

12. Die Legendre Bedingung für Aufgaben der optimalen Steuerung

Wir betrachten den folgenden Spezialfall einer Optimalsteuerungsproblems

Problemstellung (12.1)

Zu minimieren sei das Funktional

$$I(x, u) := g(x(t_b)) + \int_{t_a}^{t_b} f_0(t, x(t), u(t)) dt$$

über $(x, u) \in C_s^{0,1}([t_a, t_b], \mathbb{R}^n) \times C_s([t_a, t_b], \mathbb{R}^m)$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x, u), \quad t_a \leq t \leq t_b, \\ x(t_a) &= x_a. \end{aligned}$$

Die Einschränkung dieser Problemstellung besteht darin, dass der Zustandsvektor zur Anfangszeit t_a vollständig gegeben und zur Endzeit t_b vollständig frei sein soll.

(x_0, u_0) sei eine Lösung der Optimalsteuerungsaufgabe. Wir betten diese nun folgendermaßen in eine Schar von Vergleichsfunktionen ein:

Zu beliebigem $w \in C_s([t_a, t_b], \mathbb{R}^m)$ sei ein zugehöriges $v \in C_s^{0,1}([t_a, t_b], \mathbb{R}^n)$ durch die folgende lineare Anfangswertaufgabe bestimmt:

$$v'(t) = f_x[t]^T v(t) + f_u[t]^T w(t), \quad v(t_a) = 0. \quad (12.2)$$

Mit diesen Funktionen wird nun definiert

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &:= x_0(t) + \varepsilon v(t) + \alpha(t, \varepsilon), \\ u(t, \varepsilon) &:= u_0(t) + \varepsilon w(t). \end{aligned} \quad (12.3)$$

Das Restglied α sei dabei so festgelegt, dass die Variation $(x(\cdot, \varepsilon), u(\cdot, \varepsilon))$ zulässig ist, dass also gilt

$$\begin{aligned} \alpha'(t, \varepsilon) &:= f(t, x_0 + \varepsilon v + \alpha, u_0 + \varepsilon w) - f[t] - \varepsilon (f_x[t]^T v + f_u[t]^T w), \\ \alpha(t_a, \varepsilon) &:= 0. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Für hinreichend kleine $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ besitzt die Anfangswertaufgabe (12.4) eine eindeutig bestimmte Lösung auf $[t_a, t_b]$ und diese ist – unter Glattheitsvoraussetzungen an (x_0, u_0) – eine C^2 -Funktion von (t, ε) .

Differenziert man (12.4) nach ε und setzt anschließend $\varepsilon = 0$, so findet man

$$\alpha'_\varepsilon(t, 0) = f_x[t]^T \alpha_\varepsilon(t, 0), \quad \alpha_\varepsilon(t_a, 0) = 0.$$

Dies ist eine lineare, homogene Anfangswertaufgabe für α_ε . Der Eindeigkeitsatz für Anfangswertprobleme liefert:

$$\alpha_\varepsilon(t, 0) = 0, \quad \forall t \in [t_a, t_b]. \quad (12.5)$$

Damit ist gezeigt, dass $\alpha(t, \varepsilon)$ tatsächlich eine Variation zweiter Ordnung ist.

Wir setzen nun die Variation (12.3) in das erweiterte Zielfunktional ein:

$$J(\varepsilon) = \hat{I}(x, u) := \int_{t_a}^{t_b} F(t, x, u, x', \lambda) dt$$

mit $F(t, x, u, x', \lambda) := \ell_0 f_0(t, x, u) + \lambda^T (f(t, x, u) - x')$. Dabei bezeichnet (ℓ_0, λ) die adjungierten Variablen zur Lösung (x_0, u_0) , die aufgrund der notwendigen Bedingungen (9.40) existieren, $\ell_0 \in \{0, 1\}$.

Man beachte, dass die Zustandsdifferentialgleichung aufgrund unserer Konstruktion der Vergleichsfunktionen für alle (betragsmäßig kleinen) ε erfüllt ist, dass also das erweiterte Zielfunktional mit dem ursprünglichen Zielfunktional übereinstimmt.

Wir werten nun die notwendige Bedingung zweiter Ordnung für J aus. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\varepsilon} &:= \int_{t_a}^{t_b} \left(F_x^T x_\varepsilon + F_{x'}^T x'_\varepsilon + F_u^T w \right) dt \\ \frac{d^2 J}{d\varepsilon^2} &:= \int_{t_a}^{t_b} \left[\left(x_\varepsilon^T F_{xx} x_\varepsilon + 2 x_\varepsilon^T F_{xx'} x'_\varepsilon + (x'_\varepsilon)^T F_{x'x'} x'_\varepsilon \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(F_x^T x_{\varepsilon\varepsilon} + F_{x'}^T x'_{\varepsilon\varepsilon} \right) + 2 \left(x_\varepsilon^T F_{xu} w + (x'_\varepsilon)^T F_{x'u} w \right) + w^T F_{uu} w \right] dt. \end{aligned}$$

Mit $F_{xx'} = F_{x'x} = 0$, $F_{x'u} = 0$ und $x_\varepsilon(\cdot, 0) = v$, vgl. (12.5), reduziert sich der Ausdruck auf

$$\frac{d^2 J}{d\varepsilon^2}(0) = \int_{t_a}^{t_b} \left(v^T F_{xx} v + 2 v^T F_{xu} w + w^T F_{uu} w \right) dt + \int_{t_a}^{t_b} \left(F_x^T x_{\varepsilon\varepsilon} + F_{x'}^T x'_{\varepsilon\varepsilon} \right) dt.$$

Das zweite Integral wird nun mittels partieller Integration umgeformt. Dazu seien mit $\tau_1, \dots, \tau_s$ die eventuell auftretenden Sprungstellen von u , bzw. Ecken von x bezeichnet. Wir erhalten (mit $\tau_0 := t_a$ und $\tau_{s+1} := t_b$)

$$\int_{t_a}^{t_b} \left(F_x^T x_{\varepsilon\varepsilon} + F_{x'}^T x'_{\varepsilon\varepsilon} \right) dt = \sum_{k=0}^s F_{x'}^T x_{\varepsilon\varepsilon} \Big|_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} + \int_{t_a}^{t_b} \left(F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} \right)^T x_{\varepsilon\varepsilon} dt$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite verschwinden sämtlich: Es gilt nämlich $x_{\varepsilon\varepsilon}(t_a, 0) = 0$ (aufgrund der vorgegebenen Anfangswerte), $F_{x'}$ ist stetig in den Ecken (WEIERSTRASS - ERDMANNSCHE Eckenbedingung), $F_{x'}[t_b] = 0$ (aufgrund der natürlichen Randbedingung in t_b) und schließlich gilt die EULER - LAGRANGE Gleichung bzgl. der Zustandsvariablen x .

Somit bleibt nun die folgende notwendige Bedingung zweiter Ordnung: Für alle Variationen $w \in C_s$ und $v \in C_s^{0,1}$ mit (12.3) gilt

$$\frac{d^2 J}{d\varepsilon^2}(0) = \int_{t_a}^{t_b} \left(v^T F_{xx} v + 2 v^T F_{xu} w + w^T F_{uu} w \right) dt \geq 0. \quad (12.6)$$

Konstruktion spezieller Variationen.

Wir wollen nun in Analogie zum Vorgehen in Abschnitt 11 aus (12.6) folgern, dass die Matrix F_{uu} längs der Lösung (x_0, u_0) positiv semidefinit sein muss. Hierzu konstruieren wir spezielle Variationen.

Es sei $t_1 \in [t_a, t_b[$ ein beliebig vorgegebener Zeitpunkt, $h > 0$ sei hinreichend klein und $a \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ ein beliebiger Vektor. Wir wählen $w = (w_1, \dots, w_m)^T$ gemäß

$$w_k(t) = \begin{cases} a_k, & \text{für } t_1 \leq t < t_1 + h, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (12.7)$$

Ferner wird $v \in C_2^{0,1}$ in Abhängigkeit von w mittels der linearen Anfangswertaufgabe (12.2) festgelegt. Im Intervall $[t_a, t_1]$ verschwindet v somit.

Im Intervall $[t_1, t_1 + h]$ genügt v der inhomogenen linearen Anfangswertaufgabe

$$v'(t) = f_x[t]^T v(t) + f_u[t]^T a, \quad v(t_1) = 0.$$

Es bezeichne $Y(t) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ nun das Hauptfundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Dieses hängt nur von der Lösung (x_0, u_0) und t_1 , nicht aber von h und a ab. Mittels Variation der Konstanten gilt dann die folgende Lösungsdarstellung für $v(t) = v(t; h)$:

$$v(t; h) = \int_{t_1}^t Y(t) Y(\tau)^{-1} f_u[\tau]^T a \, d\tau, \quad t_1 \leq t \leq t_1 + h.$$

Da der Integrand stetig und (von h unabhängig) beschränkt ist, ergibt sich für v eine Abschätzung der Form

$$\|v(t; h)\| \leq C \|a\| h = O(h), \quad t_1 \leq t \leq t_1 + h, \quad (12.8)$$

mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$ und dem LANDAU-Symbol O . Dabei ist $\|\cdot\|$ irgendeine Vektornorm im $\mathbb{R}^n$.

Mit $v_1(h) := v(t_1 + h; h)$ hat man nun in dem verbleibenden Teilintervall $[t_1 + h, t_b]$ die folgende homogene lineare Anfangswertaufgabe zu lösen:

$$v'(t) = f_x[t]^T v(t), \quad v(t_1 + h) = v_1(h).$$

Hierfür hat man nun in Abhängigkeit vom Anfangswert eine Abschätzung der Form

$$\|v(t)\| \leq \|v_1(h)\| \exp(L|t_b - t_1 - h|), \quad t_1 + h \leq t \leq t_b.$$

Dabei ist $L > 0$ eine geeignete (von h unabhängige) LIPSCHITZ Konstante der rechten Seite des Differentialgleichungssystems, etwa $L := \max_{t \in [t_a, t_b]} \|f_x[t]\|$.

Zusammen mit (12.8) ergibt sich also die Abschätzung

$$\|v(t; h)\| \leq C \|a\| h \exp(L|t_b - t_1 - h|) = O(h), \quad t_1 + h \leq t \leq t_b. \quad (12.9)$$

Mittels der Beziehungen (12.7)–(12.9) erhalten wir nun das folgende asymptotische Verhalten der zweiten Variation (12.6) für $h \downarrow 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 J}{d\varepsilon^2}(0) &= \int_{t_a}^{t_b} \left(v^T F_{xx} v + 2 v^T F_{xu} w + w^T F_{uu} w \right) dt \\ &= \int_{t_a}^{t_1} \dots + \int_{t_1}^{t_1+h} \dots + \int_{t_1+h}^{t_b} \dots \\ &= 0 + h \left\{ O(h^2) + O(h) + a^T F_{uu}[t_1 + \Theta h] a \right\} \\ &\quad + (t_b - t_1 - h) O(h^2) \\ &= h \left(a^T F_{uu}[t_1 + \Theta h] a \right) + O(h^2) \geq 0. \end{aligned}$$

Hierbei ist $t_1 + \Theta h$ nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung eine Zwischenstelle, also $0 \leq \Theta = \Theta(h) \leq 1$.

Für $h \downarrow 0$ ergibt sich unmittelbar (per indirektem Beweis) die notwendige Bedingung $a^T F_{uu}[t_1] a \geq 0$.

Dies gilt für alle $a \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ und $t_1 \in [t_a, t_b[$. Aus Stetigkeitsgründen gilt dies darüber hinaus auch für $t_1 = t_b$, so dass wir nun insgesamt die positive Semidefinitheit der HESSE-Matrix $F_{uu}[t]$ längs der Lösung (x_0, u_0) gezeigt haben.

Wegen der Form des erweiterten Integranden liefert diese Bedingung nun auch die positive Semidefinitheit von $H_{uu}[t]$, wobei H wieder die übliche HAMILTON-Funktion $H := \ell_0 f_0 + \lambda^T f$ bezeichnet. Diese notwendige Bedingung heißt (wie auch bei mehrdimensionalen Variationsaufgaben) **Legendre–Clebsch Bedingung der Optimalsteuerungsaufgabe (12.1)**.

Natürlich lässt sich die obige Beweistechnik mit den Ideen aus Abschnitt 6 auch auf Optimalsteuerungsaufgaben mit allgemeineren Randbedingungen erweitern. Wir formulieren den Satz daher gleich für diesen allgemeineren Fall.

Satz (12.10) (Notwendige Bedingung erster und zweiter Ordnung)

Es sei $(x_0, u_0) \in C_s^{0,1}([t_a, t_b], \mathbb{R}^n) \times C_s([t_a, t_b], \mathbb{R}^m)$ eine Lösung des Optimalsteuerungsproblems

$$\text{Minimiere} \quad I(x, u) := g(x(t_a), x(t_b)) + \int_{t_a}^{t_b} f_0(t, x(t), u(t)) dt$$

unter den Nebenbedingungen

$$x'(t) = f(t, x, u), \quad r(x(t_a), x(t_b)) = 0,$$

Die Regularitätsbedingung (6.19) sei erfüllt, also $\text{Rang}[Jr(x_0(t_a), x_0(t_b))]$ maximal. Dann existieren LAGRANGE Multiplikatoren (ℓ_0, ν, λ) , $\ell_0 \in \{0, 1\}$, $\nu \in \mathbb{R}^k$, $\lambda \in C_s^{0,1}([t_a, t_b], \mathbb{R}^n)$, so dass mit der HAMILTON-Funktion

$$H(t, x, u, \lambda) := \ell_0 f_0(t, x, u) + \lambda^T f(t, x, u)$$

die folgenden notwendigen Bedingungen gelten:

a) Adjungierte Differentialgleichungen:

$$\lambda'(t) = -H_x(t, x_0(t), u_0(t), \lambda(t)),$$

b) Natürliche Randbedingungen:

$$\lambda(t_a) = -\frac{\partial}{\partial x(t_a)} [\ell_0 g + \nu^T r], \quad \lambda(t_b) = \frac{\partial}{\partial x(t_b)} [\ell_0 g + \nu^T r],$$

c) Freie Endzeit: Ist t_b frei – in diesem Fall können die Funktionen g und r auch explizit von t_b abhängen, so gilt

$$H[t_b] = -\frac{\partial}{\partial t_b} [\ell_0 g + \nu^T r],$$

d) Ecken: Ist die optimale Steuerung in Punkten $t_1, \dots, t_s \in]t_a, t_b[$ unstetig, so gelten die Weierstrass-Erdmannschen Eckenbedingungen

$$\lambda(t_j^-) = \lambda(t_j^+), \quad H[t_j^-] = H[t_j^+], \quad j = 1, \dots, s,$$

e) Stationarität der HAMILTON-Funktion bezüglich der Steuerung:

$$H_u(t, x_0(t), u_0(t), \lambda(t)) = 0,$$

f) LEGENDRE-CLEBSCH Bedingung:

$$\forall t \in [t_a, t_b]: \quad H_{uu}(t, x_0(t), u_0(t), \lambda(t)) \quad \text{positiv semidefinit.}$$

Ferner verschwinden die LAGRANGE Multiplikatoren nirgendwo gleichzeitig, d.h. $\forall t \in [t_a, t_b]: (\ell_0, \nu, \lambda(t)) \neq 0$.

Bemerkung (12.11)

Die beiden notwendigen Bedingungen, $H_u[t] = 0$ und H_{uu} positiv semidefinit, bilden zusammen gerade die notwendigen Bedingungen für die endlich dimensionale Minimierungsaufgabe

$$u_0(t) \in \operatorname{argmin}\{H(t, x_0(t), u, \lambda(t)) : u \in \mathbb{R}^m\},$$

d.h. $u_0(t)$ ist ein globales Minimum der HAMILTON-Funktion (bei fester Zeit t , festem Zustand $x_0(t)$ und festen adjungiertem Variablen $\lambda(t)$).

Diese Aussage, das so genannte *Minimumprinzip*, ist natürlich stärker als die beiden notwendigen Bedingungen c) und d) aus (12.10). Selbst wenn die strikte LEGENDRE-CLEBSCH Bedingung erfüllt ist, folgt aus (12.10) lediglich, dass $u_0(t)$ ein striktes *lokales* Minimum der HAMILTON-Funktion ist.

In der Tat ist aber die obige stärkere Aussage allgemein gültig, ja sie gilt sogar bei eingeschränktem Steuerbereich.

In der Literatur findet man das Minimumprinzip zumeist unter dem Stichwort PONTTRYAGINsches *Maximumprinzip*. Es wurde Anfang der sechziges Jahre des vorigen Jahrhunderts von der russischen Schule um PONTTRYAGIN und der amerikanischen Schule um HESTENES unabhängig voneinander gefunden.

Wir geben den entsprechenden Satz hier ohne Beweis an. In Abschnitt 13 werden wir einen zumindest heuristischen Beweis nachliefern. Für einen exakten Beweis sei auf die Literatur verwiesen, z.B. Hestenes, Kapitel 7, Theorem 8.1, oder Luenberger, Abschnitt 9.6, oder Sagan, Theorem 5.7.2.

Satz (12.12) (Minimumprinzip)

Gegeben sei die Optimalsteuerungsaufgabe aus (12.10) mit der zusätzlichen Nebenbedingung

$$\forall t \in [t_a, t_b] : u(t) \in U,$$

wobei $U \subset \mathbb{R}^m$ ein vorgegebener nichtleerer, abgeschlossener und konvexer Steuerbereich sei.

Ist (x_0, u_0) eine Lösung, so existieren LAGRANGE-Multiplikatoren (ℓ_0, ν, λ) wie in (12.10), die nirgendwo gleichzeitig verschwinden, so dass die notwendigen Bedingungen a) und b) aus (12.10) gelten, sowie (an Stelle von c) und d)):

c') Minimumprinzip:

$$\forall t \in [t_a, t_b], u \in U : H(t, x_0(t), u_0(t), \lambda(t)) \leq H(t, x_0(t), u, \lambda(t)).$$

Als Anwendung für die LEGENDRE-CLEBSCH Bedingung, bzw. das Minimumproblems betrachten wir das so genannte Re-entry Problem. Das Beispiel beschreibt den Wiedereintritt eines Raumfahrzeugs in die Erdatmosphäre und hat im Wesentlichen zu Ziel, das hiermit verbundene Abbremsmaneuver möglichst optimal, d.h.

mit möglichst geringer Aufheizung des Raumfahrzeugs, zu gestalten. Die Modellierung, die hierbei verwendet wird, ist relativ einfach (zweidimensionale Bahnen). Sie geht auf Scharmack²⁸ zurück und ist u. a. auch im Lehrbuch von Stoer und Bulirsch beschrieben. Das Re-entry Problem war über lange Zeit ein schwieriger benchmark Test für numerische Verfahren zur Lösung von Optimalsteuerungsproblemen. In Varianten tritt das Problem (und auch die hiermit verbundenen numerischen Schwierigkeit) natürlich bei vielen Bahnoptimierungsproblemen der Luft- und Raumfahrt auf.

Beispiel (12.13) (Das Re-entry Problem)

Eine Raumsonde vom Typ eine Apollokapsel ist beim Wiedereintritt in die Erdatmosphäre durch den Anstellwinkel (also ohne Schub) so zu steuern, dass die Aufheizung der Kapsel minimiert wird.

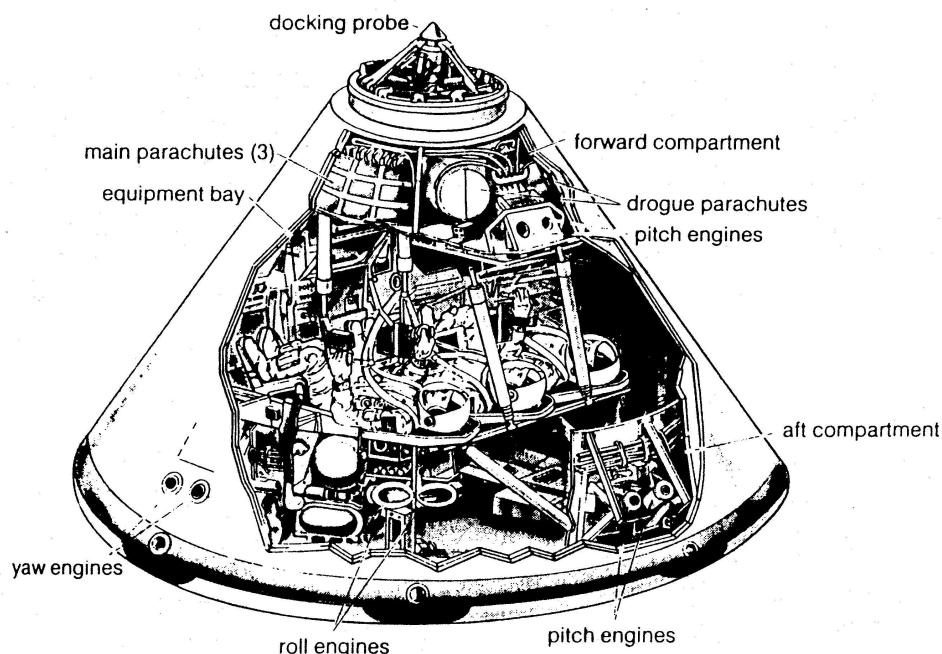


Abb. 12.1 Kommandomodul der Apollokapsel.

In der Abbildung 12.1 ist das Kommandomodul der Apollokapsel dargestellt. Nur dieses kehrt mit den drei Astronauten zur Erde zurück. Das erheblich größere Servicemodul wird kurz vor dem Eintritt in die Atmosphäre abgetrennt. Die Kapsel wiegt 5.9 Tonnen, sie hat eine Höhe von 3.23 m und einen Durchmesser 3.91 m. Gesteuert wird die Kapsel durch Anpassung ihre Position relativ zum Geschwindigkeitsvektor. Dies geschieht mit Hilfe von zehn Steuerdüsen, im Heck des Moduls.

²⁸D.K. Scharmack: An Initial value method of Trajectory Optimization Problems.
In: C.T. Leondes: Advances in Control Systems, Academic Press, New York, 1967.

Die mathematische Modellierung der zweidimensionalen Bewegung der Kapsel geschieht mittels der Zustandsgrößen v : Geschwindigkeitsbetrag, γ : Bahnneigungswinkel und ξ : relative Höhe ($= h/R = \text{Höhe/Erdradius}$). Mitunter tritt als vierte Zustandsgröße ζ noch die zurückgelegte Strecke auf der Erdoberfläche auf. Da wir hier jedoch keine Vorschriften für den Landeort machen wollen, kann diese entfallen.

Gesteuert wird die Kapsel durch den Winkel u zwischen der Symmetrieachse der Kapsel und dem Geschwindigkeitsvektor. Der Winkel u beeinflusst direkt die aerodynamischen Kräfte Auftrieb und Widerstand. Dieser Einfluss wird folgendermaßen durch die Beiwerte (Widerstandsbeiwert C_D und Auftriebsbeiwert C_L) modelliert.

$$\begin{aligned} C_D(u) &= C_{D0} - C_{D1} \cos u, \\ C_L(u) &= C_{L1} \sin u. \end{aligned} \quad (12.14)$$

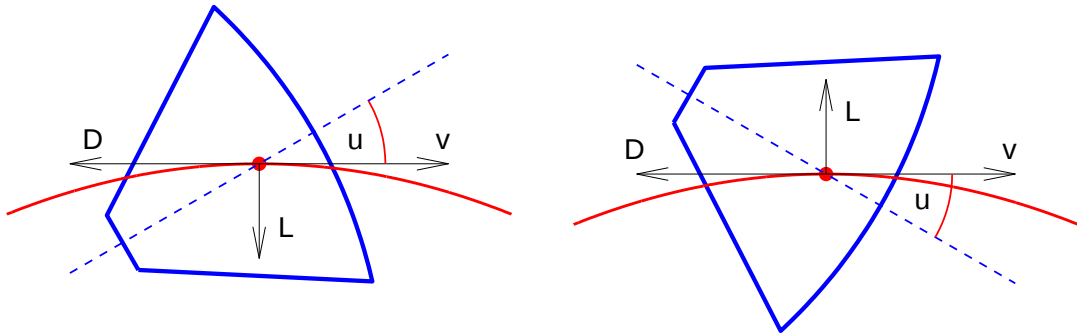


Abb. 12.2 Steuerung von Widerstands- und Auftriebskraft.

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} v' &= -\frac{S \rho v^2}{2m} C_D(u) - \frac{g \sin \gamma}{(1 + \xi)^2} \\ \gamma' &= \frac{S \rho v}{2m} C_L(u) + \frac{v \cos \gamma}{R(1 + \xi)} - \frac{g \cos \gamma}{v(1 + \xi)^2} \\ \xi' &= \frac{v \sin \gamma}{R} \end{aligned} \quad (12.15)$$

Hierbei ist S die Querschnittsfläche und m die Masse der Kapsel, g ist die Erdbeschleunigung und $\rho = \rho_0 \exp(-\beta R \xi)$ beschreibt die Luftdichte.

Die (skalierten²⁹) Parameter lauten: $C_{D0} = 1.174$, $C_{D1} = 0.9$, $C_{L1} = 0.6$, $R = 209$, $g = 3.2172 \times 10^{-4}$, $\beta = 4.26$, $\rho_0 = 2.704 \times 10^{-3}$, $S/m = 53200$.

Aufgabe ist es, die Kapsel von einem vorgegebenen Anfangszustand in einen vorgeschriebenen Endzustand so zu steuern, dass die Aufheizung der Kapsel, gemessen

²⁹Die verwendete Längeneinheit ist $10^5 \text{ft} \approx 30.48 \text{km}$.

durch das Funktional

$$I(u) = \int_0^{t_b} 10 v^3 \sqrt{\rho} dt, \quad (12.16)$$

minimiert wird. Die Randdaten, die Anfangs- und Endzustand beschreiben, lauten

$$\begin{aligned} v(0) &= 0.36, & v(t_b) &= 0.27, \\ \gamma(0) &= -8.1, & \gamma(t_b) &= 0, \\ \xi(0) &= 4/R, & \xi(t_b) &= 2.5/R. \end{aligned} \quad (12.17)$$

Damit sind alle Zutaten der Optimalsteuerungsaufgabe zusammengetragen. Man beachte, dass es sich um ein Problem mit freier Endzeit handelt, die Steuerung u ist keinen weiteren Restriktionen unterworfen. Sie tritt allerdings nur über $\sin u$ und $\cos u$ (nichtlinear) im Problem auf und ist daher auch nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt.

Wir stellen die notwendigen Bedingungen zusammen. Dabei nehmen wir an, dass das Optimalsteuerungsproblem eine *reguläre* Lösung besitzt, wir also $\ell_0 = 1$ setzen können.

Die HAMILTON-Funktion lautet dann

$$H = 10 v^3 \sqrt{\rho} + \lambda_v v' + \lambda_\gamma \gamma' + \lambda_\xi \xi',$$

woraus sich (mit etwas Aufwand) die folgenden adjungierten Differentialgleichungen ergeben.

$$\begin{aligned} \lambda'_v &= -30\sqrt{\rho} v^2 + \lambda_v \frac{S \rho v}{m} C_D(u) \\ &\quad - \lambda_\gamma \left(\frac{S \rho}{2m} C_L(u) + \frac{\cos \gamma}{R(1+\xi)} + \frac{g \cos \gamma}{v^2(1+\xi)^2} \right) - \lambda_\xi \frac{\sin \gamma}{R}, \\ \lambda'_\gamma &= \lambda_v \frac{g \cos \gamma}{(1+\xi)^2} + \lambda_\gamma \frac{\sin \gamma}{1+\xi} \left(\frac{v}{R} - \frac{g}{v(1+\xi)} \right) - \lambda_\xi \frac{v \cos \gamma}{R}, \\ \lambda'_\xi &= 5\beta R \sqrt{\rho} v^3 - \lambda_v \left(\frac{S \beta R \rho v^2}{2m} C_D(u) + \frac{2 g \sin \gamma}{(1+\xi)^3} \right) \\ &\quad + \lambda_\gamma \left(\frac{S \beta R \rho v}{2m} C_L(u) + \frac{v \cos \gamma}{R(1+\xi)^2} - \frac{2 g \cos \gamma}{v(1+\xi)^3} \right). \end{aligned} \quad (12.18)$$

Zur Berechnung der optimalen Steuerung verwenden wir die Bedingungen e) und f) aus Satz (12.10)

$$\begin{aligned}
H_u &= \frac{S \rho v}{2m} \left(-v \lambda_v \frac{\partial C_D}{\partial u} + \lambda_\gamma \frac{\partial C_L}{\partial u} \right) \\
&= \frac{S \rho v}{2m} \left(-v \lambda_v C_{D1} \sin u + \lambda_\gamma C_{L1} \cos u \right) = 0, \\
H_{uu} &= \frac{S \rho v}{2m} \left(-v \lambda_v C_{D1} \cos u - \lambda_\gamma C_{L1} \sin u \right) \geq 0.
\end{aligned}$$

Da wir annehmen können, dass der Faktor $(S \rho v)/(2m)$ längs einer physikalisch sinnvollen Lösung positiv ist, liefern diese beiden Bedingungen eine eindeutig bestimmte Lösung für der Einheitsvektor $(\cos u, \sin u)^T$, nämlich

$$\begin{aligned}
\sin u &= - \frac{\lambda_\gamma C_{L1}}{\sqrt{(\lambda_\gamma C_{L1})^2 + (v \lambda_v C_{D1})^2}}, \\
\cos u &= - \frac{v \lambda_v C_{D1}}{\sqrt{(\lambda_\gamma C_{L1})^2 + (v \lambda_v C_{D1})^2}}.
\end{aligned} \tag{12.19}$$

Man erkennt, dass die LEGENDRE-CLEBSCH Bedingung auch tatsächlich benötigt wird, um das Vorzeichen in (12.19) entscheiden zu können. Im Übrigen sind durch (12.19) auch tatsächlich die globalen Minima der HAMILTON-Funktion bezüglich der Steuerung u charakterisiert.

Es verbleiben nun noch die natürlichen Randbedingungen, die sich wegen der vorgegebenen Anfangs- und Endzustände lediglich auf die freie Endzeit beziehen. Nach (6.24) gilt daher

$$H[t_b] = 0. \tag{12.20}$$

Das Randwertproblem ist nunmehr vollständig aufgestellt: Wir haben die sechs Differentialgleichungen (12.15) und (12.18), die wegen der freien Endzeit auf $[0, 1]$ transformiert werden, sowie eine triviale Differentialgleichung für die Endzeit t_b . In den Differentialgleichungen sind die Steuerungsterme $\cos u$ und $\sin u$ durch (12.19) zu ersetzen. Weiterhin haben wir sechs Randbedingungen in (12.17), sowie die zusätzliche (nichtlineare) Randbedingung (12.20).

Diese resulierende Randwertaufgabe lässt sich sodann mit dem Mehrzielverfahren BNDSCO relativ mühelos numerisch lösen.

In den folgenden Abbildungen 12.3 und 12.4 sind die sich ergebenden Verläufe der Zustandsgrößen, der Steuerung und der adjungierten Variablen dargestellt. Ferner ist auch der Verlauf der Funktion $H_{uu}[t]$ dargestellt, um sicher zu gehen, dass die numerische Lösung auch die strikte LEGENDRE-CLEBSCH Bedingung erfüllt.

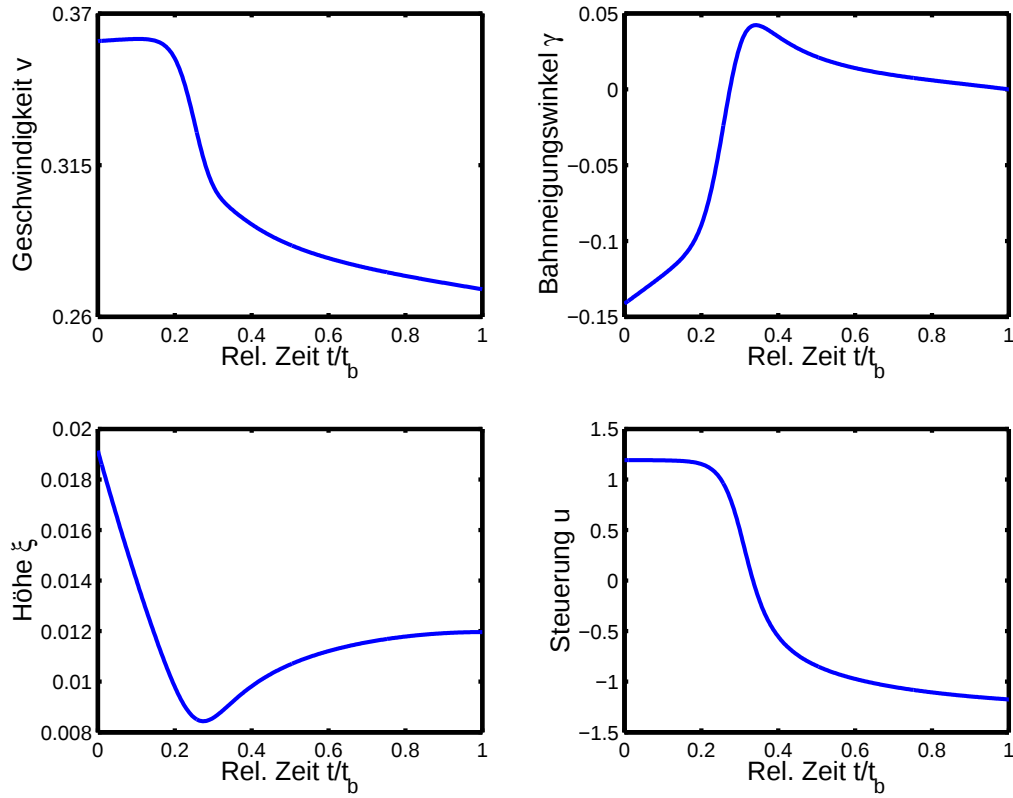


Abb. 12.3 Reentry Problem: Zustandsgrößen und Steuerung.

Für die adjungierten Variablen und die freie Endzeit hat BNDSCO die folgenden Daten berechnet

$$\begin{aligned}
 \lambda_v(0) &= -0.5114325104 \times 10^0 & \lambda_v(t_b) &= -0.1423407313 \times 10^1 \\
 \lambda_\gamma(0) &= -0.6912051015 \times 10^0 & \lambda_\gamma(t_b) &= 0.1383359196 \times 10^1 \\
 \lambda_\xi(0) &= -0.2412468164 \times 10^1 & \lambda_\xi(t_b) &= -0.1313762727 \times 10^2 \\
 t_b &= 0.2249007559 \times 10^3
 \end{aligned} \tag{12.21}$$

Die HAMILTON-Funktion, die ja für dieses autonome Optimalsteuerungsproblem konstant sein muss, lässt sich längs der numerisch berechneten Lösung auswerten. Man erhält tatsächlich Werte, die (betragsmässig) in der Größenordnung der Maschinengenauigkeit, also zwischen 10^{-15} und 10^{-16} liegen.

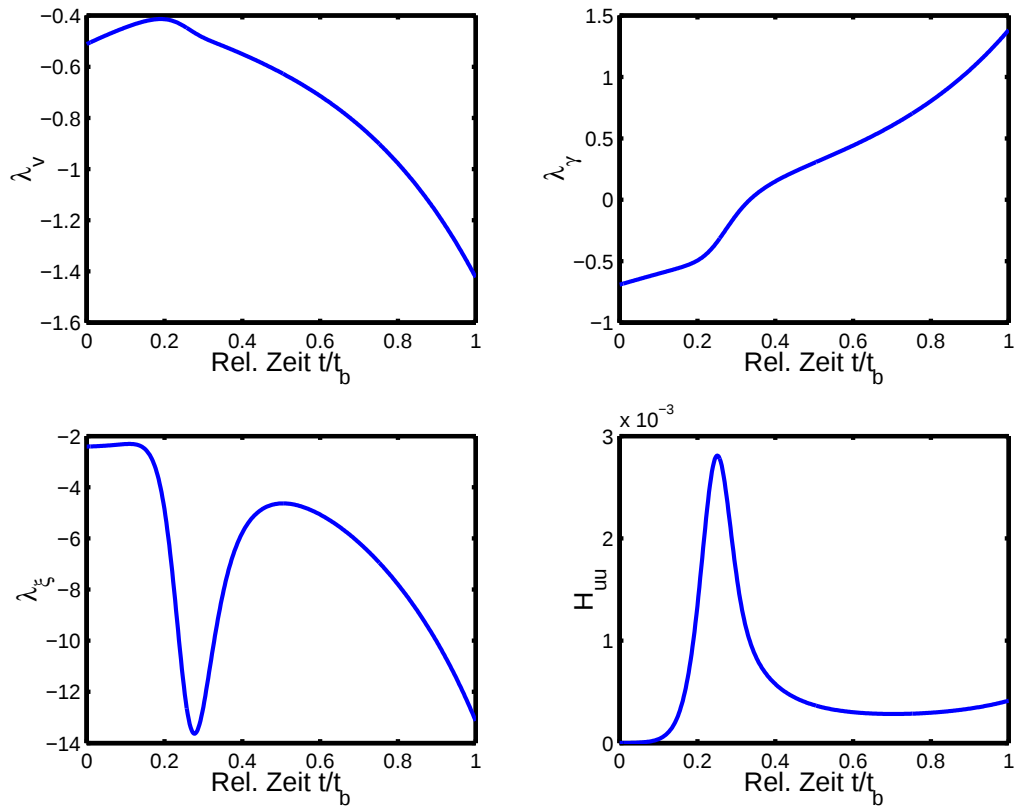


Abb. 12.4 Reentry Problem: Adjungierte Variable und die Funktion H_{uu} .