16. Kurvenintegrale

16.1 Das Kurvenintegral zweiter Art

In Abschnitt 9.3 haben wir **Kurvenintegrale erster Art** betrachtet:

$$\int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}s \;:=\; \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \cdot \|\,\mathbf{c}'(t)\,\|\,\mathrm{d}t\,.$$

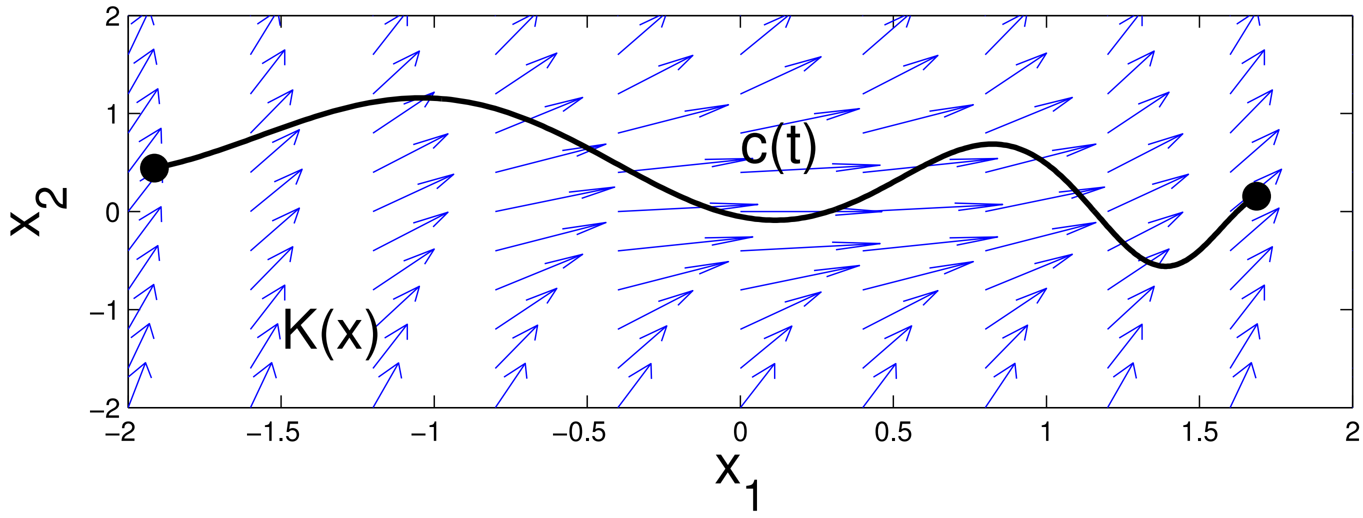
Dabei ist $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ eine *skalare* Funktion und $\mathbf{c}: \; [a,b] \to D$ eine stückweise C^1–Kurve. Modell: Gesamtmasse eines massebelegten Drahtes.

Daneben werden auch Integrale von Vektorfeldern „längs einer Kurve“ betrachtet. Modell: Physikalische Arbeit, die ein Massenpunkt bei der Bewegung längs einer Kurve $\mathbf{c}$ in einem Kraftfeld $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{x})$ verrichtet.

Definition (16.1.1)

Für ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^n$ und eine stückweise C^1–Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \to D$ wird das **Kurvenintegral zweiter Art** definiert durch

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} := \int_a^b \left\langle\, \mathbf{f}(\mathbf{c}(t))\,,\, \mathbf{c}'(t) \,\right\rangle \mathrm{d}t = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{c}(t))^{\mathsf{T}} \mathbf{c}'(t)\,\mathrm{d}t.$$



Beispiel (16.1.2)

Für $\mathbf{x} = (x, y, z)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^3$ und $0 \le t \le 2\pi$ sei

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \;:=\; (-y\,,\, x\,,\, z^2)^{\mathsf{T}} \quad \text{und} \quad \mathbf{c}(t) \;:=\; (\cos t, \sin t, at)^{\mathsf{T}}\,.$$

Für das Kurvenintegral zweiter Art erhält man:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \;&=\; \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, a^2t^2)\,(\,-\sin t, \cos t, a\,)^{\mathsf{T}} y\,\mathrm{d}t \\
&=\; \int_0^{2\pi} \left[\sin^2 t + \cos^2 t \;+\; a^3\,t^2\right]\,\mathrm{d}t \\
&=\; \int_0^{2\pi} (1 + a^3\,t^2)\,\mathrm{d}t \;=\; 2\,\pi \;+\; \frac{a^3}{3}\,(2\,\pi)^3.
\end{aligned}$$

In der Strömungslehre heißt das Kurvenintegral zweiter Art $\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{u}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$ des Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{u}$ einer Strömung längs einer *geschlossenen* Kurve $\mathbf{c}$ auch die **Zirkulation** des Feldes $\mathbf{u}$

längs $\mathbf{c}$. Hiermit wird die Bilanz der tangentialen Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes längs der gesamten Kurve $\mathbf{c}$ gebildet.

Beispiel (16.1.3)

Für das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(x,y) := (y,\,0)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2$ erhält man längs des Kreises $\mathbf{c}(t) := (r\cos t,\ 1 + r\sin t)^\mathsf{T},\ 0 \le t \le 2\pi,$ den folgenden Wert für die Zirkulation:

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{u}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} (1 + r\sin t, 0)^\mathsf{T} \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} (-r\sin t - r^2 \sin^2 t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[r\cos t - \frac{r^2}{2}(t - \sin t \cdot \cos t) \right]_0^{2\pi} \;=\; -\pi\, r^2.
\end{aligned}$$

Eigenschaften des Kurvenintegrals zweiter Art (16.1.4)

a) Linearität: $\int\limits_{\mathbf{c}} (\alpha\, \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta\, \mathbf{g}(\mathbf{x}))\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \alpha \int\limits_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} + \beta \int\limits_{\mathbf{c}} \mathbf{g}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}.$

b) Änderung der Durchlaufungsrichtung:

Mit $(-\mathbf{c})(t) := \mathbf{c}(b+a-t), a \leq t \leq b$, gilt: $\int\limits_{-\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = -\int\limits_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}.$

c) Additivität bzgl. der Weg:

$$\int\limits_{\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int\limits_{\mathbf{c}_1} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} + \int\limits_{\mathbf{c}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}\,.$$

Dabei ist $(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2)$ der durch „Aneinandersetzen“ von $\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{c}_2$ entstehende Weg (Endpunkt von $\mathbf{c}_1$ = Anfangspunkt von $\mathbf{c}_2$).

d) Parametrisierungsinvarianz: Kurvenintegrale zweiter Art sind invariant gegen streng monoton wachsende Parametertransformationen.

e) Darstellung als Kurvenintegral erster Art:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_a^b \langle\, \mathbf{f}(\mathbf{c}(t))\,,\, \mathbf{T}(t)\,\rangle\ \|\mathbf{c}'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{c}} \langle\, \mathbf{f}\,,\, \mathbf{T}\,\rangle\ \mathrm{d}s,$$

wobei $\mathbf{T}$ den **Tangenten-Einheitsvektor** der Kurve $\mathbf{c}$ bezeichnet:

$$\mathbf{T}(t) \;:=\; \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\,\mathbf{c}'(t)\,\|}\,, \qquad \mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0}.$$

f) Alternative Schreibweise:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathbf{c}} \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_i = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbf{c}} f_i(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_i\,,$$

dabei werden die Teilintegrale definiert durch

$$\int_{\mathbf{c}} f_i(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_i \;:=\; \int_a^b f_i(\mathbf{c}(t))\,c_i'(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{16.1.5}$$

Beispiel (16.1.6) Wie in (16.1.2) sei

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \ := \ (-y\,,\, x\,,\, z^2)^{\mathsf{T}} \text{ und } \mathbf{c}(t) \ := \ (\cos t, \sin t, at)^{\mathsf{T}},\ 0 \le t \le 2\,\pi.$$

Mit der obigen Schreibweise ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \ &= \ \int_{\mathbf{c}} (\,-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + z^2\,\mathrm{d}z\,) \\
&= \ \int_0^{2\pi} \Big[(-\sin t)\,(-\sin t) + \cos t\ \cos t \ + \ a^2\,t^2\,a\Big]\ \mathrm{d}t \\
&= \ \int_0^{2\pi} (1 + a^3\,t^2)\,\mathrm{d}t \ = \ 2\,\pi \ + \ \frac{a^3}{3}\,(2\,\pi)^3.
\end{aligned}$$

16.2 Wirbelfreie Vektorfelder, Hauptsatz

Definition (16.2.1)

Ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, heißt **wirbelfrei**, falls das Kurvenintegral von $\mathbf{f}$ längs *aller* geschlossenen, stückweise C^1–Kurven $\mathbf{c}$ in D verschwindet, also

$$\forall\ \mathbf{c} : [a,b] \to D \text{ geschlossene } C^1\text{-Kurve} : \oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0\,.$$

Bemerkung (16.2.2)

Ein Vektorfeld $\mathbf{f}$ ist genau dann wirbelfrei, wenn das zugehörige Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ **wegunabhängig** ist, d.h.:

$$\forall\, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 : [a,b] \to D : \ \mathbf{c}_1(a) = \mathbf{c}_2(a) \wedge \mathbf{c}_1(b) = \mathbf{c}_2(b) \Rightarrow$$

$$\oint_{\mathbf{c}_1} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \oint_{\mathbf{c}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Definition (16.2.3)

Ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^n$ heißt ein **Gradientenfeld**, falls es eine skalare C^1–Funktion $\Phi : D \to \mathbb{R}$ gibt mit $\boldsymbol{\nabla}\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \forall\, \mathbf{x} \in D$ (offen).

In diesem Fall heißt Φ eine **Stammfunktion** oder ein **Potential** von $\mathbf{f}$. Wie im eindimensionalen Fall ist Φ nur bis auf eine additive Konstante durch $\mathbf{f}$ bestimmt.

Beispiel (16.2.4)

Nach (12.1.9) gilt mit $r := \|\mathbf{x}\|_2$:

$$\boldsymbol{\nabla} r^k \;=\; k\, r^{k-1}\, \boldsymbol{\nabla} r \;=\; k\, r^{k-2}\, \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0},\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Vektorfelder der Form $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = k\, r^{k-2}\, \mathbf{x}$ sind also Gradientenfelder und $\Phi(\mathbf{x}) = r^k$ ist ein zugehöriges Potential.

Speziell für $k = -1$ zeigt das Beispiel, dass Gravitationskraftfelder der Form $\mathbf{G} = -\mu\, \mathbf{x}/r^3$ ein Potential $\Phi(\mathbf{x}) = \mu/r$ besitzen.

Beispiel (16.2.5) (Energieerhaltung)

Physikalische Kraftfelder $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{x})$, die ein Potential besitzen, $\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\nabla}\Phi(\mathbf{x})$, heißen **konservativ** (im Sinne von „energieerhaltend“). Das negative Potential $U(\mathbf{x}) := -\Phi(\mathbf{x})$ spielt dabei die Rolle der **potentiellen Energie**.

Aus dem Newtonschen Kraftgesetz $\mathbf{K}(\mathbf{x}) = m\,\ddot{\mathbf{x}} = -\boldsymbol{\nabla}U(\mathbf{x})$ folgt nämlich durch Multiplikation mit $\dot{\mathbf{x}}$:

$$0 = m\,\ddot{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\nabla}U(\mathbf{x})^{\mathsf{T}}\,\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\,\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 + U(\mathbf{x})\right).$$

Hieraus folgt, dass die Gesamtenergie $E(t) := \frac{1}{2}m\,\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 + U(\mathbf{x})$, das ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie, längs aller Lösungen der Newtonschen Bewegungsgleichung konstant ist.

Im Folgenden geben wir ein Kriterium für die Wegunabhängigkeit eines Kurvenintegrals an. Zugleich erhalten wir ein Verfahren zur Berechnung eines Potentials zu einem vorgegebenem Vektorfeld. Hierzu müssen wir jedoch den zulässigen Bereich $D \subset \mathbb{R}^n$ auf so genannte Gebiete einschränken.

Definition (16.2.6)

$D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **zusammenhängend**, falls je zwei Punkte in D durch eine stkw. C^1–Kurve verbunden werden können:

$$\forall\, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in D : \exists\, \mathbf{c} : [a,b] \to D \text{ (stkw. } C^1) : \ \mathbf{c}(a) = \mathbf{x}^0 \ \wedge \ \mathbf{c}(b) = \mathbf{x}^1 .$$

Eine offene und zusammenhängende Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein **Gebiet** in $\mathbb{R}^n$.

Beispiel (16.2.7)

Die Menge $G := \{(x,y)^\mathsf{T} : \ x^2 + y^2 > 9\}$ ist ein Gebiet in $\mathbb{R}^2$, die Menge $\tilde{G} := \{(x,y)^\mathsf{T} : \ x^2 - y^2 > 9\}$ jedoch nicht.

Satz (16.2.8) (Hauptsatz für Kurvenintegrale)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{f}$ ein stetiges Vektorfeld auf D.

a) Besitzt $\mathbf{f}$ ein Potential Φ, so gilt für alle stkw. C^1–Kurven $\mathbf{c} : [a, b] \to D$:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{c}(b)) - \Phi(\mathbf{c}(a)),$$

insbesondere ist das Kurvenintegral wegunabhängig und $\mathbf{f}$ ist wirbelfrei.

b) Umgekehrt gilt: Ist $\mathbf{f}$ wirbelfrei, so besitzt $\mathbf{f}$ auch ein Potential Φ. Ist $\mathbf{x}^0 \in D$ ein fester Punkt, und bezeichnet $\mathbf{c}_{\mathbf{x}}$ $(\mathbf{x} \in D)$ eine beliebige, die Punkte $\mathbf{x}^0$ und $\mathbf{x}$ verbindende stkw. C^1–Kurve in D, so lässt sich Φ berechnen durch:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{c}_{\mathbf{x}}} \mathbf{f}(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} + C\,, \quad C = \mathrm{const}\,.$$

Beispiel (16.2.9)

Zentrale Kraftfelder $\mathbf{G} = -\mu\,\mathbf{x}/r^3$ besitzen nach (16.2.3) das Potential $\Phi(\mathbf{x}) = \mu/r + C$.

Für die längs einer stkw. C^1–Kurve $\mathbf{c} : [a,b] \to \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ geleistete Arbeit gilt damit:

$$A \;=\; \int_{\mathbf{c}} \mathbf{G}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} \;=\; \mu\left(\frac{1}{\|\mathbf{c}(b)\|} - \frac{1}{\|\mathbf{c}(a)\|}\right) .$$

Beispiel (16.2.10)

Das Vektorfeld $\mathbf{f}(x,y,z) := (2\,x\,y + z^3,\; x^2 + 3\,z,\; 3\,x\,z^2 + 3\,y)^{\mathsf{T}}$, $(x,y,z)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^3$, besitzt ein Potential Φ. Zur Berechnung von Φ verwenden wir (16.2.8)b) mit der geradlinigen Verbindung $\mathbf{c}_{\mathbf{x}}(t) := t \cdot \mathbf{x}$, $0 \le t \le 1$:

$$\Phi(\mathbf{x}) \;=\; \int_0^1 (2t^2\,x\,y + t^3 z^3,\; t^2 x^2 + 3t\,z,\; 3t^3\,x\,z^2 + 3t\,y)^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 (2t^2\, x^2\, y + t^3 x\, z^3 + t^2\, x^2\, y + 3t\, y\, z + 3t^3\, x\, z^3 + 3t\, y\, z)\, \mathrm{d}t$$

$$= \tfrac{2}{3}\, x^2\, y + \tfrac{1}{4}\, x\, z^3 + \tfrac{1}{3}\, x^2\, y + \tfrac{3}{2}\, y\, z + \tfrac{3}{4}\, x\, z^3 + \tfrac{3}{2}\, y\, z$$

$$= x^2\, y \ + \ x\, z^3 \ + \ 3\, y\, z\, .$$

Für eine beliebige, die Punkte $P = (1, 1, 2)$ und $Q = (3, 5, -2)$ verbindende C^1–Kurve $\mathbf{c}$ gilt damit:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} \ = \ \Phi(Q) - \Phi(P) \ = \ -24\, .$$

Interpretiert man $\mathbf{f}$ als elektrisches Feld, so gibt $\int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}$ die Spannung zwischen den Punkten P und Q an.

Beispiel (16.2.11) Wir betrachten das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x,y) \;:=\; \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad (x,y)^{\mathsf{T}} \in D \;=\; \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}\,.$$

Für den Einheitskreis $\mathbf{c}(t) := (\cos t, \sin t)^{\mathsf{T}},\ 0 \le t \le 2\pi,$ findet man:

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \;=\; \int_0^{2\pi} (-\sin t,\ \cos t)\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t \;=\; 2\pi \quad \neq \quad 0\,.$$

Das Vektorfeld $\mathbf{f}$ ist also *nicht* wirbelfrei, es besitzt folglich auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ auch kein Potential!

Integrabilitätsbedingung (16.2.12)

Besitzt ein C^1–Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \supset D \to \mathbb{R}^3$ ein Potential, so gilt:

$$\operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \;=\; \mathbf{0}, \quad \forall\,\mathbf{x} \in D.$$

Bemerkung (16.2.13)

Die Integrablitätsbedingung gilt auch für zweidimensionale C^1– Vektorfelder $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^2$. Hierzu definiert man:

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(x,y) \;:=\; \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \quad \text{(Skalar!)}$$

Bemerkung (16.2.14)

Die Integrabilitätsbedingung $\operatorname{rot} \mathbf{f} = 0$ ist *notwendig*, jedoch i.Allg. nicht *hinreichend* für die Existenz eines Potentials.
Sie ist beispielsweise für das Vektorfeld $\mathbf{f}$ aus (16.2.11) erfüllt, obgleich $\mathbf{f}$ auf dem Gebiet $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ kein Potential besitzt. Schränkt man sich jedoch auf Teilgebiete von D „ohne Löcher“ ein, so besitzt $\mathbf{f}$ dort sehr wohl ein Potential: So ist z.B. $\Phi(x,y) := \arctan(y/x)$ eine Stammfunktion auf den beiden „Teilgebieten“ $x \neq 0$.

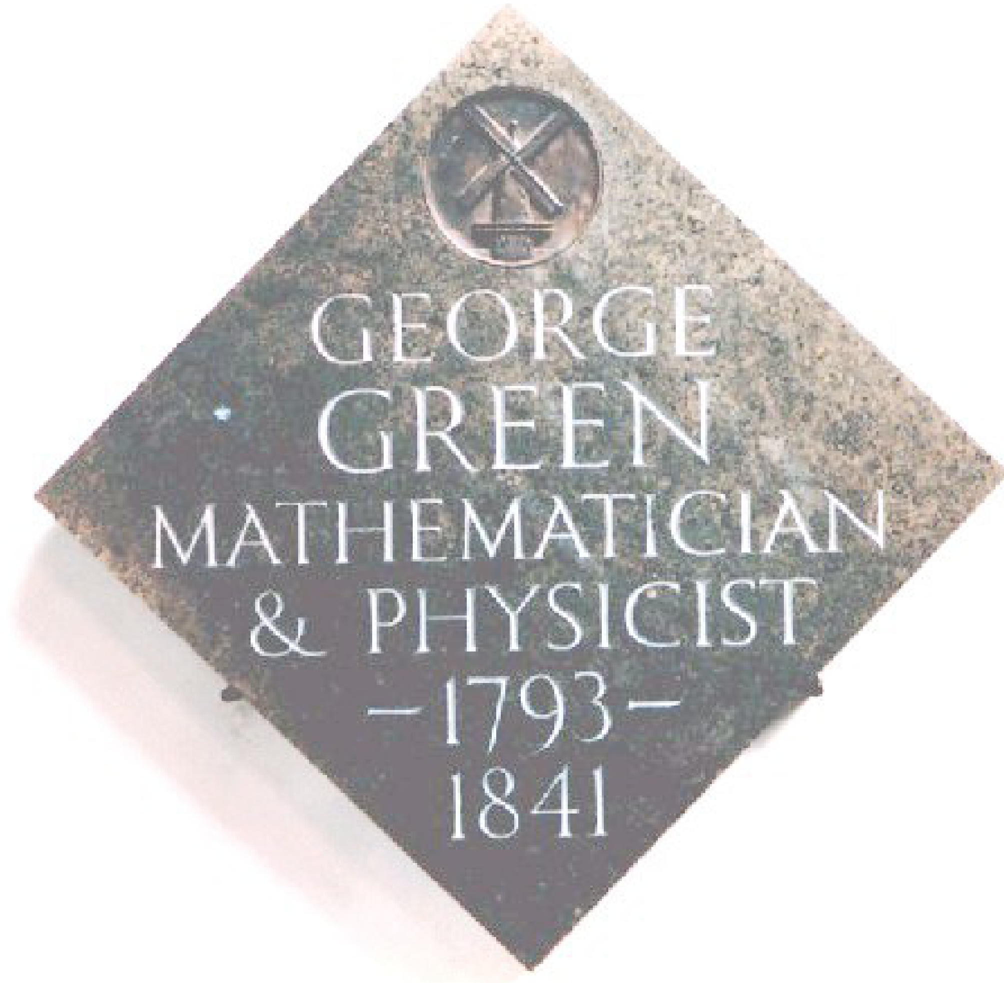
Satz (16.2.15) (Integralsatz von Green)

Sei $\mathbf{f}$ ein C^1–Vektorfeld auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$.
$K \subset D$ sei kompakt und bezüglich beider Koordinatenrichtungen projizierbar (Standardbereich bzgl. beider Koordinaten). K werde von einer geschlossenen, stkw. C^1–Kurve $\mathbf{c} : [0,1] \to D$ berandet. Die Parametrisierung sei dabei so gewählt, dass K stets links zur Durchlaufrichtung liegt (positiver Umlauf). Dann gilt:

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_K \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

Folgerung (16.2.16)

Beschreibt $\mathbf{f}$ das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung, so ist die linke Seite gerade die **Zirkulation** der Strömung längs $\mathbf{c}$. Gilt also $\operatorname{rot} \mathbf{f} = 0$ auf D, so ist die Strömung längs Rändern von Standardbereichen zirkulations–, d.h. wirbelfrei.



George Green (1793–1841); Cambridge

Bemerkung (16.2.17)

Der Greensche Integralsatz gilt auch für kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^2$, die sich in endlich viele Standardbereiche (bzgl. beider Koordinaten) zerlegen lassen. Solchen Bereiche heißen **Greensche Bereiche**.

Umformungen (16.2.18)

a) Der Greensche Integralsatz lässt sich auch durch ein Kurvenintegral erster Art ausdrücken:

$$\int_K \operatorname{rot} \mathbf{f} \, \mathrm{d}\mathbf{x} \;=\; \oint_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle \, \mathrm{d}s \,.$$

Hierbei ist $\mathbf{T}(t) = \mathbf{c}'(t)/\|\mathbf{c}'(t)\|$ der Tangenteneinheitsvektor von $\mathbf{c}$.

b) Ersetzen man hierin $\mathbf{T}$ durch den äußeren Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n} = (T_2, -T_1)^\top$, so erhält man den **ebenen Gaußschen Integralsatz (Divergenzsatz)**:

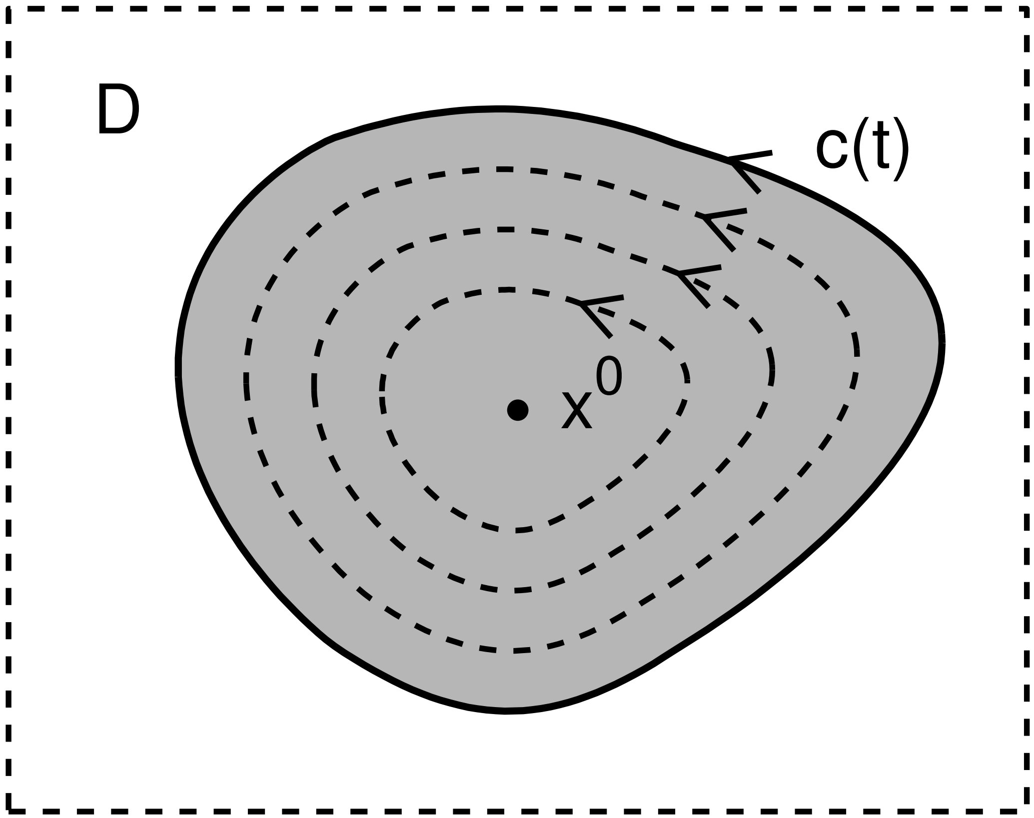
$$\int_K \operatorname{div} \mathbf{f} \, \mathrm{d}\mathbf{x} \;=\; \oint_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \rangle \, \mathrm{d}s \,.$$

Ist $\mathbf{f}$ wieder das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung, so beschreibt die rechte Seite den **Gesamtfluss** der Strömung durch den Rand von K. Gilt also $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ auf einem Gebiet D, so ist die Strömung dort **quellen– und senkenfrei**.

Definition (16.2.19) Ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **einfach zusammenhängend**, falls sich jede geschlossene, stkw. C^1-Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \to D$ stetig innerhalb der Menge D auf einen Punkt $\mathbf{x}^0 \in D$ zusammenziehen lässt. Genauer: Es existiert eine stetige Abbildung $\boldsymbol{\Phi} : [a, b] \times [0, 1] \to D$ mit den Eigenschaften

$$\boldsymbol{\Phi}(t, 0) \;=\; \mathbf{c}(t),\ \forall\, t \in [a, b], \text{ und } \boldsymbol{\Phi}(t, 1) = \mathbf{x}^0 \in D,\ \forall\, t \in [a, b].$$

Die Abbildung $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(t, s)$ heißt dann eine **Homotopie** von $\mathbf{c}$ auf den Punkt $\mathbf{x}^0$.



Satz (16.2.20) (Allgemeine Integrabilitätsbedingung)

Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so besitzt ein C^1–Vektorfeld $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ genau dann ein Potential auf D, falls die **Integrabilitätsbedingung**

$$\forall\, \mathbf{x} \in D \ : \ \mathbf{Jf}(\mathbf{x}) \ = \ (\mathbf{Jf}(\mathbf{x}))^{\mathsf{T}}$$

erfüllt ist.

In Koordinatenschreibweise: $\quad \forall\, j, k : \ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \ = \ \dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{x})\,.$

Mit dem obigen Satz wird die Integrabilitätsbedingung (16.2.12) bzw. (16.2.13) für beliebige Dimensionen verallgemeinert. Ferner zeigt der Satz, dass die Integrabilitätsbedingung auch *hinreichend* für die Existenz eines Potentials ist, falls D einfach zusammenhängend ist.

Beispiel (16.2.21) Gegeben ist das Vektorfeld
$\mathbf{f}(x, y, z) := (2\,x\,y + z^3, x^2 + 3\,z, 3\,x\,z^2 + 3\,y)^{\mathsf{T}}$, $(x, y, z)^{\mathsf{T}} \in D := \mathbb{R}^3$.
Aufgabe ist es festzustellen, ob $\mathbf{f}$ ein Potential besitzt und dieses gegebenenfalls zu bestimmen.

Zunächst ist D einfach zusammenhängend. Ferner findet man

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} \;=\; \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \;=\; \mathbf{0}\,.$$

Die Integrabilitätsbedingung ist demnach erfüllt und nach (16.2.20) besitzt $\mathbf{f}$ daher ein Potential Φ.

Zur Berechnung von Φ lässt sich der Hauptsatz anwenden, vgl. (16.2.10). Alternativ lässt sich direkte Integration langs der Koordinaten verwenden: Aus $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = f_1 \;=\; 2\,x\,y + z^3$ folgt durch

Integration bzgl. x:

$$\Phi(\mathbf{x}) \;=\; x^2\,y + x\,z^3 + c(y,z)$$

mit einer unbekannten Funktion $c = c(y,z)$.

Setzt man dies in $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = f_2 = x^2 + 3\,z$ ein, so folgt:

$$x^2 + \frac{\partial c}{\partial y} \;=\; x^2 + 3\,z$$

und somit $c(y,z) = 3\,y\,z + d(z)$ mit einer unbekannten Funktion $d = d(z)$.

Dies wiederum in die dritte Bedingung $\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = f_3$ eingesetzt, ergibt:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} \;=\; 3\,x\,z^2 + 3\,y + d'(z) \;=\; 3\,x\,z^2 + 3\,y\,.$$

Damit folgt $d'(z) = 0$, also ist $d(z) = C$ konstant.

Das gesuchte Potential lautet damit

$$\Phi(\mathbf{x}) \;=\; x^2\, y + x\, z^3 + 3\, y\, z + C\,.$$