11. Berechnung reeller Integrale mittels Residuen

Satz (11.1)

Ist $R(z) = P(z)/Q(z)$ eine rationale Funktion, die keine Singularitäten auf $\mathbb{R}$ besitzt und ist $\text{Grad}(Q) \geq \text{Grad}(P) + 2$, so gilt

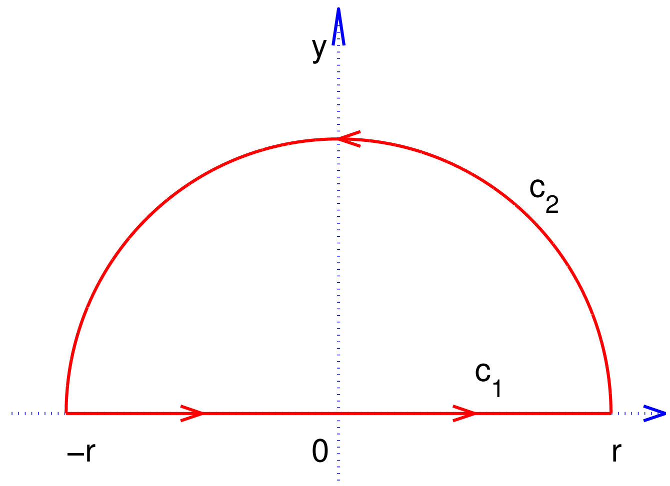
$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx \;=\; 2\,\pi\,i \sum_{\text{Im}\,z>0} \text{Res}(R; z)\,.$$

Beweis: Wegen $\text{Grad}(Q) \geq \text{Grad}(P) + 2$ gilt für große $|z|$ eine Abschätzung der Form

$$|\,R(z)\,| \;=\; \left|\,\frac{P(z)}{Q(z)}\,\right| \;\leq\; \frac{C}{|z|^2}$$

Damit folgt die (absolute) Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$ nach dem Majorantenkriterium; vgl. (13.5.4).

Wir integrieren nun in $\mathbb{C}$ über den folgenden Integrationsweg



Ist r hinreichend groß, so liegen alle Singularitäten von R mit $\operatorname{Im} z_k > 0$ innerhalb des Weges $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$. Somit folgt

$$2\,\pi\,i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(R; z_k) \;=\; \oint\limits_{\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2} R(z)\,dz \tag{11.2}$$

Wir betrachten nun die Grenzwerte der einzelnen Integrale für $r \to \infty$:

$$\int_{\mathbf{c}_1} R(z)\,dz \;=\; \int_{-r}^{r} R(x)\,dx \;\to\; \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx \quad (r \to \infty)$$

Das zweite Integral schätzen wir ab

$$\Big|\int_{\mathbf{c}_2} R(z)\,dz\,\Big| \;\leq\; \max_{|z|=r} |R(z)| \,\cdot\, L(\mathbf{c}_2) \;\leq\; \pi\, r\,\frac{C}{r^2} \;\to\; 0$$

für $r \to \infty$. Aus (11.2) folgt hiermit die Behauptung

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx \;=\; 2\,\pi\,i \sum_{\mathrm{Im}\, z>0} \mathrm{Res}(R; z)\,. \qquad \Box$$

Beispiel (11.3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,x}{1+x^6}$$

Die Funktion $R(z) := 1/(1+z^6)$ besitzt sechs Polstellen, von denen drei in der oberen Halbebene liegen: $z_1 = \mathrm{e}^{i\,\pi/6}$, $z_2 = \mathrm{e}^{i\,\pi/2}$, $z_3 = \mathrm{e}^{i\,5\,\pi/6}$. Ferner gilt nach (10.5)

$$\mathrm{Res}(f; z_k) \;=\; \frac{1}{6z^5}\Big|_{z_k} \;=\; -\,\frac{z_k}{6}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}\,dx \;&=\; -\,\frac{2\,\pi\,i}{6}\left(\mathrm{e}^{i\,\pi/6} + \mathrm{e}^{i\,\pi/2} + \mathrm{e}^{i\,5\,\pi/6}\right)\\ &=\; \frac{\pi}{3}\left(2\,\sin(\pi/6) + 1\right).\end{aligned}$$

Beispiel (11.4)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\,\omega\,x}}{x^2+a^2}\,dx; \qquad a>0,\ \omega>0.$$

Satz (11.1) lässt sich nicht direkt anwenden; allerdings lässt sich der Beweis von (11.1) unmittelbar übertragen, da

$$\left|\frac{e^{i\,\omega\,z}}{z^2+a^2}\right| = \frac{e^{-\,\omega\,y}}{|z^2+a^2|} \le \frac{1}{|z^2+a^2|} \le \frac{C}{|z\,|^2}\,.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\,\omega\,x}}{x^2+a^2}\,dx &= 2\,\pi\,i \sum_{\mathrm{Im}\,z>0} \mathrm{Res}\Big(\frac{e^{i\,\omega\,z}}{z^2+a^2}; z\Big)\\ &= 2\,\pi\,i\ \mathrm{Res}\Big(\frac{e^{i\,\omega\,z}}{z^2+a^2}; i\,a\Big)\\ &= 2\,\pi\,i\ \frac{e^{i\,\omega\,z}}{2\,z}\Big|_{z=ia} = \frac{\pi}{a}\,e^{-\omega a}\,.\end{aligned}$$

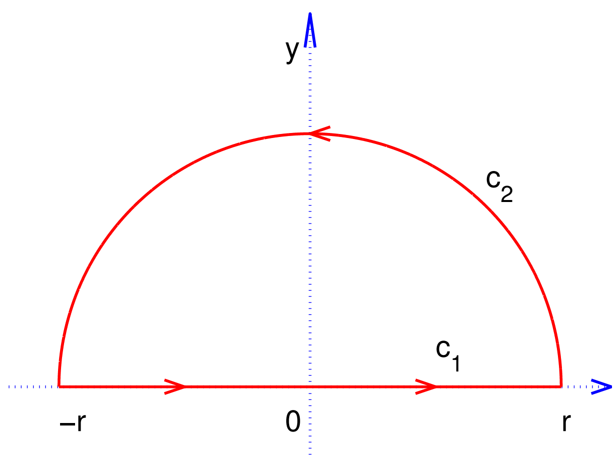
Satz (11.5)

Sei f holomorph auf einem Gebiet $G = D \setminus \{z_1, \dots z_m\}$, wobei $D \supset \{z : \operatorname{Im} z > -\varepsilon\}$. Die (endlich vielen) isolierten Singularitäten von f mögen in der oberen Halbebene $\operatorname{Im} z > 0$ liegen.

Gilt nun $\lim\limits_{z \to \infty,\, \operatorname{Im} z \geq 0} f(z) = 0$, so folgt

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\,x}\, dx = 2\,\pi\,i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(f(z)\, e^{i\,z}; z_k)$$

Beweis: Wir integrieren wieder über den Integrationsweg wie in (11.1) und schätzen ab.



$$
\Big| \int_{\mathbf{c}_2} f(z)\,\mathrm{e}^{i\,z}\,dz \Big| \;=\; \Big| \int_0^\pi f(r\mathrm{e}^{i\varphi})\,\mathrm{e}^{i\,r\,\mathrm{e}^{i\,\varphi}}\,r\,i\,\mathrm{e}^{i\,\varphi}\,d\varphi \Big|
$$

$$
\le\; M(r) \int_0^\pi r\,\mathrm{e}^{-\,r\,\sin\varphi}\,d\varphi\,,
$$

wobei $M(r) := \max\{|f(z)| :\; |z| = r,\ \mathrm{Im}\, z \ge 0\}$.

Zur Abschätzung verwenden wir nun $\sin\varphi \ge 2\,\varphi/\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi/2$.

$$
\int_0^\pi r\,\mathrm{e}^{-\,r\,\sin\varphi}\,d\varphi \;=\; 2\,r \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-\,r\,\sin\varphi}\,d\varphi \;\le\; 2\,r \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-\,2\,r\,\varphi/\pi}\,d\varphi
$$

$$
=\; -\frac{2\,r}{2\,r/\pi}\,\mathrm{e}^{-\,2\,r\,\varphi/\pi}\Big|_{\varphi=0}^{\pi/2} \;=\; \pi\,(1-\mathrm{e}^{-r}) \;\le\; \pi.
$$

Damit folgt $\int_{\mathbf{c}_2} f(z)\,\mathrm{e}^{i\,z}\,dz \;\to\; 0,\;\; r \to \infty.$ $\square$

Beispiel (11.6)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx.$$

Das uneigentliche Integral exitiert nach dem Majorantenkriterium. Es lässt sich als Realteil des komplexen Integrals

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\,z}}{1+z^2}\, dz$$

schreiben. Wegen $f(z) := 1/(1+z^2) = O(1/z^2) \to 0, \quad z \to \infty,$ existiert das uneigentliche Integral und es folgt mit (11.5):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\,z}}{1+z^2}\, dz \;=\; 2\,\pi\,i\ \mathrm{Res}\Big(\frac{e^{i\,z}}{1+z^2}; i\Big) \;=\; 2\,\pi\,i\ \frac{e^{iz}}{2\,z}\Big|_{z=i} \;=\; \pi/e.$$

Damit ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx \;=\; \frac{\pi}{\mathrm{e}}\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\, dx \;=\; 0.$$

Satz (11.7)

Ist R eine rationale Funktion in den Variablen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die auf dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ keine Singularitäten hat, so gilt:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt \;=\; 2\,\pi \sum_{|z|<1} \mathrm{Res}[\frac{1}{z}\, R(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2\,i}); z].$$

Beweis: Die rechte Seite lässt sich mittels Residuensatz als Integral schreiben:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{i\,z}\,R\Big(\frac{z+1/z}{2},\frac{z-1/z}{2\,i}\Big)\,dz \;=\; \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{i\,\mathrm{e}^{i\,t}}\,R(\cos t,\sin t)\,i\,\mathrm{e}^{i\,t}\,dt$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} R(\cos t,\sin t)\,dt. \qquad \square$$

Beispiel (11.8)

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t}, \qquad a>1.$$

Die Voraussetzung von (11.7) ist erfüllt, $R(x,y)=1/(a+y)$ hat keine Singularität auf dem Einheitskreis. Die Funktion

$$f(z) := \frac{1}{z}\,\frac{1}{a+(z-1/z)/(2\,i)} = \frac{2\,i}{z^2+2\,i\,a\,z-1}$$

hat Polstellen bei $z_{1,2} = -i\,a \pm i\sqrt{a^2-1}$. Nur z_1 liegt im Einheitskreis. Mit

$$\mathrm{Res}(f; z_1) = \frac{2\,i}{2\,z_1 + 2\,i\,a} = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$$

folgt nun aus (11.7)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{a^2-1}}\,.$$

Satz (11.9)

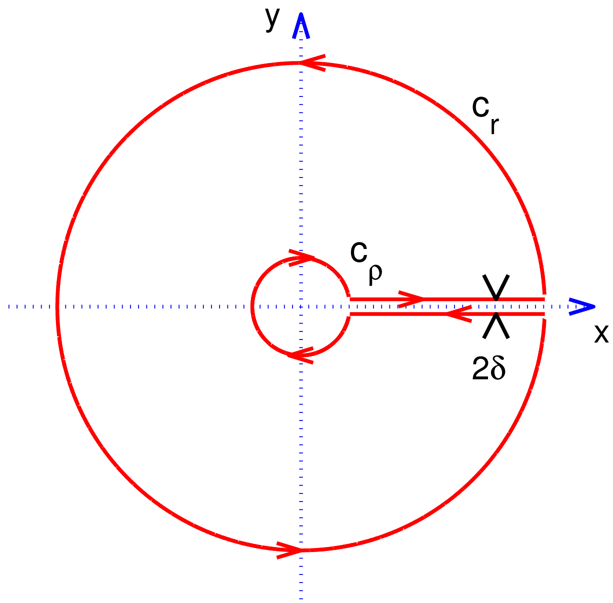
Sei R eine rationale Funktion in einer Variablen x, die im Intervall $[0, \infty[$ keine Polstelle besitzt. Es sei $R(x) = P(x)/Q(x)$ mit $\operatorname{grad} Q > \operatorname{grad} P$ und es sei $0 < \alpha < 1$. Dann gilt

$$\int_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha}\,dx \;=\; \frac{2\pi i}{1-\mathrm{e}^{-2\pi\alpha i}} \sum_{z_k\neq 0} \mathrm{Res}\Big(\frac{R(z)}{z^\alpha}; z_k\Big).$$

Dabei ist der folgende Zweig von z^α zu wählen:

$$z \;=\; r\,\mathrm{e}^{i\,\varphi},\;\; 0<\varphi<2\,\pi \;\;\Rightarrow\;\; z^\alpha \;:=\; r^\alpha\,\mathrm{e}^{i\,\alpha\,\varphi}.$$

Beweis: Wir integrieren die Funktion $f(z) = R(z)/z^\alpha$ über den nebenstehenden Integrationsweg und führen die Grenzprozesse $\rho \to 0$, $\delta \to 0$ und $r \to \infty$ durch.



$$\int\limits_{\mathbf{c}} \frac{R(z)}{z^\alpha}\,dz \;=\; \int\limits_{\mathbf{c}_r} \frac{R(z)}{z^\alpha}\,dz \;+\; \int\limits_{\mathbf{c}_\rho} \frac{R(z)}{z^\alpha}\,dz$$

$$+\; \int\limits_\rho^r \frac{R(x+\delta\,i)}{(x+\delta\,i)^\alpha}\,dx \;-\; \int\limits_\rho^r \frac{R(x-\delta\,i)}{(x-\delta\,i)^\alpha}\,dx$$

Für $\delta \to 0$ ergeben sich die Grenzwerte

$$\int\limits_\rho^r \frac{R(x+\delta\,i)}{(x+\delta\,i)^\alpha}\,dx \quad\to\quad \int\limits_\rho^r \frac{R(x)}{x^\alpha}\,dx,$$

$$\int\limits_\rho^r \frac{R(x-\delta\,i)}{(x-\delta\,i)^\alpha}\,dx \quad\to\quad \mathrm{e}^{-2\pi\alpha i} \int\limits_\rho^r \frac{R(x)}{x^\alpha}\,dx.$$

Wegen $\operatorname{grad} Q > \operatorname{grad} P$ und $0 < \alpha < 1$ gilt

$$z\,\frac{R(z)}{z^\alpha} \;=\; z^{1-\alpha}\,R(z) \;\to\; 0 \quad (z \to \infty \;/\; z \to 0)$$

und damit

$$\Big|\int\limits_{\mathbf{c}_r} f(z)dz\Big| \;\le\; \int\limits_0^{2\pi} |f(r\,\mathrm{e}^{i\varphi})\,i\,r\,\mathrm{e}^{i\varphi}|\,d\varphi \;\le\; 2\,\pi\,\max_{|z|=r} |z\,f(z)|$$

$$\Rightarrow\; \int\limits_{\mathbf{c}_r} f(z)dz \to 0\;(r\to\infty), \qquad \int\limits_{\mathbf{c}_\rho} f(z)dz \to 0\;(\rho\to 0).$$

Somit folgt aus dem Residuensatz

$$2\pi i \sum_{z_k\neq 0} \mathrm{Res}\Big(\frac{R(z)}{z^\alpha}; z_k\Big) \;=\; \oint\limits_{\mathbf{c}} \frac{R(z)}{z^\alpha}dz \;\to\; (1-\mathrm{e}^{-2\pi\alpha i}) \int\limits_0^\infty \frac{R(x)}{z^\alpha}dx$$

für $\rho,\,\delta\to 0,\;\; r\to\infty.$ $\square$

Beispiel (11.10)

$$I \ := \ \int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha\,(1+x)}, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Die Funktion $R(z) = 1/(1+z)$ hat einen Pol in $z = -1$, die Voraussetzung des Satzes (11.9) ist also erfüllt. Man hat

$$\mathrm{Res}(\frac{1}{z^\alpha\,(1+z)}; -1) \ = \ \frac{1}{\mathrm{e}^{\pi\, i\, \alpha}}.$$

Damit folgt nach (10.19)

$$I \ = \ \frac{2\pi i}{1 - \mathrm{e}^{-2\pi\alpha i}} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{\pi\alpha i}} \ = \ \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\,.$$