die*

> *Fragen zu antworten, die er ihnen vorlegt. Und so hat sogar Physik die so vorteilhafte Revolution ihrer Denkart lediglich dem Einfalle zu verdanken, demjenigen, was die Vernunft selbst in die Natur hineinlegt, gemäß, dasjenige in ihr zu suchen (nicht ihr anzudichten), was sie von dieser lernen muß, und wovon sie für sich selbst nichts wissen würde. Hierdurch ist die Naturwissenschaft allererst in den sicheren Gang einer Wissenschaft gebracht worden, da sie so viel Jahrhunderte durch nichts weiter als ein bloßes Herumtappen gewesen war.*

Es ist demnach die "Vernunft", die nach Gesetzen sucht und ihrer bedarf, deren Existenz daher angenommen werden muss, um überhaupt "in den sicheren Gang einer Wissenschaft" zu gelangen. Über die jeweils spezifische Gestalt eines Naturgesetzes ist damit noch nichts gesagt, hierzu ist die Natur zu befragen, wobei auch Kant die Rolle des nach den Prinzipien der Vernunft, also theoriegeleiteten Experiments betont, wogegen "zufällige, nach keinem vorher entworfenen Plane gemachte Beobachtungen" den angestrebten Zweck nicht erfüllen können.

4.3 Gesellschaftsform und Erkenntnisform

Kant ist der erste Philosoph des Deutschen Idealismus', doch hier, in seiner Lösung des Problems, an dem Hume zum Skeptiker wurde, wie nämlich objektive Erkenntnis möglich ist, liegt sein Idealismus nicht. Es handelt sich schlicht um eine Analyse (Kritik) des tatsächlichen Vorgehens der Naturwissenschaft seiner und noch der heutigen Zeit, daran ist nichts idealistisch. Das ist zumindest eine mögliche Lesart.

Eine andere ergibt sich, wenn man die Analyse normativ wendet und daraus eine Vorschrift zu machen versucht, wie die Vernunft nach ihren Prinzipien vorzugehen habe, um zu gesicherter Erkenntnis zu kommen. Kant äußert sich nicht explizit in dieser Richtung, doch schlägt zumindest in seiner Wortwahl das Denken der Aufklärung durch, das "die Vernunft" für eine allgemein-menschliche Eigenschaft oder Fähigkeit hält, diese aber gleichwohl ausschließlich für sich selbst reklamiert und sie anderen oder früheren Kulturen abspricht. Die mathematisch-naturwissenschaftliche Methode musste sich gegen das mittelalterliche Denken erst durchsetzen, und die Rede von der "Revolution der Denkart" trifft somit die Sache. Festzuhalten ist aber auch, dass diese Revolution einer Vernunft zum Durchbruch verhalf, die der bürgerlichen Epoche spezifisch ist, gegen die Vernunft des Mittelalters, die ganz anders, aber deswegen nicht schlechthin unvernünftig war.

Mit Kant als Kronzeugen, doch möglicherweise gegen seine Intention muss daher dem Begriff der "objektiven Erkenntnis" eine andere Bedeutung zugewiesen werden als die in unserem Sprachgebrauch übliche einer ahistorischen, von der Gesellschaftsform unabhängigen und für alle Menschen gleichermaßen gültigen. Greiff 1976, dessen Argumentation ich hier folge, spricht daher von der "objektiven Erkenntnisform" . Ein Vertreter einer anderen oder früheren Kultur, der die Grundannahmen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Methode, die Prinzipien der bürgerlichen Vernunft nicht anerkennt, würde auch von der Wahrheit naturwissenschaftlicher Erkenntnis nicht zu überzeugen sein. Der einzige Bestandteil der Naturwissenschaft, den man ihm glaubhaft vorführen könnte, ist das Experiment: Wenn ich diese bis ins kleinste Detail festgelegte (dem anderen vermutlich rituell bis skurril anmutende) Handlung A ausführe, so stellt sich regelmäßig der Effekt B ein. Aber daraus folgt nichts weiter, solange mein Gegenüber meine Grundannahme der universellen Naturgesetze, die im Experiment angeblich zum Ausdruck kommen, nicht teilt, sondern das Naturgeschehen für willkürlich und regellos hält.

Der handfeste Erfolg der mathematisch-naturwissenschaftlichen Methode ist nicht zu bestreiten, er ist etwa in Form der technischen Systeme zu besichtigen; das sind Systeme, in denen künstlich Bedingungen geschaffen werden, wie sie für Experimente typisch sind, Störfaktoren also weitgehend ausgeschaltet werden (wenn nicht, versagen sie regelhaft). Aber aus dem Erfolg bestimmter Handlungen folgt nicht zwingend die (gar Gesellschaftsformen übergreifende) "Wahrheit" der dahinter liegenden Vorstellungen. Erfolgreich ist beispielsweise auch die chinesische Kunst der Akupunktur, wie viele erfahren haben, denen die westliche Medizin nicht weiterhelfen konnte. Daraus auf die Wahrheit der dahinter stehenden Vorstellungen zu schließen, würde dennoch keinem modernen Menschen einfallen, der den naturwissenschaftlichen Erkenntnissen über den menschlichen Körper traut.

Gegen die hier postulierte Abhängigkeit der Erkenntnis, auch der naturwissenschaftlichen, von der Gesellschaftsform wird zuweilen eingewandt, man möge doch einfach von einem Turm springen, dann würde man die Gültigkeit des Fall- oder Gravitationsgesetzes schon zu spüren bekommen,[8] und zwar unabhängig von der Gesellschaft, aus der man stammt. Dieses Totschlagargument im wahrsten Sinne des Wortes geht aber an der Sache, nämlich der spezisch mathematisch-naturwissenschaftlichen Erkenntnisform, vorbei: Die Vorstellung, ein solcher Versuch sei doch lieber zu vermeiden, weil man dabei zu Schaden komme, dürfte in jeder Gesellschaft, die Türme kennt, einigermaßen verbreitet sein. Der spezifisch mathematisch-naturwissenschaftliche Gedanke dagegen, der eigene Körper würde dabei der Lösung einer Differentialgleichung vom Typ (3.10) folgen, ist es nicht.

Ein Charakteristikum der exakten Naturwissenschaften ist, dass sie historisch nur in einer einzigen, nämlich der bürgerlichen Gesellschaft aufgetreten ist, von der sie als eine gesellschaftliche Leistung hervorgebracht wurde.[9] Nicht zuletzt wegen des mit den Naturwissenschaften verbundenen ökonomischen und militärischen Potentials hat sich diese Gesellschaftsform inzwischen global ausgebreitet und ist zur einzigen geworden. Insoweit bekommt die falsche Auffassung, ihre spezifische Erkenntnismethode sei universell gültig, nachträglich Recht. Dennoch ist sie nicht nur falsch, sondern auch gefährlich, weil sie blind macht und Entwicklungspotentiale verbaut:

- Als die einzige Methode, die angeblich sicheres Wissen verschafft, erfreut sich die Mathematisierung heute hoher Wertschätzung weit über ihren ursprünglichen Geltungsbereich hinaus. "Weiche" Wissenschaften glauben, schon dadurch "hart" zu werden, dass sie sich der Mathematik bedienen, ohne doch die anderen, in der Mechanik vorliegenden Bedingungen erfüllen zu können, wie etwa die Möglichkeit zu Experimenten. Damit soll nicht generell gegen die Verwendung mathematischer Methoden polemisiert werden, doch ist in jedem Fall zu prüfen, was sich damit erreichen lässt, und das ist etwa in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften allemal weniger als in der Physik.

- Auch für die Naturwissenschaften ist es eigentlich banal: Die mathematisch-naturwissenschaftliche Methode kann nur solche Phänome erfassen, die sich mathematisieren *lassen*, und das dürften aufs Ganze gesehen nur wenige sein. Das Problem ist, dass dafür das Bewusstsein verloren geht, wenn eine absolut gesetzte Methode den Blick verengt: Ihre Überschätzung führt zu dem Umkehrschluss, ein Problem, das sich mit ihr nicht angehen lässt, sei gar keines, jedenfalls kein öffentlich zu erörterndes, sondern allenfalls im privaten Bereich der "Geschmäcker und Meinungen" angesiedeltes. Diese Haltung ist in den Naturwissenschaften, aber auch in den mathematisch sich "härtenden" Sozialwissenschaften

[8] So etwa der Physiker Alan D. Sokal in einer Polemik gegen die *cultural studies*, lingua franca, Mai/Juni 1996

[9] Die naheliegende Frage nach dem *inneren Zusammenhang* zwischen bürgerlicher Gesellschaft und mathematischer Naturwissenschaft wird hier nicht weiter verfolgt. Vgl. dazu Ortlieb 1999 und die dort verarbeitete Literatur.

jedenfalls weit verbreitet.

- Und schließlich: Wenn es denn eine Revolution der Denkart war, der die exakten Naturwissenschaften ihre Entstehung verdanken, warum soll es die letzte Revolution dieser Art gewesen sein? Dass das "Ende der Geschichte" der Gesellschafts- und damit auch der Erkenntisformen bereits erreicht sei, ist angesichts der globalen, durch naturwissenschaftliches Denken allein nicht einmal ansatzweise anzugehenden Probleme[10] doch zumindest eine eher trübe Vorstellung.

4.4 Exkurs: Die Erfindung der abstrakten Zeit

Der für Galilei und Newton zentrale Begriff der *Bewegung* bedeutet Wechsel des Ortes im Wechsel der Zeit, allgemeiner bedeutet *Dynamik* den Wechsel eines Zustands im Wechsel der Zeit. Die Art und Weise, wie die neuzeitliche Naturwissenschaft Bewegung und Dynamik zu erfassen versucht, nämlich mathematisch mit den Instrumenten der Infinitesimalrechnung und der Differentialgleichungen, operiert mit den *reellen Zahlen als Modell für die Zeit*. Sie entsprechen der Newton'schen Redeweise von der "absoluten, wahren und mathematischen Zeit, die gleichmäßig fließt, ohne von etwas anderem beeinflusst zu werden".

Für Kant gehört der Zeitbegriff zu den Kategorien a priori, also den Mustern unseres Denkens, die wir nicht aus Erfahrung gewinnen, sondern die aller Erfahrung vorgelagert und im Übrigen notwendig sind, um überhaupt strukturierte Erfahrungen machen zu können. Richtig daran ist sicher, dass die der Zeit unterstellten Eigenschaften (reelle Zahlen) sich nicht durch Messungen erheben lassen, sondern umgekehrt allen Messungen vorausgesetzt sind. Trotzdem bleibt die Frage, wie die Zeitvorstellung in unsere Köpfe kommt. Man darf Kant, der diese Frage nicht behandelt, wohl unterstellen, dass er sie für angeboren hielt. Das macht ihn zu einem idealistischen Philosophen.

Gegen die These, die Zeitvorstellung sei angeboren, spricht allerdings, dass verschiedene Gesellschaften ganz unterschiedliche Zeitvorstellungen hervorgebracht haben, es sich also nicht um etwas allgemein Menschliches handeln kann. Bei der Betrachtung von in der Geschichte aufgetretenen Zeitvorstellungen unterscheidet POSTONE (1996, S. 200 - 216), dessen Darstellung ich hier folge, zwischen der Zeit als abhängiger oder unabhängiger Variablen und stellt fest, dass das Konzept der Zeit als einer unabhängigen Variablen sich ausschließlich im neuzeitlichen Westeuropa entwickelt hat, dass es sich hier also um ein historisches und gesellschaftliches Spezifikum handelt.

In älteren und außereuropäischen Gesellschaften war die Vorstellung von der Zeit nicht abstrakt, sondern immer an bestimmte Ereignisse gebunden, an natürliche und menschliche Zyklen (Tage, Jahre, Lebensalter bishin zum Wechsel von Dynastien) und die Dauer bestimmter Tätigkeiten und Pflichten wie etwa der Zeit, die es dauert, Reis zu kochen oder ein Vaterunser zu beten. Insofern ist es sinnvoll, hier von "konkreter" Zeit zu sprechen. Eine vom antiken Ägypten aus sich weit verbreitende Art der Zeitvorstellung beruhte darauf, Tag und Nacht in eine bestimmte Anzahl von Segmenten aufzuteilen, die damit natürlich variabel, nämlich von der Jahreszeit abhängig waren. Auch in Westeuropa war diese Zeitvorstellung bis zum 14. Jahrhundert dominant. Die einzelnen "Stunden" waren mit bestimmten Tätigkeiten verbunden, und ihre Variabilität passte durchaus zum ländlichen Leben: Im Sommer ist bei Tage einfach mehr zu tun als im Winter.

[10]vgl. PIETSCHMANN 1995

Das moderne Leben sieht bekanntlich anders aus, es wird von der Uhr beherrscht. Wer hätte nicht schon über die "Tyrannei der Zeit" geklagt, die sichtbar und unerbittlich fortschreitet, unabhängig von menschlichen Bedürfnissen. Und in der Tat steht die Entwicklung der modernen Zeitvorstellung in einem engen Zusammenhang mit der Erfindung der *mechanischen Uhr* in Westeuropa Ende des 13. Jahrhunderts und ihrer Verbesserung durch Christaan Huygens (1629 - 1695) in Gestalt der Pendeluhr im Jahre 1656. Die Frage ist allerdings, ob diese Erfindung die *Ursache* für die Veränderung der Zeitvorstellung ist oder ob nicht umgekehrt erst eine veränderte Zeitvorstellung die Erfindung begünstigte.

Lange vor der mechanischen Uhr, bereits in der Antike, waren nämlich präzise *Wasseruhren* bekannt und weit verbreitet. Weil aber der zu Grunde liegende Mechanismus (fließendes Wasser) aus einem nahezu gleichförmigen Prozess bestand, wurden kunstvolle Mechanismen ersonnen, um variable "Stunden" anzeigen zu können. Die Technik selbst hätte ein einheitliches Zeitmaß nahe gelegt, das wurde aber nicht als angemessen empfunden, weil es zur herrschenden Zeitvorstellung nicht passte.

Das alte China war dem Westen technisch in vieler Hinsicht weit voraus, bekannt sind Papier und Schießpulver, die der Westen dann übernahm, beim Schießpulver mit ganz anderen gesellschaftlichen Konsequenzen, als diese Erfindung in China hatte. China kannte zwei Zeitsysteme, eines mit variablen "Stunden" und ein babylonisches, das den vollen Tag in zwölf gleiche "Doppelstunden" aufteilte, die den Tierkreiszeichen zugeordnet waren. Um 1090 herum wurde für den Kaiser von China ein gigantischer, wassergetriebener Uhrturm gebaut, der die konstanten Doppelstunden (und Anteile von ihnen) anzeigte. Der raffinierte Mechanismus wurde aber ausschließlich dazu benutzt, die Bewegung der Himmelskörper anzuzeigen und zu untersuchen, irgend einen weiter gehenden gesellschaftlichen Effekt hatte er nicht, das chinesische Landleben orientierte sich an variablen "Stunden". Auch das Maß der konstanten Doppelstunden hat mit der modernen, gleichförmigen Zeitvorstellung nichts zu tun. Ihre Zuordnung zu den verschiedenen Tierkreiszeichen "individualisiert" sie nämlich, sie sind nicht austauschbar.

Selbst der Import der europäischen Uhr durch den jesuitischen Missionar Matteo Ricci Ende des 16. Jahrhunderts und die spätere weite Verbreitung mechanischer Uhren unter den Mitgliedern des Kaiserhofs und anderen hochgestellten Personen bewirkte in keiner Weise, dass Leben und Arbeit in China nach den von ihnen angezeigten konstanten Zeiteinheiten organisiert wurden. Die Uhren wurden anscheinend ausschließlich als nette Spielzeuge angesehen.

In Japan wurden mechanische Uhren ebenfalls im 16. Jahrhundert aus Europa eingeführt. Die Japaner modifizierten sie, indem sie bewegliche Zeichen an den Uhren anbrachten, damit diese ihre variablen "Stunden" anzeigen konnten. Erst im letzten Drittel des 19. Jahrhunderts wurden in Japan konstante Stunden eingeführt. Diese Maßnahme war aber Bestandteil einer bewussten ökonomischen, gesellschaftlichen und wissenschaftlichen Anpassung an den Westen.

Offenbar gibt es keinen Automatismus dahingehend, dass eine Erfindung wie die mechanische Uhr zu einer Veränderung der Zeitvorstellung im Sinne der abstrakten, mathematischen Zeit führt. Es muss also etwas hinzu kommen, das diese Zeitvorstellung sinnvoll macht.

In den tuchproduzierenden Städten Westeuropas verbreiteten sich im 14. Jahrhundert sehr schnell so genannte "Arbeitsglocken", die an städtischen, nicht kirchlichen Gebäuden angebracht wurden und eine andere Zeit schlugen als die Kirchenglocken, und zwar Beginn und Ende des Arbeitstages sowie Arbeitpausen in den Tuchindustrien. Diese Industrien produzierten in erster Linie nicht für lokale Märkte, sondern für den Export, und sie beruhten auf Lohnarbeit. Der damit zu erzielende Profit hängt von der Produktivität der Arbeit und den zu zahlenden Löhnen ab. Anders als im bäuerlichen Leben, wo einfach bestimmte Dinge zu erledigen sind, unabhängig von der Zeit, die sie in Anspruch nehmen, tritt hier erstmals ein Zwang zur Quantifizierung der

Arbeit auf. Auch in der Tuchindustrie war der Arbeitstag zunächst "natürlich" durch den Lauf der Sonne bestimmt. Das änderte sich, als im Zuge der ökonomischen Krise um 1300 die Tucharbeiter auf eine Verlängerung ihres Arbeitstages drangen, um weiterhin von ihren Löhnen leben zu können. Damit wurde die Arbeitszeit von der "natürlichen Zeit" entkoppelt und musste aus der Sicht der Unternehmer auf andere Art kontrolliert werden. Im 14. Jahrhundert gab es dann auch erste Arbeitskämpfe um die Länge des Arbeitstages. Damit hat sich aber das Verhältnis von Zeit und Arbeit verkehrt: Während füher eine bestimmte Tätigkeit das Maß für die dafür benötigte "konkrete" Zeit war, ist jetzt die Zeit das Maß für die zu leistende Arbeit, die Zeit wird von einer abhängigen zu einer unabhängigen Variablen.

Die Zeit als absolutes und objektives Maß (und mit ihr die Uhr, die sie misst) wird dann gesellschaftlich notwendig, wenn die Arbeit zu einem Mittel wird, um im Tausch Güter zu erwerben, die andere produziert haben. Zeit wird zum Wertmaß der Waren, zum einen um Waren verschiedener Art vergleichbar zu machen und tauschen zu können, zum anderen um Produktivitätsmaßstäbe festzulegen: Wer zur Herstellung eines Produkts länger braucht als ein anderer für das gleiche Produkt, erzielt für die eingesetzte Arbeitszeit nicht den vollen Wert. Der Wert einer Ware ist nur die zu ihrer Herstellung *gesellschaftlich notwendige* Arbeitszeit.

Als objektives Maß kommt nur die abstrakte, mathematische Zeit in Frage, nicht die "konkrete", an bestimmte Ereignisse gebundene Zeit. Mit den Anfängen des Kapitalismus und der auf ihm beruhenden bürgerlichen Gesellschaft setzt sich daher auch die moderne Zeitvorstellung durch und macht die neuzeitliche Naturwissenschaft möglich. Die zur unabhängigen Variablen gewordene, gesellschaftlich nicht mehr kontrollierte Zeit aber wird ein Instrument subjektloser Herrschaft ("Tyrannei der Zeit"). Leistung, so eine in diesem Zusammenhang nicht ganz zufällig angeführte physikalische Definition, ist bekanntlich Energieaufwand pro Zeit.

5 Die Trennung von Mathematik und Physik

Einer auf Galilei zurückgehenden Metapher zufolge ist Mathematik "die Sprache, in der das Buch der Natur geschrieben" sei, und Newtons Hauptwerk enthält bereits im Titel eine ähnliche Aussage. Damit wird der Mathematik eine gewisse Eigenständigkeit zwar nicht abgesprochen, schließlich lassen sich in ein und derselben Sprache verschiedene Bücher schreiben, so etwa die Hauptbücher in den Kontoren. Die *Neuentwicklung* mathematischer Begriffe und Konzepte in der Geometrie und insbesondere der Analysis, bei Rechenverfahren und in der Datenanalyse geht jedoch Hand in Hand mit den damit zu lösenden Problemen der neuen Naturwissenschaft. Bis ins 19. Jahrhundert hinein bilden Mathematik und Physik eine Einheit. In dieser Sicht sind mathematische Sätze einfach wahre Aussagen über die Natur, und seien sie auch großenteils nur hypothetischer Art, wenn sich die Voraussetzungen im Experiment nicht so ohne weiteres herstellen lassen.

Im Laufe des 19. Jahrhunderts zerfällt diese Einheit, weil in verschiedener Hinsicht Mehrdeutigkeiten auftreten. Zum einen entwickeln sich konsistente mathematische Theorien, die miteinander nicht vereinbar sind und daher nicht alle zugleich wahre Aussagen über die Natur enthalten können. Zum anderen zeigt sich, dass es verschiedene, zu einander konkurrierende mathematische Theorien zur Erklärung derselben Naturvorgänge geben kann, wodurch erst deutlich wird, dass die mathematische Erklärung nicht der Natur entspringt, sondern auch anderen Gesichtspunkten, wie etwa dem der Zweckmäßigkeit folgt. Am Ende der davon ausgelösten Entwicklung steht die Ablösung der Mathematik von der Physik, ein radikal anderer mathematischer Wahrheitsbegriff und der Begriff des mathematischen Modells in seiner modernen

Gestalt.

5.1 Nichteuklidische Geometrie

Die um 325 vor unserer Zeitrechnung entstandenen *Elemente* des Euklid sind das erfolgreichste Buch der Mathematikgeschichte, das mehr als zweitausend Jahre lang als Grundlage aller mathematischen Studien gedient hat. Ausgehend von wenigen Axiomen (evidenten Wahrheiten) wird darin die bis dahin bekannte Mathematik systematisch zusammengefasst und hergeleitet. Für die neuzeitliche Naturwissenschaft ist die klassische euklidische Geometrie von Anfang an die adäquate Beschreibung des physikalischen Vorstellung des Raumes. Für Kant zählt sie, ebenso wie der Begriff der Zeit, zu den Prinzipien der Vernunft, die nicht aus der Empirie gewonnen werden, sondern umgekehrt deren systematische Wahrnehmung erst ermöglichen (Kant 1781/1787/1990, S. 67):

> *Der Raum ist eine notwendige Vorstellung a priori, die allen äußeren Anschauungen zum Grunde liegt. Man kann sich niemals eine Vorstellung davon machen, daß kein Raum sei, ob man sich gleich ganz wohl denken kann, daß keine Gegenstände darin angetroffen werden. Er wird also als die Bedingung der Möglichkeit der Erscheinungen, und nicht als eine von ihnen abhängende Bestimmung angesehen, und ist eine Vorstellung a priori, die notwendigerweise äußeren Erscheinungen zum Grunde liegt.*

Geometrische Sätze sind demgemäß "synthetische Urteile a priori", wahre Aussagen über die Natur, die sich gleichwohl unter Absehung von aller Empirie entdecken lassen, und die Geometrie ist die Wissenschaft von dem einen, einzigen Raum, der ohne Alternative ist. Zu Beginn des 19. Jahrhunderts kommen daran Zweifel auf, aufgeworfen durch die Lösung eines alten, den *Elementen* immanenten Problems: Die ersten fünf der euklidischen Axiome lauten (Davis/Hersh 1985, S. 224).

1. *Zwischen zwei beliebigen Punkten kann eine Strecke gezogen werden.*

2. *Jede Strecke kann unbegrenzt gerade verlängert werden.*

3. *Ein Kreis kann mit jedem vorgegebenen Punkt als Mittelpunkt und jedem vorgegebenen Radius gezogen werden.*

4. *Alle rechten Winkel sind gleich.*

5. *Wenn zwei Geraden, die in einer Ebene liegen, sich mit einer anderen Geraden schneiden und wenn die Summe der Innenwinkel auf der einen Seite weniger als diejenige von zwei rechten Winkeln ausmacht, dann werden sich die Geraden schneiden, wenn sie auf der Seite, auf der die Winkelsumme weniger ist als zwei rechte Winkel, ausreichend verlängert werden.*

Während die ersten vier Axiome einfach und evident erscheinen, ist es das fünfte offenbar nicht. Es ist viel komplizierter zu formulieren, und auch wenn man sich durch eine Zeichnung seiner Gültigkeit versichern kann, so ist diese doch der selben Qualität wie die vieler geometrischer Sätze, die Euklid erst beweist. Die Frage liegt daher nahe, ob dieses Axiom sich nicht vielleicht aus den anderen herleiten lasse. Es wird als *Parallelenaxiom* bezeichnet, obwohl das Wort "parallel" darin nicht vorkommt, und von Euklid in der Tat erst später eingeführt wird:

> Parallele Geraden *sind Geraden, die in derselben Ebene liegen, unbeschänkt in beide Richtungen weitergeführt werden und sich weder in der einen noch in der anderen Richtung schneiden.*

Mit dieser Definition ist das fünfte Axiom (unter Voraussetzung der ersten vier) zur folgenden Aussage äquivalent:

6. *In einer Ebene seien eine Gerade g und ein Punkt P nicht auf g gegeben. Dann gibt es genau eine Gerade durch P, die zu g parallel ist.*

was heute die gebräuchlichste Formulierung des Parallelenaxioms ist.

Bis Ende des 18. Jahrhunderts bemühten sich Mathematiker, dieses Axiom aus den ersten vier zu beweisen, es gelangen aber immer nur neue äquivalente Formulierungen, etwa (Legendre): *Die Winkelsumme im Dreieck beträgt zwei rechte Winkel.* Ebenso wenig führten Versuche eines indirekten Beweises zum Erfolg, die Annahme der Gültigkeit der ersten vier Axiome und der Ungültigkeit des fünften zu einem Widerspruch zu bringen.

Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) ist wohl der erste, dem es gelingt, unter der Annahme der ersten vier Axiome und der Ersetzung des fünften durch ein anderes, nämlich

7. *Zu einer Geraden g und einem nicht auf ihr liegenden Punkt P gibt es unendlich viele Geraden durch P, die g nicht schneiden.*

eine neue Geometrie zu konstruieren, die er *nichteuklidisch* nennt. Gauß selber hat in Erwartung mangelnder Akzeptanz seine Überlegungen nie veröffentlicht. Sie werden allerdings in einem Briefwechsel erwähnt (s. MEHRTENS 1990, S. 46). Auch den unabhängig von Gauß und voneinander veröffentlichten Arbeiten von Janos Bolyai (1802 - 1860) und Nikolai Iwanowitsch Lobatschewskij (1793 - 1856) bleibt zunächst wenig Resonanz beschieden. In der auf Gauß/Bolyai/Lobatschwskij zurückgehenden, heute als *hyperbolisch* bezeichneten Geometrie ist *die Winkelsumme im Dreieck stets kleiner als zwei rechte Winkel.*

Gauß scheint sich des Spaltes, der sich hier zwischen Mathematik und Physik aufzutun beginnt, bewusst zu sein. Zumindest die Zurechnung geometrischer Konzepte zum Kant'schen Apriori ist ihm fraglich geworden, wenn er schreibt (zitiert nach MEHRTENS 1990, S. 46)

> *Wir müssen in Demuth zugeben, dass, wenn die Zahl bloss unseres Geistes Product ist, der Raum auch ausser unserem Geiste eine Realität hat, der wir a priori unsere Gesetze nicht vollständig vorschreiben können.* [11]

Geodät, der er auch ist, versucht Gauß empirisch festzustellen, welche Geometrie der Realität am besten angepasst ist, indem er die Winkelsumme im Dreieck ausmisst, das von drei Berggipfeln im Harz gebildet wird. Das Ergebnis übertrifft die zwei rechten Winkel um weniger als 15 Bogenminuten und bleibt damit im Rahmen der Messgenauigkeit auf dem Boden der euklidischen Geometrie.

Bernhard Riemann (1826 - 1866) schließlich stellt in seinem berühmten Habilitationsvortrag von 1854 (veröffentlicht 1868) *über die Hypothesen, welcher der Geometrie zu Grunde liegen* eine Geometrie vor, die *elliptische*, in der das fünfte euklidische Axiom ersetzt ist durch

[11] Das Aufkommen der nichteuklidischen Geometrie gilt in interessierten philosophischen Kreisen zuweilen als Widerlegung von Kant. Richtig ist das allenfalls in Bezug auf die Zurechnung bestimmter geometrischer Ideen zu den Vorstellungen a priori. Es ändert aber nichts daran, dass derartige Vorstellungen die mathematische Naturwissenschaft erst konstituieren, sondern zeigt nur, dass ihre Inhalte geschichtlichen Veränderungen unterworfen sind.

8. *Zu einer Geraden g und einem nicht auf ihr liegenden Punkt P gibt es keine zu g parallele Gerade durch P, m.a.W. alle Geraden durch P schneiden g.*

In dieser Geometrie ist die *Winkelsumme im Dreieck größer als zwei rechte Winkel.* Auch Riemann ist sich der Tragweite des Problems für das Verhältnis von Mathematik und Erfahrung bewusst, wenn er schreibt (zitiert nach PEIFFER / DAHAN-DALMEDICO 1994, S. 163

> *Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Größe aus allgemeinen Größenbegriffen zu konstruieren. Es wird daraus hervorgehen, daß eine mehrfach ausgedehnte Größe verschiedener Maßverhältnisse fähig ist und der Raum also nur einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit bildet. Hiervon aber ist eine notwendige Folge, daß sich die Sätze der Geometrie nicht aus allgemeinen Größenbegriffen ableiten lassen, sondern daß diejenigen Eigenschaften, durch welche sich der Raum von anderen denkbaren dreifach ausgedehnten Größen unterscheidet, nur aus der Erfahrung entnommen werden können.*

Erst jetzt dringt die Ungeheuerlichkeit ins gemeinsame mathematische Bewußtsein, die in der Existenz konkurrierender mathematischer Theorien besteht, stellt doch diese Tatsache den Begriff der mathematischen Wahrheit in Frage:

> *Niemand kann zwei Herren dienen. Man kann nicht der Wahrheit dienen und der Unwahrheit. Wenn die euklidische Geometrie wahr ist, so ist die nichteuklidische Geometrie falsch, und wenn die nichteuklidische wahr ist, so ist die euklidische Geometrie falsch.*

Gottlob Frage (1848 - 1925) hält hier noch einmal die traditionelle Position hoch (zitiert nach MEHRTENS 1990, S. 117), bereits in Reaktion auf die sich abzeichnende Relativierung des mathematischen Wahrheitsbegriffs. Freges Position hätte aber zur notwendigen Folge, wie Riemann und bereits Gauß bemerkt haben, die Erfahrung zum Schiedsrichter über die Richtigkeit mathematischer Aussagen zu machen, was nach allgemeiner Auffassung die Stringenz der mathematischen Argumentation doch stark beeinträchtigen würde.

5.2 Axiomatische Methode und Angewandte Mathematik

In seinem berühmten, die Mathematik des 20. Jahrhunderts prägenden Vortrag *Mathematische Probleme*, gehalten auf dem zweiten internationalen Mathematikerkongress, bringt David Hilbert (1862 -1943) die sich abzeichnende radikale Abkehr von der traditionellen Auffassung auf den Punkt (vgl. MEHRTENS 1990 S. 108 ff). Ein Jahr zuvor hat er in seinen *Grundlagen der Geometrie* bereits am Beispiel vorgemacht, was als Programm für die gesamte Mathematik gedacht ist (HILBERT 1899/1968, S. 2):

> *Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir* Punkte *und bezeichnen sie mit $A, B, C, \ldots$; die Dinge des zweiten Systems nennnen wir* Geraden *und bezeichnen sie mit $a, b, c, \ldots$; die Dinge des dritten Systems nennen wir* Ebenen *und bezeichnen sie mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; .... Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie "liegen", "zwischen", "kongruent"; die genaue und für mathematische vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die* Axiome der Geometrie.

Die hier verwendeten Worte sind zunächst leere Hülsen ohne jede Bedeutung, die tatsächliche Wortwahl ist nur ein (allerdings nicht ganz unwichtiges) Zugeständnis an die mathematische Konvention. So etwas wie Bedeutung erhalten die Worte erst durch die dann folgenden Axiome (z. B.: *Zu zwei Punkten A, B gibt es stets genau eine Gerade a, die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört*. Die Axiome sind nicht wie bei Euklid evidente Wahrheiten, können es gar nicht sein, weil die in ihnen vorkommenden Worte keine eigenständigen Sinn haben. Es handelt sich vielmehr um *Setzungen*, die die verwendeten Worte erst in gewisser Weise definieren. Mathematische Sätze sind dann nicht mehr an sich wahr oder falsch, sondern immer nur aus einem klar definierten Axiomensystem ableitbar oder nicht. Aufgabe der Mathematik ist es, ableitbare Sätze abzuleiten und für nicht ableitbare die Unlösbarkeit des Ableitungsproblems nachzuweisen (wie etwa beim Parallelenaxiom in Bezug auf die ersten vier euklidischen Axiome geschen). Im Jahre 1900 jedenfalls zeigt sich Hilbert von der Lösbarkeit (in diesem Sinne) aller mathematischen Probleme überzeugt (s. MEHRTENS 1990, S.110).

In diesem Programm haben sowohl die euklidische Geometrie als auch die nichteuklidischen ihren Platz in der Mathematik, sie widersprechen sich nicht einmal mehr, sondern beruhen einfach auf verschiedenen Axiomensystemen. Insofern herrscht grenzenlose Freiheit, allerdings mit einer kleinen Einschränkung: Jedes der untersuchten Axiomensysteme muss widerspruchsfrei sein, es darf aus ihm nicht eine Aussage und ihr logisches Gegenteil zugleich ableitbar sein, da andernfalls (nach einem Satz der Aussagenlogik) alle überhaupt formulierbaren Sätze auch ableitbar wären. Das Problem der Widerspruchsfreiheit führt ebenso wie das der Entscheidbarkeit (ist ein bestimmter mathematischer Satz aus einem Axiomensystem ableitbar oder nicht?) in die Abgründe der mathematischen Logik, in die ich mich hier nicht begeben möchte, weil es mir im vorliegende Kontext eher um die Beziehungen zwischen der Mathematik und anderen Wissenschaften geht. Die allerdings sind für die moderne Mathematik, die dem Hilbert'schen Programm folgt, ausgesprochen schillernd:

Auf der einen Seite konstituiert Hilbert die Mathematik als eigenständiges Fach, welches sich nicht über seine Inhalte, sondern ausschließlich über die *Form* definiert, in die diese zu bringen seien. Auch für die weitere Entwicklung betont Hilbert diese Eigenständigkeit (HILBERT, *Probleme*, zitiert nach MEHRTENS 1990, S. 119):

> *Bei der Weiterentwicklung einer mathematischen Disziplin wird sich jedoch der menschliche Geist, ermutigt durch das Gelingen der Lösungen, seiner Selbständigkeit bewußt; er schafft aus sich selbst heraus oft ohne erkennbare äußere Anregung, allein durch logisches Kombinieren, durch Verallgemeinern, Spezialisieren, durch Trennen und Sammeln der Begriffe in glücklichster Weise neue und fruchtbare Probleme und tritt selbst als der eigentliche Frager in den Vordergrund ... und so entstehen überhaupt fast alle feineren Fragen der modernen Zahlen- und Funktionentheorie.*

Auf der anderen Seite erweitert das Absehen von allen konkreten Inhalten und die damit verbundene Loslösung der Mathematik von der Physik die Anwendungsfelder. Und die Orientierung an ihnen erweist sich mehr als je zuvor als erforderlich, soll Mathematik eine Wissenschaft bleiben und nicht zu einem reinen Glasperlenspiel verkommen. Die Widerspruchsfreiheit allein gibt kein hinreichendes Kriterium für eine Antwort auf die Frage, welche der unabsehbar vielen möglichen Axiomensysteme es zu behandeln lohnt und welche nicht. Hier müssen Aspekte hinzutreten, die (zumindest im Rahmen des Hilbert'schen Programms) außermathematischer Art sind. So nennt Hilbert selbst beispielsweise in der Einleitung seiner *Grundlagen der Geometrie* als deren Aufgabe die *logische Analyse unserer räumlichen Anschauung*, und ohne diesen Hintergrund wären seine darauf folgenden Abhandlungen zwar logisch und mathematisch korrekt, doch völlig substanzlos.

Was schließlich die Möglichkeiten der Angewandten Mathematik, den Umfang und die Anzahl ihrer Betätigungsfelder angeht, so gehen hier die Ansichten auseinander. Hilbert vertritt in dieser Frage, wie es wohl oft in der Anfangseuphorie einer neuen Entwicklung passiert, einen durchaus imperialistischen Standpunkt, wenn er im Jahre 1918 bemerkt (zitiert nach Mehrtens 1990, S. 132)

> *Ich glaube: Alles was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zu Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit unmittelbar der Mathematik. ... In dem Zeichen der axiomatischen Methode erscheint die Mathematik berufen zu einer führenden Rolle in der Wissenschaft.*

und vier Jahre später (zitiert nach Mehrtens 1990, S. 132)

> *Ich bemerkte einmal, dass die Frage, was angewandte Mathematik sei, mit der Gegenfrage beantwortet werden könnte: Was ist nicht angewandte Mathematik? Indertat, was wir auch für Begebenheiten oder Erscheinungen in der Natur oder im praktischen leben antreffen, überall wird der mathematische Gesinnte und Eingestellte einen mathematischen Kern finden.*

Der erste Satz impliziert, dass hier alles, was nicht mathematisierbar ist, als nicht wissenschaftlich oder zumindest noch nicht reif zur Bildung einer Theorie deklariert wird. Nun ist der Gedanke keineswegs neu, dass alle Dinge, die überhaupt menschlicher Erkenntnis zugänglich sind, sich durch mathematische Ableitungen erfassen ließen. Er geht bereits auf René Descartes (1596 - 1650) zurück. Ihn ausgerechnet im Zusammenhang mit der axiomatischen Methode wieder aufzuwärmen, ist zumindest ziemlich vorwitzig angesichts des gerade durch die von Hilbert vollendete Entwicklung sich erstmals im vollen Ernst stellenden Problems der Beziehungen zwischen Mathematik und Realität. Die Frage, ob der angeblich überall zu findende "mathematische Kern" einen Sachverhalt angemessen beschreibt, wird hier nämlich einfach übergangen.

Gerade diese Kernfrage aber nach dem Zusammenhang zwischen der nunmehr abgekoppelten Mathematik und allen anderen Wissensgebieten, nach den Bedingungen der Möglichkeit, informelle Inhalte mathematisch zu formalisieren, ist selbst nicht mathematisierbar. Denn jeder entsprechende Versuch müsste einen nicht formalisierten Gegenstand zunächst einer Operation gerade der Art unterziehen, die zu problematisieren ist.[12]

5.3 Der Modellbegriff

Heinrich Hertz (1857 - 1894) ist dem breiteren Publikum vor allem durch seine experimentellen Studien zu Radio- oder allgemeiner elektromagnetischen Wellen bekannt, weniger durch seine Untersuchungen, die die gesamte theoretische Physik seiner Zeit betreffen. In den letzten drei Jahren seines Lebens konzentriert er sich auf die begriffliche Überarbeitung der Grundlagen der klassischen Mechanik. Die ein halbes Jahr nach seinem Tod erschienene Schrift *Die Prinzipien der Mechanik, in neuem Zusammenhange dargestellt* ist der Versuch einer "Mechanik ohne

[12] Die mathematische Logik etwa zeigt in einem etwas anderen, aber ähnlich gelagerten Bereich die Vergeblichkeit eines solchen Bemühens: Als inhaltliche mathematische Theorie ist sie durchaus von Interesse, als eine "Metatheorie" mathematischen Denkens, die sie angeblich auch sein soll, aber taugt sie nicht, weil die Frage der *Interpretation*, also der Beziehung zwischen ihren formalen Zeichenketten und "konkreten" mathematischen Objekten (wie etwa den natürlichen Zahlen) sich nicht wiederum als formale Zeichenkette darstellen lässt.

Kraftbegriff", genauer gesagt, einer Mechanik, in der die Kraft kein Grundbegriff, sondern aus anderen Begriffen abgeleitet ist, nämlich der Bewegung verborgener Massen des Äthers. Die Ätherhypothese ist von der modernen Physik kurz darauf verworfen worden, dagegen gibt es ähnliche Erkärungsmuster für die Bewegungen von Körpern in der allgemeinen Relativitätstheorie (durch Gravitationsfelder gekrümmter Raum).

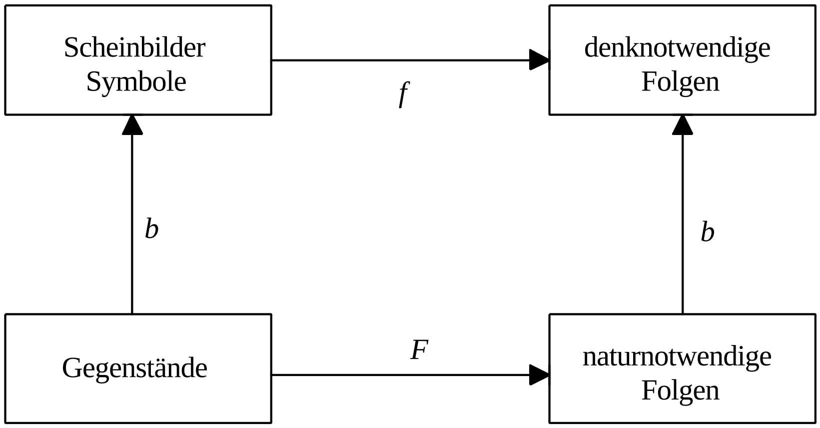
Berühmt geworden ist vor allem die Einleitung zu dieser Abhandlung, in der Hertz sich ein Instrumentarium schaftt, seinen eigenen Aufbau der Mechanik und die beiden bis dahin bekannten[13] hinsichtlich der Vor- und Nachteile gegeneinander abzuwägen. Er verwendet offenbar als Erster das Wort "Modell", das allerdings nur einmal auftritt und im alltagssprachlich-technischen Sinne als Metapher benutzt wird. Dabei wird der *Begriff* des Modells im modernen Sinne aber herausgearbeitet, auch wenn andere Worte ("Bilder", "Scheinbilder", "Symbole") verwendet werden, mit denen er die Arbeitsweise der "bewußten Naturerkenntnis" charakterisiert (Hertz 1894/1996, S.67, Hervorhebung C.P.O.):

> *Es ist die nächste und in gewissem Sinne wichtigste Aufgabe unserer bewußten Naturerkenntnis, daß sie uns befähige, zukünftige Erfahrungen vorauszusehen, um nach dieser Voraussicht unser gegenwärtiges Handeln einrichten zu können. Als Grundlage für die Lösung jener Aufgabe der Erkenntnis benutzen wir unter allen Umständen vorangegangene Erfahrungen, gewonnen durch zufällige Beobachtungen oder durch absichtlichen Versuch. Das Verfahren aber, dessen wir uns zur Ableitung des Zukünftigen aus dem Vergangenen und damit zur Erlangung der erstrebten Voraussicht stets bedienen, ist dieses:* Wir machen uns innere Scheinbilder oder Symbole der äußeren Gegenstände, und zwar machen wir sie von solcher Art, daß die denknotwendigen Folgen der Bilder stets wieder die Bilder seien von den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände. *Damit diese Forderung überhaupt erfüllbar sei, müssen gewisse Übereinstimmungen vorhanden sein zwischen der Natur und unserem Geiste. Die Erfahrung lehrt uns, daß die Forderung erfüllbar ist und daß also solche Übereinstimmungen in der Tat bestehen. Ist es uns einmal geglückt, aus der angesammelten bisherigen Erfahrung Bilder von der verlangten Beschaffenheit abzuleiten, so können wir an ihnen, wie an Modellen, in kurzer Zeit die Folgen entwickeln, welche in der äußeren Welt erst in längerer Zeit oder als Folgen unseres eigenen Eingreifens auftreten werden; wir vermögen so den Tatsachen vorauszueilen und können nach der gewonnenen Einsicht unsere gegenwärtigen Entschlüsse richten. Die Bilder, von welchen wir reden, sind unsere Vorstellungen von den Dingen; sie haben mit den Dingen die eine wesentliche übereinstimmung, welche in der Erfüllung der genannten Forderung liegt, aber es ist für ihren Zweck nicht nötig, daß sie irgend eine weitere übereinstimmung mit den Dingen haben. In der Tat wissen wir auch nicht, und haben auch kein Mittel zu erfahren, ob unsere Vorstellungen von den Dingen mit jenen in irgend etwas anderem übereinstimmen, als allein in eben jener* einen *fundamentalen Beziehung*

Hertz' Sprachgebrauch markiert erkenntnistheoretisch eine Distanz zu Galilei oder Newton, die ähnlich groß sein dürfte wie die zwischen der modernen, axiomatischen Mathematik und der klassischen mit ihrem absoluten Wahrheitsbegriff. Und auch hier liegt der Grund in den mit

[13]Neben dem Newton'schen Zugang mit *Kraft* als Grundbegriff ist das der im Laufe des 19. Jahrhunderts aufkommende und auf Variationsprinzipien beruhende, in dem *Energie* als Grundbegriff an die Stelle der Kraft tritt. Hertz versucht in seinem Zugang, mit den (allen drei Zugängen gemeinsamen) drei Grundbegriffen *Zeit*, *Raum* und *Masse* auszukommen.

der neuzeitlichen Wiissenschaft inzwischen gemachten Erfahrungen: Wenn die "Modelle" oder "inneren Scheinbilder" von "der Natur" auseinander zu fallen beginnen, dann lassen sie sich nicht mehr als naturgegeben denken, sondern nur noch als von uns selbst hervorgebracht, als ein spezifisches Instrument, mit spezifischen Möglichkeiten und Grenzen.



Die von den "inneren Scheinbildern" zu erfüllende Bedingung erinnert an ein kommutierendes Diagramm, wie es in der modernen Algebra gebräuchlich ist.[14] Zu erfüllen ist die Forderung

$$f \circ b = b \circ F \; .$$

Gegenstand der Naturerkenntnis ist die (unbekannte) Abbildung F, wogegen f sich aus prinzipiell zugänglichen Operationen der Mathematik und Logik zusammensetzt. Die eigentliche Modellbildung besteht in der Wahl der Abbildung b. Für die geeignete Wahl nennt Hertz drei Kriterien: *Zulässigkeit*, *Richtigkeit* und *Zweckmäßigkeit* (Hertz 1894 / 1996, S. 67):

> *Eindeutig sind die Bilder, welche wir uns von den Dingen machen wollen, noch nicht bestimmt durch die Forderung, daß die Folgen der Bilder wieder die Bilder der Folgen seien. Verschiedene Bilder derselben Gegenstände sind möglich und diese Bilder können sich nach verschiedenen Richtungen unterscheiden. Als unzulässig sollten wir von vornherein solche Bilder bezeichnen, welche schon einen Widerspruch gegen die Gesetze unseres Denkens in sich tragen, und wir fordern also zunächst, daß alle Bilder logisch zulässige oder kurz zulässige seien. Unrichtig nennen wir zulässige Bilder dann, wenn ihre wesentlichen Beziehungen den Beziehungen der äußeren Dinge widersprechen, das heißt wenn sie jener ersten Grundforderung nicht genügen. Wir verlangen demnach zweitens, daß unsere Bilder richtig seien. Aber zwei zulässige und richtige Bilder derselben äußeren Gegenstände können sich noch unterscheiden nach der Zweckmäßigkeit. Von zwei Bildern desselben Gegenstandes wird dasjenige das zweckmäßigere sein, welches mehr wesentliche Beziehungen des Gegenstandes widerspiegelt als das andere; welches, wie wir sagen wollen, das deutlichere ist. Bei gleicher Deutlichkeit wird von zwei Bildern dasjenige zweckmäßiger sein, welches neben den wesentlichen Zügen die geringere Zahl überflüssiger oder leerer Beziehungen enthält, welches also das einfachere ist. Ganz werden sich leere Beziehungen nicht vermeiden lassen, denn sie kommen den Bildern schon deshalb zu, weil es eben nur Bilder und zwar Bilder unseres besonderen Geistes sind und also von den Eigenschaften seiner Abbildungsweise mitbestimmt sein müssen.*

[14] Es wäre allerdings ein Missverständnis, hierin ein "mathematische Modell" der Modellbildung zu sehen, da keine der drei enthaltenen Abbildungen hinsichtlich ihrer realen Bedeutung präzise gefasst ist.

Das Kriterium der Richtigkeit, also die Grundforderung , wird in der Physik, an die Hertz hier ausschließlich denkt, in der Regel durch ein Experiment überprüft, also durch die bewusste und theoriegeleitete Herstellung von Versuchsbedingungen, die den Idealvorstellungen des Modells möglichst nahe kommen und an denen sich seine Vorhersagen überprüfen lassen.

Die Verbreitung mathematischer Modelle in anderen Wissenschaftsbereichen bringt eine methodische Schwierigkeit mit sich, die die Physik so nicht kennt, mit Ausnahme vielleicht in der Kosmologie: Klimamodelle, Modelle von Volkswirtschaften oder komplexer biologischer Systeme etwa lassen sich nicht experimentell überprüfen: Der Beobachter kann die im Modell unterstellten Idealbedingungen nicht herstellen, er muss das beobachtete System so nehmen, wie es ist. Hier dürfte das Hauptproblem bei der Übertragung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Methode auf die meisten anderen Wissensgebiete liegen.

Dennoch gibt es weitere Anforderungen an eine saubere mathematische Modellbildung, die sich auch außerhalb der Physik erfüllen lassen, aber leider oft nicht erfüllt werden (Hertz 1894/1996, S. 68):

> *Wir haben bisher die Anforderungen aufgezählt, welche wir an die Bilder selbst stellen; etwas ganz anderes sind die Anforderungen, welche wir an eine wissenschaftliche Darlegung solcher Bilder stellen. Wir verlangen von der letzteren, daß sie uns klar zum Bewußtsein führe, welche Eigenschaften den Bildern zugelegt seien um der Zulässigkeit willen, welche um der Richtigkeit willen, welche um der Zweckmäßigkeit willen. Nur so gewinnen wir die Möglichkeit an unseren Bildern zu ändern, zu bessern. Was den Bildern beigelegt wurde um der Zweckmäßigkeit willen, ist enthalten in den Bezeichnungen, Definitionen, Abkürzungen, kurzum in dem, was wir nach Willkür hinzutun oder wegnehmen können. Was den Bildern zukommt um ihrer Richtigkeit willen, ist enthalten in den Erfahrungstatsachen, welche beim Aufbau der Bilder gedient haben. Was den Bildern zukommt, damit sie zulässig seien, ist gegeben durch die Eigenschaften unseres Geistes. Ob ein Bild zulässig ist oder nicht, können wir eindeutig mit ja und nein entscheiden, und zwar mit Gültigkeit unserer Entscheidung für alle Zeiten. Ob ein Bild richtig ist oder nicht, kann ebenfalls eindeutig mit ja und nein entschieden werden, aber nur nach dem Stande unserer gegenwärtigen Erfahrung und unter Zulassung der Berufung an spätere reifere Erfahrung. Ob ein Bild zweckmäßig sei oder nicht, dafür gibt es überhaupt keine eindeutige Entscheidung, sondern es können Meinungsverschiedenheiten bestehen. Das eine Bild kann nach der einen, das andere nach der andern Richtung Vorteile bieten, und nur durch allmähliches Prüfen vieler Bilder werden im Laufe der Zeit schließlich die zweckmäßigsten gewonnen.*

Es kommt also darauf an, nicht nur die in ein Modell eingehenden Annahmen deutlich herauszuarbeiten, sondern ebenso die Gründe für diese Annahmen, die sehr verschiedenartig sein können. Zu diesen Gründen zählt immer auch der Zweck des Modells: Welche Fragen soll es beantworten, welche beobachteten Phänomene erklären, wovon darf im jeweiligen Zusammenhang abstrahiert werden?

5.4 Zur Gültigkeit von Modellen

Die "Richtigkeit" von Modellen im Sinne von Hertz lässt sich nicht beweisen, sondern nur an Experimenten überprüfen und bei negativem Ausgang widerlegen. Umgekehrt folgt aus der Übereinstimmung mit experimentellen Beobachtungen allenfalls eine Art "vorläufige Richtigkeit" bis zum Beweis des Gegenteils im nächsten Experiment.

Problematisch wird die Situation dann, wenn Experimente mit dem durch das Modell beschriebenen System nicht möglich sind oder sich verbieten: Eine aus einem mathematischen Modell gewonnene Aussage hat (wie jeder mathematische Satz) immer die Form: Unter den Voraussetzungen $A, B, C, \ldots$ tritt $X, Y, Z, \ldots$ ein. Geraten nun die Vorhersagen X, Y, Z zu Beobachtungen in Widerspruch, so kann das u. a. daran liegen,

- dass die vereinfachenden Annahmen A, B, C nur in der konkret beobachteten Situation nicht erfüllt waren,
- dass sie von dem beschriebenen System grundsätzlich nicht erfüllt werden können,
- dass schludrig gearbeitet wurde, entweder in Form von Mehrdeutigkeiten und Inkonsistenzen bei der Interpretation (Abbildung b) oder in Form logischer oder mathematischer Fehlschlüsse,

was ganz verschiedene Konsequenzen hinsichtlich der Beurteilung des Modells nach sich zieht, aber nicht so ohne weiteres auseinander gehalten werden kann.

Logische Fehler und Inkonsistenzen können natürlich auch dazu führen, dass Aussagen gewonnen werden, die das Modell eigentlich gar nicht hergibt, die sich aber empirisch mehr oder weniger bestätigen lassen.[15] Die Übereinstimmung mit Beobachtungsdaten ist daher weder ein notwendiges noch ein hinreichendes Kriterium für die Richtigkeit eines Modells, sondern nur ein Teilaspekt. Bossel 1992, S. 36 bezeichnet dieses Kriterium als *empirische Gültigkeit*, nennt aber noch drei weitere Kriterien:

- *Verhaltensgültigkeit* ist ein ähnliches Kriterium, wobei allerdings von der numerischen Übereinstimmung mit Daten abgesehen wird. Gefragt ist nur, ob Modell und beschriebenes System ein ähnliches qualitatives Verhalten aufweisen (z. B. Schwingungen, Periodizitäten u. a.).
- *Strukturgültigkeit* zielt auf die Entsprechung der Wirkungsstrukturen von Modell und Original. Ein Modell ist mit Sicherheit dann nicht strukturgültig, wenn nur das qualitative oder quantitative Systemverhalten durch eine mathematische Struktur nachgebildet wird, ohne auf die inneren Wirkungsmechanismen des Originals Bezug zu nehmen.
- *Anwendungsgültigkeit* fragt danach, ob das Modell seinem Zweck entspricht und Antworten auf die gestellten Fragen gibt. Ein Modell ist mit Sicherheit dann nicht anwendungsgültig, wenn es mathematisch unlösbare Probleme aufwirft und eine Simulation mit den aktuell zur Verfügung stehenden Mitteln nicht möglich ist.

Es dürfte im Allgemeinen schwierig sein, präzise festzustellen, dass eines dieser Kriterien erfüllt ist, schon eher, dass es nicht erfüllt ist. Die Kriterien sind daher nur als Aspekte zu verstehen, unter denen sich mathematische Modelle diskutieren lassen.

[15] Nach meinem Eindruck scheint das ein in weiten Teilen der herrschenden Volkswirtschaftslehre beliebtes Vorgehen zu sein, weshalb denn dort auch die Ansicht häufig anzutreffen ist, es komme auf Erklärungsgehalt und Begründung der verwendeten Modelle gar nicht an, sondern nur darauf, ob zutreffende Voraussagen möglich sind, so etwa Friedman 1953. Dann stellt sich allerdings die Frage, warum man auf Modelle, denen gar kein Erklärungsanspruch zukommt, nicht ganz verzichtet und sich auf die Extrapolation von Beobachtungsdaten beschränkt.

5.5 Klassifikation von Modellen

Mathematische Modelle lassen sich unter verschiedenen Gesichtspunkten klassifizieren. Einer davon ist der Gegenstandsbereich, auf den sie sich beziehen, die Klassifikation entspricht dann der der Wissenschaften, in denen mathematische Modelle eingesetzt werden. Ein zweiter ist die Art der Mathematik, die in den Modellen zum Zuge kommt. Rapoport 1980 unterscheidet für die Sozialwissenschaften

- *klassische* Modelle, in denen Differential- und Differenzengleichungen verwendet werden,
- *stochastische* Modelle, die wesentlich mit stochastischen Prozessen arbeiten,
- *strukturelle* Modelle, die u. a. diskrete Mathematik einsetzen.

Differential- und Differenzengleichungen setzen die Kenntnis bzw. Annahme von Entwicklungsgesetzen voraus, denen die betrachteten Systeme dann auf deterministische Weise folgen. Stochastische Prozesse weichen die Determiniertheit der Zukunft aus den Anfangsbedingungen insofern auf, als zufällige Einflüsse mit einbezogen werden. Strukturelle Modelle verzichten dem gegenüber ganz auf Prognosen und weisen ein mehr oder weniger großes Spektrum möglicher Abläufe aus oder verzichten ganz auf Vorhersagen.

In der Literatur zur mathematischen Modellbildung außerhalb der *hard sciences* hat sich eine weitere Klassifikation von Modellen herausgebildet, die stark am Modellzweck orientiert ist, nämlich die Unterscheidung von deskriptiven (beschreibenden, beobachtenden) Modellen, numerischen Simulationsmodellen und konzeptionellen (analytischen, hypothetischen) Modellen (vgl. Gershenfeld 1999, Wissel 1989).

- *Deskriptive Modelle* dienen der Erfassung, Aufbereitung, Komprimierung und Analyse meist großer Datenmengen, ohne dass damit ein Erklärungsanspruch verbunden ist. Nichtsdestoweniger handelt es sich dabei um mathematische Modellbildung, da entschieden werden muss, welche potentiellen Eigenschaften unübersichtlicher Daten zum Vorschein gebracht und welche in den Hintergrund gedrängt werden sollen.
- *Simulationsmodelle* sind der Versuch, einer komplexen Realität dadurch gerecht zu werden, dass möglichst viele bekannte Einzelheiten erfasst werden. Ihres Umfangs wegen lassen sich diese Modelle nur auf dem Computer numerisch durchrechnen. Das setzt voraus, dass jedem (bekannten oder unbekannten) Parameter im Modell ein numerischer Wert zugewiesen sein muss. Der Zweck dieser Modelle besteht in quantitativen Prognosen, möglicher Weise auch in der Entwicklung von Vorschlägen für Management- oder Politikmaßnahmen. Die ausschließlich numerische Simulation setzt einen engen Zusammenhang zu empirisch erhobenen Daten voraus, die mangelnde oder ungenaue Datenerfassung kann daher zu einem Problem werden. Ein Folgeproblem besteht in der Schwierigkeit, die Auswirkungen von Ungenauigkeiten in den Eingangsdaten abzusehen. Die Komplexität eines Simulationsmodells macht sein Systemverhalten oft undurchsichtig, zugespitzt könnte man sagen: Das Verständnis der komplexen Realität wird nicht gefördert, sondern ersetzt. Prognosen über den empirisch bereits erfassten Rahmen hinaus sind daher immer mit großer Vorsicht zu genießen.
- *Konzeptionelle Modelle* verfahren genau umgekehrt, indem sie bewusst von starken Idealisierungen ausgehen. Sie beschreiben Situationen, die es in der Realität so gar nicht oder nur im Extremfall gibt, etwa im Sinne von Gedankenexperimenten der klassischen Physik.

Derartige Modelle müssen schon deswegen möglichst einfach gehalten werden, um einer Analyse zugänglich zu sein. In der Regel operieren sie mit nichtnumerischen Parametern. Das Ziel dieser Modelle ist es, die Wirkungen von einzelnen Komponenten der komplexen Realität genauer zu bestimmen und so Verständnis für Zusammenhänge zu erzeugen. Eine quantitative Übereinstimmung der aus konzeptionellen Modellen gewonnenen Vorhersagen mit Beobachtungsdaten, die nicht in einem entsprechend angelegten Experiment gewonnen wurden, ist nicht zu erwarten.[16]

Literatur

Bossel, H.: *Modellbildung und Simulation*, Braunschweig 1992

Cassirer, E.: *Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit*, Erster Band 1910, Nachdruck, Darmstadt 1994

Collins, H. / Pinch, T.: *Der Golem der Forschung. Wie unsere Wissenschaft die Natur erfindet*, Berlin 1999

Davis, P. J. / Hersh, R.: *Erfahrung Mathematik*, Basel 1985

Friedman, M.: it The methodology of positive economics, in M. Friedman: Essays in positive economics, 5 - 43, Chikago 1953

Galilei, G.: *Dialogo supra i due massimi sistemi del mondo*, 1632, Übersetzung von E. Strauß 1890, Nachdruck, Stuttgart 1982

Galilei, G.: *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due novo scienze*, 1638, Übersetzung von A. v. Oettingen 1890, Nachdruck, Frankfurt 1995

Gershenfeld, N: *The nature of mathematical modeling*, Cambridge 1999

Greiff, B. v.: *Gesellschaftsform und Erkenntnisform. Zum Zusammenhang von wissenschaftlicher Erfahrung und gesellschaftlicher Entwicklung*, Frankfurt 1976

Hertz,H.: Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt. Einleitung, 1894, mit *Anmerkungen* von J. Kuczere, Frankfurt 1996

Hume, D.: *An enquiry concerning human understanding*, 1748, Übersetzung von R. Richter, Hamburg 1993

Kant, I.: *Kritik der reinen Vernunft*, 1781, 2. Auflage 1787, Nachdruck, Hamburg 1990

Kant, I.: *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*, 1786, Kants Werke auf CD-ROM, Berlin 1996

Koyré, A.: *Leonardo, Galilei, Pascal. Die Anfänge der neuzeitlichen Naturwissenschaft*, Frankfurt 1998

Mehrtens, H.: *Moderne - Sprache - Mathematik*, Frankfurt 1990

Newton, I.: *Philosophia naturalis principia mathematica*, 1687, Übersetzung von E. Dellian, Hamburg 1988

Ortlieb, C. P.: *Bewusstlose Objektivität. Aspekte einer Kritik der mathematischen Naturwissenschaft*, Krisis 21/22, 15 - 51, Bad Honnef 1999

Peiffer, J. / Dahan-Dalmedico, A.: *Wege und Irrwege - Eine Geschichte der Mathematik*, Basel 1994

[16] Um noch einmal auf die Volkswirtschaftslehre zurück zu kommen: Die dort extensiv gebrauchten mathematischen Modelle sind ihrem Ansatz nach konzeptioneller Art. Einen wie immer mit ihnen verbundenen Erklärungsanspruch einfach fallen zu lassen und statt dessen auf ihre Prognosefähigkeit zu setzen, ist daher ein sinnloses Unterfangen.

Pietschmann, H.: *Das Ende des naturwissenschaftlichen Zeitalters*, Stuttgart 1995

Postone, M.: *Time, labor, and social domination*, Cambridge 1996

Rapoport, A.: *Mathematische Methoden in den Sozialwissenschaften*, Würzburg 1980

Serres, M. (Hrsg.): *Elemente einer Geschichte der Wissenschaften*, Frankfurt 1998

Stenger, I.: *Die Galilei-Affären*, in Serres 1998, 395 - 443

Wissel, C.: *Theoretische Ökologie*, Berlin 1989