Sapienza Università di Roma

A.A. 2008-2009

CONFRONTO TRA SOLUZIONI DI PROBLEMI DIFFERENZIALI MEDIANTE SIMMETRIZZAZIONE

Relatrice

Prof.ssa Filomena Pacella

Candidata

Camilla Nobili

Indice

Introduzione

Una delle prime cose che un giovane matematico realizza è che le soluzioni di un problema differenziale, in generale, non si possono trovare esplicitamente. Se però i dati del problema presentano un certo numero di simmetrie allora il problema stesso potrebbe diventare "più semplice", e nei casi più fortunati se ne può addirittura calcolare la soluzione esplicitamente. Inoltre, la conoscenza precisa di ciò che accade nelle "situazioni ideali" di massima simmetria può talvolta aiutarci a comprendere meglio il problema reale che stiamo studiando.
Proprio questo è lo scopo centrale di questa tesi; nello specifico noi prenderemo in considerazione un problema ellittico con dato al bordo in forma di divergenza del tipo

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f & \text{su } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove Ω è un dominio limitato di $\mathbb{R}^N$, e lo confronteremo con il relativo problema *simmetrizzato.* Un Teorema dovuto a Giorgio Talenti ci darà la possibilità di confrontare le soluzioni di questi due problemi differenziali e ricavarne stime nelle opportune norme.
Finora abbiamo parlato della "filosofia" dietro la quale ci muoviamo. Ma cosa vuol dire effettivamente *simmetrizzare* un problema? Nel caso in esame, ad esempio, questo significa sostituire i suoi dati, ovvero la funzione f e il suo insieme di definizione Ω, con altri dati f^* e Ω^* che ne conservano inalterate alcune proprietà, ma possiedono determinate simmetrie;
Il confronto con il problema più simmetrico ci permetterà di stimare alcune caratteristiche quantitative e qualitative della soluzione del problema originario.
Citando il matematico indiano S.Kesavan: *La Natura spesso sembra scegliere le forme perfettamente simmetriche quando deve ottimizzare certe caratteristiche dei corpi* . Se il problema ha una struttura variazionale spesso si verifica che il problema simmetrico associato è quello la cui soluzione minimizza (oppure massimizza) un certo funzionale; nei casi che considereremo, infatti, la simmetrizzazione è un'operazione che necessariamente fa decrescere (o crescere) tale funzionale.
Nel primo Capitolo della tesi illustreremo lo spazio di funzioni in cui muover-

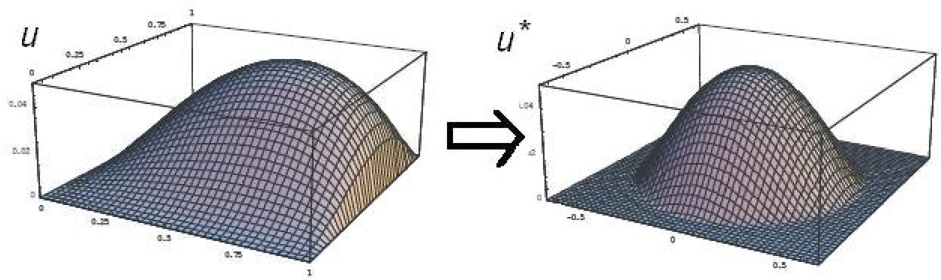


Figura 1: u ,la soluzione del problema originario, è definita sul rettagolo R. Mentre u*, la soluzione del problema simmetrizzato, è definita su un cerchio avente la stessa area di R ed è a simmetria radiale.

ci per la ricerca delle soluzioni del problema in esame. Nel secondo capitolo familiarizzeremo con il concetto di riordinamento unidimensionale, dimostreremo alcune sue proprietà, fino ad arrivare alla sua generalizzazione al caso N-dimensionale, ovvero alla *simmetrizzazione di Schwarz.* Questo nuovo concetto sarà lo strumento principale nel Capitolo 3 per discutere il Teorema di Talenti, il quale esibirà la relazione che sussiste tra il problema differenziale ellittico in questione e quello simmetrizzato.
Infine vedremo come i risultati precedenti possano essere usati in casi concreti mostrando due intesessanti applicazioni a problemi derivanti dalla Fisica Matematica.
Prima di cominciare, vorrei rivolgere un ringraziamento alla professoressa Filomena Pacella per avermi consigliato un argomento così affascinante e moderno, e per avermi fatto intravedere quella profondità della matematica che, alla fine del corso di laurea triennale, i miei occhi di studentessa ancora non riescono a focalizzare.

Capitolo 1

Preliminari

1.1 Lo spazio $\mathscr{D}(\Omega)$

Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ (in particolare potebbe coincidere con esso).

Definizione 1.1. $\mathscr{D}(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni reali in $\mathbb{R}^N$ (**funzioni *test***) che sono infinitamente differenziabili e hanno supporto compatto contenuto in Ω.

Il **supporto di una funzione** f è noto essere il complementare del più grande aperto su cui f si annulla, ovvero la chiusura dell'insieme $\{x : f(x) \neq 0\}$.
Vogliamo arrivare a dare una definizione *intrinseca* di supporto che copra anche il caso in cui si lavori con con classi di equivalenza di funzioni, come nel caso degli spazi L^p.

Proposizione 1.1. *Sia* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *una qualunque funzione. Consideriamo una famiglia* $(\Omega_i)_{i\in I}$ *di aperti di* $\mathbb{R}^N$ *tale che, per ogni* $i \in I$*,* $f = 0$ *q.o. su* Ω_i*. Poniamo* $\Omega = \cup_{i\in I}\Omega_i$*. Allora* $f = 0$ *q.o. su* Ω*.*

Definizione 1.2. Il **supporto** di f, che denoteremo con $\mathrm{Supp} f$, è il complemento di Ω.

In questo modo si ha $\mathrm{Supp} f_1 = \mathrm{Supp} f_2$ se $f_1 = f_2$ q.o.
$\mathscr{D}(\Omega)$ è uno spazio vettoriale: infatti

- se φ_1, φ_2 sono in $\mathscr{D}(\Omega)$ allora $\varphi_1 + \varphi_2 \in \mathscr{D}(\Omega)$;

- se φ è in $\mathscr{D}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\lambda\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

In realtà $\mathscr{D}(\Omega)$ è anche un algebra rispetto alla moltiplicazione, dal momento che se $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}(\Omega)$ allora $\varphi_1\varphi_2 \in \mathscr{D}(\Omega)$. Più in generale, se $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ e ψ è una funzione infinitamente differenziabile il cui supporto non è necessariamente compatto, allora $\varphi\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ ed il supporto di $\varphi\psi$ è contenuto nell'intersezione dei supporti di φ e ψ.

Le funzioni di $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ sono molto utili per approssimaere funzioni meno regolari, ad esempio le funzioni continue.

Teorema 1.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto. Allora $\mathscr{D}(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$ per ogni $1 \leqslant p < \infty$.*

Si può munire lo spazio $\mathscr{D}(\Omega)$ di una topologia per renderlo uno spazio vettoriale topologico. Noi diremo solo quali sono le successioni convergenti in questo spazio.
Una successione di funzioni φ_j appartenente a $\mathscr{D}(\Omega)$ si dice **convergente** ad una funzione $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ se esiste un insieme compatto K tale che

1. i supporti delle funzioni φ_j sono in K per ogni j;
2. le derivate di ogni ordine di φ_j convergono uniformemente in K, per $j \to \infty$, alle derivate corrispondenti di φ.

Questo è un tipo di convergenza di "**ordine infinito**" dal momento che implica l'uniforme convergenza per tutte le derivate.

Definizione 1.3. Un funzionale lineare e continuo $\mathcal{T}$ sullo spazio $\mathscr{D}(\Omega)$ è chiamato **distribuzione**.

Il funzionale $\mathcal{T}$ applicato ad un qualunque $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ restituisce un numero $\mathcal{T}(\varphi)$, anche denotato con $\langle \mathcal{T}, \varphi \rangle$.
Il funzionale $\mathcal{T}$ ha le seguenti proprietà:

1. $\mathcal{T}(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathcal{T}(\varphi_1) + \mathcal{T}(\varphi_2)$ per ogni $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}(\Omega)$;
2. $\mathcal{T}(\lambda\varphi) = \lambda\mathcal{T}(\varphi)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;
3. se φ_j converge a φ per $j \to \infty$ nel senso della topologia di $\mathscr{D}(\Omega)$, il numero reale $\mathcal{T}(\varphi_j)$ converge al $\mathcal{T}(\varphi)$.

Le distribuzioni stesse formano uno spazio vettoriale $\mathscr{D}'(\Omega)$ in cui la somma e il prodotto per scalare sono definite come

- $\langle \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2, \varphi \rangle = \langle \mathcal{T}_1, \varphi \rangle + \langle \mathcal{T}_2, \varphi \rangle$ per ogni $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$;
- $\langle \lambda\mathcal{T}, \varphi \rangle = \lambda\langle \mathcal{T}, \varphi \rangle$ per ogni $\mathcal{T} \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

L'applicazione che a $\mathcal{T} \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ associa il numero reale $\langle \mathcal{T}, \varphi \rangle$ è una forma bilineare.
Lo spazio $\mathscr{D}'(\Omega)$ è contenuto strettamente in $\mathscr{D}^*(\Omega)$, il duale di $\mathscr{D}(\Omega)$, l'insieme dei funzionali lineari (continui o non) su $\mathscr{D}(\Omega)$.

Esempio 1.1. Sia f una funzione localmente sommabile. Questa definisce una distribuzione $\mathcal{T}_f$ nel modo seguente:

$$\langle \mathcal{T}_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)dx \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N).$$

Denotiamo con

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

la derivata parziale di ogni ordine rispetto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Esempio 1.2. Se f è una funzione localmente sommabile, il funzionale

$$\langle \mathcal{T}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) D\varphi(x) dx = \langle \mathcal{T}_f, D\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$$

è una distribuzione.

Esempio 1.3. La **distribuzione di Dirac** δ centrata nell'origine è definita da:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N).$$

Se invece vogliamo definirla in un generico punto a di $\mathbb{R}^N$ poniamo

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a).$$

E' fondamentale osservare che *"le distribuzioni matematiche costituiscono la definizione matematicamente rigorosa delle distribuzioni fisiche"*.
Le distribuzioni che si incontrano in fisica (la massa, la distribuzione di cariche elettriche...) suggeriscono nuove distribuzioni matematiche.

Esempio 1.4 (La funzione di Dirac)**.** I fisici quantistici usano, invece della distribuzione δ di Dirac, la **funzione di Dirac** che soddisfa

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \int_{\mathbb{R}^N} \delta dx = 1.$$

Questa non è una vera e propria funzione infatti le sue proprietà sono contradditorie; si osservi,ad esempio, che $\delta(x)$ essendo una funzione nulla quasi ovunque ha integrale secondo Lebesgue uguale a zero, mentre la funzione $k\delta(x)$ che assume gli **stessi** valori di $\delta(x)$ (0 e ∞) ha integrale che vale k!

Sia $\mathcal{T} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ una distribuzione; il nostro prossimo obiettivo è di definire l'oggetto $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_1}$ in maniera tale che se $\mathcal{T} = f$ è una funzione continua con derivata continua, possiamo trattare $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ come la derivata parziale classica. Osserviamo che se f è una funzione di classe $C^1(\mathbb{R}^N)$, abbiamo che

$$\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial f}{\partial x_1} \varphi dx.$$

Del resto, per il Teorema di Fubini, possiamo invertire l'ordine di integrazione e ottenere

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx_2 \cdots dx_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1} \varphi dx_1.$$

Dunque integrando per parti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 = [f\varphi]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1.$$

Il primo membro di destra scompare perché φ è a supporto compatto e perciò rimane

$$-\int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx_2 \cdots dx_n \int_{-\infty}^{+\infty} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 = -\int_{\mathbb{R}^N} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx = -\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \rangle$$

ovvero

$$\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi \rangle = -\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \rangle.$$

Quindi, per analogia, siamo condotti a *definire* la derivata $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_1}$ di $\mathcal{T}$ come la distribuzione

$$\langle \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_1}, \varphi \rangle = -\langle \mathcal{T}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \rangle$$

Osservazione 1.1. $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_1}$ è un funzionale lineare di φ e se φ_j converge a φ in $\mathscr{D}(\Omega)$ allora $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}$ converge a $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ in $\mathscr{D}(\Omega)$; dunque

$$\langle \mathcal{T}, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \rangle \to \langle \mathcal{T}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \rangle$$

che implica

$$\langle \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_1}, \varphi_j \rangle \to \langle \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_1}, \varphi \rangle.$$

Ne consegue che $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_1}$ è uniformemente continuo, e perciò è una distribuzione.

Questo discorso si estende facilmente alle derivate di ordine qualunque; possiamo riassumere il risultato nel caso più generale nel seguente

Teorema 1.2. *Qualunque distribuzione $\mathcal{T}$ ha derivate di ogni ordine e*

$$\langle D^\alpha \mathcal{T}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \mathcal{T}, D^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

1.2 Lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^N$ e $\partial\Omega$ la sua frontiera, e sia $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Definizione 1.4. Lo **spazio di Sobolev** $W^{1,p}(\Omega)$ è definito da

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \exists\, g_1, g_2, \ldots, g_N \in L^p(\Omega) :$$

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \;\forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),\; \forall\, i = 1, \ldots, N\}.$$

Poniamo $H^1(\Omega)$=$W^{1,2}(\Omega)$.
Per $u \in W^{1,p}(\Omega)$ poniamo $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$ e $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_N})$.
Lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ è munito della norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p(\Omega)}.$$

Lo spazio $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ è munito del prodotto scalare

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i})_{L^2(\Omega)}$$

e la norma associata è

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}$$

che è equivalente alla norma di $W^{1,2}(\Omega)$.
Se $u \in C^1_c(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ e se $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ per ogni $i = 1, \ldots, N$ (dove $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ è la derivata parziale usuale di u) allora $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Inoltre le derivate parziali di u nel senso usuale coincidono con le derivate parziali nel senso di $W^{1,p}(\Omega)$.
Usando il linguaggio della teoria delle distribuzioni,si può dire che $W^{1,p}(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni $u \in L^p(\Omega)$ tali che tutte le derivate parziali $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ per $i = 1, \ldots, N$ (nel senso delle distribuzioni) appartengono a $L^p(\Omega)$.
Lo spazio di Sobolev con esponente p eredita tutte le proprietà (completezza, separabilità, riflessività) dal corrispondente spazio $L^p(\Omega)$. Vale in altre parole la seguente

Proposizione 1.2. *Lo spazio* $W^{1,p}(\Omega)$ *è uno spazio di Banach per 1*$\leqslant p \leqslant \infty$*, è riflessivo per* $1 < p < \infty$ *e separabile per* $1 \leqslant p < \infty$*. Lo spazio* $H^1(\Omega)$ *è uno spazio di Hilbert separabile.*

Dimostrazione. Supponiamo, per semplicità che Ω sia un intervallo I di $\mathbb{R}$. Sia u_n una successione di Cauchy in $W^{1,p}(I)$: questo vuol dire che

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\ n_\varepsilon : \|u_n - u_m\|_{W^{1,p}} < \varepsilon \quad \forall\, n, m > n_\varepsilon$$

e dunque

$$(\int_I |u_n - u_m|^p)^{1/p} + (\int_I |u'_n - u'_m|^p)^{1/p} < \varepsilon.$$

Essendo entrambi i membri di sinistra positivi ne deduciamo che u_n e u'_n sono anch'esse successioni di Cauchy in $L^p(I)$. Ma $L^p(I)$ è completo e dunque $u_n \to u \in L^p(I)$ e $u'_n \to g \in L^p(I)$. poiché per ipotesi $u_n \in W^{1,p}(I)$ vale $\int_I u_n \varphi'$=$-\int_I u'_n \varphi$ per ogni$\varphi \in C^1_c(I)$; passando al limite sotto il segno di

integrale (il che è lecito per il Teorema di Lebesgue generalizzato applicato a $\{u_n\varphi'\}$ e $\{u_n'\varphi\}$) si ha che $\int_I u\varphi'$=-$\int_I g\varphi$ per ogni $\varphi \in C_c^1(I)$. Dunque $u \in W^{1,p}$, $u' = g$ e $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \to 0$.
Per verificare la riflessività di $W^{1,p}(\Omega)$, basta osservare che lo spazio prodotto $E = L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$ è riflessivo. L'applicazione $T : W^{1,p}(\Omega) \to E$ che associa ad u in $W^{1,p}$ la coppia (u, u') è un isometria (si dimostra facilmente che T è iniettiva e preserva le norme), ed essendo $T(W^{1,p}(\Omega))$ un sottospazio chiuso di E ne segue che $T(W^{1,p}(\Omega))$ è riflessivo. Grazie alle proprietà isometriche di T, lo è anche $W^{1,p}(\Omega)$. Ragionando allo stesso modo (ovvero tramite l'isometria T), dalla separabilità di E si deduce quella di $W^{1,p}(\Omega)$. □

Ricordiamo che una funzione $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ è **assolutamente continua** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni famiglia finita $\{(x_i, x_i')\}$ di intervalli disgiunti contenuti in $[a, b]$ tali che

$$\sum_i |x_i' - x_i| < \delta$$

risulta essere

$$\sum_i |f(x_i') - f(x_i)| < \varepsilon.$$

Teorema 1.3. *Sia* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervallo aperto e* $u \in W^{1,p}(I)$. *Allora* u *è assolutamente continua* .

Introduciamo un importante sottospazio di $W^{1,p}(\Omega)$, che denoteremo con $W_0^{1,p}(\Omega)$. Per $1 \leqslant p < \infty$ $W_0^{1,p}(\Omega)$ è definito come la chiusura di $\mathscr{D}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$. Quindi $W_0^{1,p}(\Omega)$ è un sottospazio chiuso di $W^{1,p}(\Omega)$ e i suoi elementi possono essere approssimati nella norma di $W^{1,p}(\Omega)$ da funzioni C^∞ a supporto compatto. In generale $W_0^{1,p}(\Omega)$ è contenuto strettamenete in $W^{1,p}(\Omega)$, tranne nel caso in cui $\Omega = \mathbb{R}^N$; infatti

Teorema 1.4. *Sia* $1 \leqslant p < \infty$. *Allora* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Ora richiamiamo brevemente, senza dimostrazione, alcuni risultati fondamentali della teoria degli spazi di Sobolev.

- Teorema di Approssimazione

  Ci interessa approssimare elementi di $W^{1,p}(\Omega)$ con funzioni lisce per poter "trasportare per densità" alcuni teoremi validi per le funzioni C^∞.

  Teorema 1.5 (Friedrichs)**.** *Sia* $1 \leqslant p < \infty$ *e* $u \in W^{1,p}(\Omega)$. *Allora esiste una successione* $\{u_m\}$ *in* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ *tale che* $u_m \to u$ *e* $\frac{\partial u_m}{\partial x_i}|_{\Omega'} \to \frac{\partial u}{\partial x_i}|_{\Omega'} \in L^p(\Omega')$ *per ogni* $1 \leqslant p \leqslant n$ *e per ogni* Ω' *relativamente compatto in* Ω.

- Teorema di Estensione

  Quello che vorremmo fare è estendere un funzionale di $W^{1,p}(\Omega)$ ad uno di $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, dato che è molto facile dimostrare dei risultati in $\mathbb{R}^N$ piuttosto che in domini limitati. Quello che ci chiediamo è se questa estensione di funzionali è sempre possibile e continua in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Vedremo che ciò dipende dalla natura di Ω.

Definizione 1.5. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$. Un **operatore di estensione** $\mathcal{P}$ per $W^{1,p}(\Omega)$ è un operatore lineare limitato

$$\mathcal{P} : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

tale che $\mathcal{P}u|_\Omega = u$ per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 1.6. *Se Ω è un insieme aperto di $\mathbb{R}^N$ con frontiera regolare tale che esiste l'operatore di estensione $\mathcal{P} : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ allora, dato $u \in W^{1,p}(\Omega)$, esiste una successione in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ tale che $u_m|_\Omega \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$.*

Passiamo ad un risultato più generale.

Teorema 1.7 (Stampacchia)**.** *Sia G una funzione Lipschitziana di $\mathbb{R}$ in se stesso, con $G(0) = 0$. Allora, se Ω è limitato, $1 < p < \infty$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, abbiamo $G \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Come conseguenza abbiamo il seguente

Corollario 1.1. *Sia $u \in H_0^1(\Omega)$ con Ω insieme aperto e limitato in $\mathbb{R}^N$. Allora $|u|$,u^+ e u^- appartengono a $H_0^1(\Omega)$ dove*

$$u^+ = \max\{u(x), 0\}$$
$$u^- = \max\{-u(x), 0\}.$$

Per quanto riguarda l'esistenza di questa estensione abbiamo

Teorema 1.8. *Sia $\Omega \in \mathbb{R}^N$ un insieme aperto di classe C^1, con frontiera $\partial\Omega$ limitata. Allora esiste un operatore di estensione $\mathcal{P} : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Concludiamo con una disuguaglianza importantissima per lo studio delle soluzioni deboli dei problemi con valori al bordo di Dirichlet.

Proposizione 1.3 (Disuguaglianza di Poincarè)**.** *Sia Ω un insieme limitato in $\mathbb{R}^N$. Allora per ogni $1 \leqslant p \leqslant \infty$ esiste una costante $C = C(\Omega, p)$ tale che*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \textit{per ogni} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Osservazione 1.2. La disuguaglianza di Poincarè vale ancora se il dominio è limitato in almeno una direzione ma non è più vera in domini non limitati in tutte le direzioni, per esempio in $\Omega = \mathbb{R}^N$.

- Teorema di immersione

Per $N = 1$ abbiamo visto che gli elementi di $W^{1,p}(\Omega)$ possono essere immersi nello spazio delle funzioni **assolutamente continue**. In dimensione maggiore il discorso si fa più complicato. D'altronde è possibile dimostrare che che gli elementi di $W^{1,p}(\Omega)$ possono essere inclusi negli spazi di Lebesgue $L^q(\Omega)$ con q più grande di p.

Studiamo innanzi tutto le immersioni in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Definiamo l'**esponente coniugato di Sobolev** p^* $(p^* > p)$ come quel numero tale che

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

Teorema 1.9 (Disuguaglianza di Sobolev)**.** *Sia* $1 \leqslant p < N$*; allora esiste una costante* $C = C(p, N) > 0$ *tale che*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \textit{per ogni} \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

In particolare abbiamo l'immersione continua

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \to L^{p^*}(\mathbb{R}^N).$$

Per il caso $p = N$ abbiamo

Teorema 1.10. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un insieme aperto. Allora*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \text{per ogni} \quad q \in [N, \infty).$$

Infine per il caso $p > N$.

Teorema 1.11. *Sia* $p > N$*. Allora abbiamo l'immersione continua*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \to L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Nel caso in cui Ω sia un aperto di $\mathbb{R}^N$ si ha

Teorema 1.12 (Immersione di Sobolev)**.** *Sia* Ω *di classe* C^1 *con frontiera limitata. Allora valgono le seguenti immersioni continue:*

1. *se* $1 \leqslant p < N$ *allora* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$*;*
2. *se* $p = N$ *allora* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall\ q \in [p, +\infty)$*;*
3. *se* $p > N$ *allora* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$*.*

Inoltre, se $p > N$ *e* $u \in W^{1,p}(\Omega)$*, allora*

$$|u(x) - u(y)| \leqslant c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}|x - y|^{\lambda},$$

per quasi ogni $x, y \in \Omega$*, con* $\lambda = 1 - \frac{N}{p}$ *e* c *costante che dipende da* Ω*,* p *e* N*. In particolare* $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$*.*

Concludiamo con un importante risultato di compattezza.

- Teorema di Compatteza

Ci chiediamo: quali delle immersioni sopra citate risultano essere compatte? La risposta a questa domanda ci è data dal seguente

Teorema 1.13 (Rellich-Kondrachov)**.** *Sia* Ω *un aperto limitato di classe* C^1*. Si ha che*

1. *se* $1 < p < N$ *allora* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)\ \forall\ q \in [1, p^*)$*;*
2. *se* $p = N$ *allora* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)\ \forall\ q \in [1, +\infty)$*;*
3. *se* $p > N$ *allora* $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$*;*

e queste immersioni sono compatte. In particolare, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ *per ogni* p *e l'immersione è compatta.*

Capitolo 2

Simmetrizzazione di Schwarz

2.1 Definizioni e prime proprietà

Siano $X \subset \mathbb{R}^N$ e $Y \subset \mathbb{R}^M$ e consideriamo gli spazi metrici (X, μ) e (Y, ν).
Riordinare una funzione μ-misurabile u definita in X a valori reali significa costruire una nuova funzione u^* a valori reali definita in Y che abbia alcune proprietà desiderate, come la monotonia e certe simmetrie, ma tale che *conservi la misura degli insiemi di livello.*
Quello che ci proponiamo di fare è di costruire, data una funzione a valori reali e definita in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, una funzione associata nella palla centrata nell'origine e della stessa misura di Ω, i cui insiemi di livello abbiano la stessa misura di Lebesgue; inoltre, richiediamo che tale funzione sia *radiale* e *radialmente decrescente.*

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme limitato e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile.

Definizione 2.1. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'**insieme di sovralivello** di u è l'insieme

$$\{u > t\} = \{x \in \Omega | u(x) > t\}$$

e la **funzione di distribuzione** associata ad u è definita come

$$\mu_u(t) = |\{u > t\}|$$

dove con $|\cdot|$ indichiamo la misura di Lebesgue N-dimensionale dell'insieme.

La funzione μ_u è monotona strettamente decrescente in t; per $t \geqslant \operatorname{ess\,sup}(u)$ $\mu_u(t) = 0$ mentre per $t \leqslant \operatorname{ess\,inf}(u)$ $\mu_u(t) = |\Omega|$. Quindi i valori assunti da $\mu_u(t)$ variano nell'intervallo $[0, |\Omega|]$.

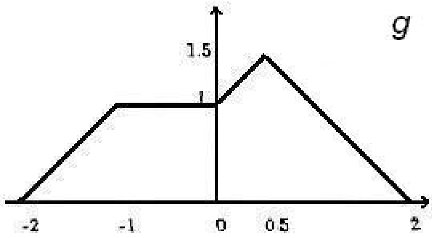
Definizione 2.2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitato e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Il **riordinamento unidimensionale decrescente** di u è la funzione $u^\sharp$ definita in $[0, |\Omega|]$ tale che

$$u^\sharp(0) = \operatorname{ess\,sup}(u)$$

$$u^\sharp(s) = \inf\{t | \mu_u(t) < s\}, \quad s > 0.$$

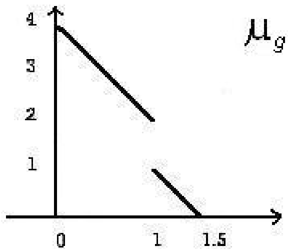
Esempio 2.1. Siano $\Omega = [-2, 2] \subset \mathbb{R}$ e $g : \Omega \to \mathbb{R}$ definita come segue

$$g(y) = \begin{cases} 2 + y & -2 \leqslant y \leqslant -1 \\ 1 & -1 < y \leqslant 0 \\ 1 + y & 0 < y \leqslant 0.5 \\ 2 - y & 0.5 < y \leqslant 2 \end{cases}$$



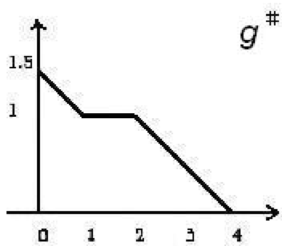
La *funzione di distribuzione* associata a g è:

$$\mu_g(t) = \begin{cases} 4 - 2t & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 3 - 2t & 1 < t \leqslant 1.5 \\ 0 & t > 1.5 \end{cases}$$



e la funzione *riordinata* $g^\sharp$ è:

$$g^\sharp(s) = \begin{cases} \frac{3-s}{2} & 0 \leqslant s \leqslant 1 \\ 1 & 1 < s \leqslant 2 \\ \frac{4-s}{2} & 2 < s \leqslant 4 \end{cases}$$



Se μ_u è continua e strettamente decrescente $u^\sharp$ è l'inversa di μ_u in un opportuno intervallo.
Più in generale $u^\sharp$ è l'*inversa generalizzata* di μ_u, nel senso che il suo grafico si ottiene ribaltando quello di μ_u rispetto alla bisettrice del primo quadrante, trasformando le zone in cui μ_u è costante in punti di discontinuità per $u^\sharp$ e i punti di discontinuità di μ_u in zone in cui $u^\sharp$ è costante.
Esaminiamo le proprietà che derivano direttamente dalla definizione di riordinamento:

Proposizione 2.1. *Sia* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *con* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *limitato. Allora* $u^\sharp$ *è decrescente e continua a sinistra.*

Dimostrazione. **Decrescenza**: Tenendo a mente la definizione abbiamo che se $s_1 < s_2$ allora $|\{u > t\}| < s_1 < s_2$ e quindi $|\{u > t\}| < s_2$. Perciò $\{t|\mu_u(t) < s_1\} \subset \{t|\mu_u(t) < s_2\}$ e dunque ne segue che $u^\sharp(s_1) \geqslant u^\sharp(s_2)$.
Continuità a sinistra: Sia $s \in (0, |\Omega|)$. Per definizione di $u^\sharp$ per ogni $\varepsilon > 0$ esiste t tale che $u^\sharp(s) \leqslant t \leqslant u^\sharp(s) + \varepsilon$ e $\mu_u(t) < s$.
Sia $h > 0$ tale che $\mu_u(t) < s - h < s$; allora per ogni $0 < h' \leqslant h$ si ha $\mu_u(t) < s - h' < s$ che implica $u^\sharp(s) \leqslant u^\sharp(s - h') < u^\sharp(s) + \varepsilon$. □

Proposizione 2.2. *L'applicazione* $u \to u^\sharp$ *è crescente, cioè se* $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ *e* $u \leqslant v$ *allora* $u^\sharp \leqslant v^\sharp$.

Dimostrazione. Siccome $u \leqslant v$ allora $\{u > t\} \subset \{v > t\}$.
Dunque $\{t||\{v > t\}| < s\} \subset \{t||\{u > t\}| < s\}$. □

Definizione 2.3. Due funzioni a valori reali si dicono **equimisurabili** se hanno la stessa funzione di distribuzione. Due funzioni equimisurabili sono dette **riordinamenti** l'una dell'altra.

Proposizione 2.3. *La funzione* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *e la funzione* $u^\sharp : [0, |\Omega|] \to \mathbb{R}$ *sono equimisurabili, ovvero per ogni* $t \in \mathbb{R}$ *si ha*

$$|\{u > t\}| = |\{u^\sharp > t\}|.$$

Dimostrazione. Se $u^\sharp(s) > t$ allora $\mu_u(t) \geqslant s$; infatti se per assurdo fosse $\mu_u(t) < s$ allora per definizione di $u^\sharp$ avremmo che

$$u^\sharp(s) = \inf \{t|\mu_u(t) < s\}$$

ma essendo t il massimo dei minoranti avremmo che $u^\sharp(s) \leqslant t$ il che è assurdo. Perciò

$$\{s|u^\sharp(s) > t\} \subset \{s||\{u > t\}| \geqslant s\}.$$

Dato che $u^\sharp$ è decrescente

$$|\{u^\sharp > t\}| = \sup \{s|u^\sharp(s) > t\} \leqslant \sup \{s||\{u > t\}| \geqslant s\} \leqslant |\{u > t\}|$$

quindi
$$|\{u^\sharp > t\}| \leqslant |\{u > t\}|.$$
D'altra parte, poniamo $|\{u^\sharp \geqslant t\}| = s$. Per la continuità a sinistra e il fatto che $u^\sharp$ è decrescente abbiamo $u^\sharp(s) = t$.
Ma per definizione di $u^\sharp$ abbiamo che per ogni t $|\{u > t\}| \leqslant s$. Perciò
$$|\{u > t\}| \leqslant |\{u^\sharp \geqslant t\}|.$$
Dunque, se prendiamo $t + h$ al posto di t abbiamo
$$|\{u^\sharp > t + h\}| \leqslant |\{u > t + h\}| \leqslant |\{u^\sharp \geqslant t + h\}|$$
e passando al limite per $h \to 0$ otteniamo la tesi. □

Sia $u \in L^p(\Omega)$ non negativa allora anche $u^\sharp$ è non negativa e per quanto appena visto u e $u^\sharp$ hanno la stessa funzione di distribuzione μ ; applicando il Teorema di Fubini per $1 \leqslant p < \infty$ abbiamo che
$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = p \int_0^\infty t^{p-1}\mu(t)dt = \|u^\sharp\|^p_{L^p((0,|\Omega|))}.$$
Abbiamo così dimostrato la seguente

Corollario 2.1. *Se* $u \geqslant 0$ *e* $u \in L^p(\Omega)$ *per* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *allora* $u^\sharp \in L^p((0, |\Omega|))$ *e*
$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u^\sharp\|_{L^p((0,|\Omega|))}.$$
Ancora dall'equimisurabilità segue il

Teorema 2.1. *Sia* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *misurabile ed* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione misurabile non negativa. Allora*
$$\int_\Omega F(u(x))dx = \int_0^{|\Omega|} F(u^\sharp(s))ds. \tag{2.1}$$
Dimostrazione. Sia $E = [t, +\infty]$ e $F(\xi) = \chi_E(\xi)$; allora
$$\int_\Omega F(u(x))dx = |\{u \geqslant t\}| = |\{u^\sharp \geqslant t\}| = \int_0^{|\Omega|} F(u^\sharp(s))ds.$$
Questo risultato rimane vero se E è un qualunque insieme misurabile e se F è una funzione semplice non negativa.
Se F è una qualunque funzione misurabile non negativa, essa può essere espressa come limite di una successione crescente F_n di funzioni semplici non negative, quindi per ogni n abbiamo che
$$\int_\Omega F_n(u(x))dx = \int_0^{|\Omega|} F_n(u^\sharp(s))ds$$

e per il Teorema di Beppo Levi possiamo passare al limite sotto il segno di integrale:

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega F_n(u(x))dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{|\Omega|} F_n(u^\sharp(s))ds.$$

Allora

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(u(x))dx &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} F_n(u(x)) \\ &= \int_0^{|\Omega|} \lim_{n\to\infty} F_n(u^\sharp(s))ds = \int_0^{|\Omega|} F(u^\sharp(s))dx.\end{aligned}$$

□

Naturalmente il Teorema si può estendere a funzioni sommabili qualsiasi, non necessariamente *non negative*: infatti basta osservare che $F = F^+ - F^-$ ed, essendo F^+ e F^- entrambe funzioni misurabili non negative possiamo riapplicare il Teorema precedente.
Se $F(u) \in L^1(\Omega)$ allora $\int_\Omega F^+(u(x))dx \leqslant \infty$, $\int_\Omega F^-(u(x))dx \leqslant \infty$ e

$$\int_\Omega F^+(u(x))dx = \int_0^{|\Omega|} F^+(u^\sharp(s))ds \quad \text{e} \quad \int_\Omega F^-(u(x))dx = \int_0^{|\Omega|} F^-(u^\sharp(s))ds.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(u(x))dx &= \int_\Omega F^+(u(x))dx - \int_\Omega F^-(u(x))dx \\ &= \int_0^{|\Omega|} F^+(u^\sharp(s))ds - \int_0^{|\Omega|} F^-(u^\sharp(s))ds \\ &= \int_0^{\Omega} (F^+(u^\sharp(s)) - F^-(u^\sharp(s)))ds = \int_0^{|\Omega|} F(u^\sharp(s))ds.\end{aligned}$$

che è proprio la (2.1). Questo dimostra il seguente

Corollario 2.2. *Sia* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione misurabile e* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *tale che* $F(u) \in L^1(\Omega)$. *Allora* $F(u^\sharp) \in L^1((0, |\Omega|))$ *e la* (2.1) *è ancora valida.*

Abbiamo dunque scoperto dalla definizione di $u^\sharp$ e dalle proprietà da essa derivanti che la norma L^1 della funzione di partenza e della **riordinata** sono uguali.
Ciò si generalizza immediatamente a tutte le norme L^p per $p \geqslant 1$, ponendo $F(t) = |t|^p$ e applicando il Teorema precedente.

Teorema 2.2. *Sia* $u \in L^p(\Omega)$ *per* $1 \leqslant p < \infty$. *Allora* $u^\sharp \in L^p((0, |\Omega|))$ *e le corrispondenti norme in* L^p *sono uguali.*

Osservazione 2.1. Il risultato rimane valido per $p = \infty$ dal momento che $u^\sharp(0) = \operatorname{ess\,sup}(u)$ e $u^\sharp(|\Omega|) = \operatorname{ess\,inf}(u)$.

Consideriamo una funzione u decrescente definita su un intervallo della retta reale; è immediato osservare che u è *già riordinata*!

Proposizione 2.4. *Sia* $u : [0, l] \to \mathbb{R}$ *decrescente. Allora* $u = u^\sharp$ *q.o..*

Un'ultima proprietà molto importante è espressa nella seguente

Proposizione 2.5. *Sia* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione crescente. Sia* $u : \Omega \to \mathbb{R}$*, dove* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *è limitato. Allora* $\varphi(u^\sharp)$=$(\varphi(u))^\sharp$ *q.o..*

Dimostrazione. **Passo 1**.- Siano $v, w : [0, l] \to \mathbb{R}$ equimisurabili e decrescenti; allora $v = w$ quasi ovunque, poiché per la Proposizione 2.4 $v = v^\sharp$ e $w = w^\sharp$ q.o., e siccome entrambe tali funzioni sono equimisurabili $w^\sharp = v^\sharp$.
Passo 2.- Dimostriamo che $\varphi(u^\sharp)$ e $(\varphi(u))^\sharp$ sono equimisurabili, decrescenti in $[0, |\Omega|]$. Sono decrescenti in quanto composizione di una funzione φ crescente e di $u^\sharp$ che è decrescente (perché è un riordinamento). Ora, poiché la funzione $s \to \chi_{\{\varphi > t\}}(s)$ è una funzione misurabile non negativa possiamo applicare il Teorema 2.1

$$
\begin{aligned}
|\{\varphi(u^\sharp) > t\}| &= \int_0^{|\Omega|} \chi_{\{\varphi(u^\sharp)>t\}}(s)ds \\
&= \int_\Omega \chi_{\{\varphi(u)>t\}}(x)dx = |\{\varphi(u) > t\}|.
\end{aligned}
$$

Per l'equimisurabilità della funzione e della sua riordinata (Proposizione 2.3) abbiamo

$$|\{\varphi(u) > t\}| = |\{(\varphi(u))^\sharp > t\}|.$$

Concludiamo così

$$|\{\varphi(u^\sharp) > t\}| = |\{(\varphi(u))^\sharp > t\}|.$$

□

Corollario 2.3. *Se* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *abbiamo* $((u)^+)^\sharp = (u^\sharp)^+$.

2.2 Disuguaglianze relative ai riordinamenti

Tratteremo ora delle disuguaglianze valide per i riordinamenti, fino ad arrivare a quella più famosa di Hardy-Littlewood.

Osservazione 2.2. Se $v, w : \Omega \to \mathbb{R}$, in generale $(v + u)^\sharp \neq v^\sharp + u^\sharp$. D'altra parte se $c \in \mathbb{R}$ si ha $(v + c)^\sharp$=$v^\sharp + c$.

Proposizione 2.6. *Sia* $p = 1$ *o* ∞*. Se* $f, g \in L^p(\Omega)$ *allora*

$$\|f^\sharp - g^\sharp\|_{L^p((0,|\Omega|))} \leqslant \|f - g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Dimostrazione. **Caso** $p = \infty$: Per $f, g \in L^\infty(\Omega)$

$$|f(x) - g(x)| \leqslant \operatorname{ess\,sup} |f(x) - g(x)| \leqslant \|f - g\|_{L^\infty(\Omega)}$$

perciò

$$f(x) - \|f - g\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant g(x) \leqslant f(x) + \|f - g\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Ora, per la Proposizione 2.2 e l'Osservazione 2.2 abbiamo che

$$f^\sharp(x) - \|f - g\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant g^\sharp(x) \leqslant f^\sharp(x) + \|f - g\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Dunque

$$\|f^\sharp - g^\sharp\|_{L^\infty((0,|\Omega|))} \leqslant \|f - g\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Caso $p = 1$: Se $h = \max\{f, g\}$ allora, siccome $f \leqslant h$ e $g \leqslant h$ si ha $f^\sharp \leqslant h^\sharp$ e $g^\sharp \leqslant h^\sharp$ e quindi

$$f^\sharp - g^\sharp \leqslant |f^\sharp - h^\sharp| + |h^\sharp - g^\sharp| = 2h^\sharp - f^\sharp - g^\sharp.$$

Integrando tra 0 e $|\Omega|$ abbiamo

$$\begin{aligned}\int_0^\Omega |f^\sharp(s) - g^\sharp(s)| ds &\leqslant \int_0^\Omega (2h^\sharp(s) - f^\sharp(s) - g^\sharp(s)) ds \\ &= \int_\Omega (2h(x) - f(x) - g(x)) dx = \int_\Omega |f(x) - g(x)| dx\end{aligned}$$

che è la tesi. □

Teorema 2.3. *Sia* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *L'applicazione* $u \to u^\sharp$ *è continua da* $L^p(\Omega)$ *in* $L^p(0, |\Omega|)$.

Dimostrazione. Per quanto già dimostrato, rimane da trattare i casi per $p \neq \infty, 1$.
Sia $1 < p < \infty$ e sia $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$. Dato che Ω è limitato ne segue che, essendo gli L^p "inscatolati", $u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$ e per la Proposizione 2.6 $u_n^\sharp \to u^\sharp$ in $L^1((0, |\Omega|))$. Inoltre la covergenza in L^1 implica a meno di sottosuccessioni la convergenza quasi ovunque; quindi esiste un'estratta $\{u_{n_k}^\sharp\} \subset \{u_n^\sharp\}$ tale che $u_{n_k}^\sharp \to u^\sharp$ q.o.
Per il Corollario 2.1 abbiamo

$$\|u_{n_k}^\sharp\|_{L^p(0,|\Omega|)} = \|u_{n_k}\|_{L^p(\Omega)} \to \|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u^\sharp\|_{L^p(0,|\Omega|)}.$$

Per l' indipendenza dal limite dalla sottosuccessione scelta si ha $u_n^\sharp \to u^\sharp$ in $L^p((0, |\Omega|))$. □

Abbiamo visto nel Teorema 2.1 che i riordinamenti hanno la proprietà di "conservare" l'integrale della funzione sul dominio di definizione (si prenda $F(t) = t$ nel Teorema 2.1). Cosa succede se consideriamo un dominio proprio? Si ha il seguente risultato.

Teorema 2.4. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *limitato e sia* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione sommabile. Sia* $E \subset \Omega$ *un sottoinsieme misurabile. Allora*

$$\int_E u(x)dx \leqslant \int_0^{|E|} u^\sharp(s)ds.$$

L'uguaglianza si ottiene se e solo se

$$(u|_E)^\sharp = u^\sharp|_{[0,|E|]} \quad q.o..$$

Lemma 2.1. *Sia* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *e* $t \in \mathbb{R}$. *Definiamo i sottoinsiemi*

$$E_t = \{x \in \Omega | u(x) > t\}$$

$$F_t = \{x \in \Omega | u(x) \leqslant t\} = \Omega \setminus E_t.$$

Definiamo $b : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ *come*

$$b(x,y) = \begin{cases} \chi_{E_t}(x) & se\ t \geqslant 0 \\ -\chi_{F_t}(x) & se\ t < 0. \end{cases}$$

Allora $u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} b(t,x)dt$.

Dimostrazione. Se $u(x) \geqslant 0$ allora $\int_{-\infty}^{\infty} b(t,x)dt = \int_0^{u(x)} dt = u(x)$.
Se $u(x) < 0$ allora $\int_{-\infty}^{\infty} b(t,x)dt = -\int_{u(x)}^0 dt = u(x)$. □

Proposizione 2.7. *Siano* $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ *con* g *sommabile su* Ω. *Sia* $a \leqslant f \leqslant b \leqslant \infty$ *con* $a \in \mathbb{R}$. *Allora*

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx = a\int_\Omega g(x)dx + \int_a^b (\int_{\{f>t\}} g(x)dx)dt.$$

Dimostrazione. Supponiamo $a > 0$. Poniamo $E_t = \{f > t\}$; per il Lemma precedente sappiamo che $f(x) = \int_0^b \chi_{E_t}(x)dt$. Ora, applicando il Teorema di Fubini,

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx = \int_\Omega g(x)\int_0^b \chi_{E_t}(x)dtdx = \int_0^b \int_\Omega g(x)\chi_{E_t}(x)dxdt.$$

Spezzando l'integrale nell'ultima uguaglianza abbiamo

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx = \int_0^a \int_\Omega g(x)dxdt + \int_a^b \int_{E_t} g(x)dxdt.$$

che è la tesi cercata (la si ottiene supponendo $a < 0$ ragionando allo stesso modo). □

Siamo arrivati dunque al risultato più importante.

Teorema 2.5 (Hardy-Littlewood)**.** *Sia* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$ *dove* $(1/p)+(1/q) = 1$*,* $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$*. Allora*

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx \leqslant \int_0^{|\Omega|} f^\sharp(s)g^\sharp(s)ds.$$

Dimostrazione. Sia $f \in L^\infty(\Omega) \cap L^p(\Omega)$. Siano a e b numeri reali tali che $a \leqslant f \leqslant b$. Allora, per la Proposizione precedente

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x)g(x)dx &= \int_\Omega g(x)dx + \int_a^b \int_{\{f>t\}} g(x)dxdt \\
&= \int_0^{|\Omega|} g^\sharp(s)ds + \int_a^b \int_{\{f>t\}} g(x)dxdt \\
&\leqslant \int_0^{|\Omega|} g^\sharp(s)ds + \int_a^b \int_0^{|\{f>t\}|} g^\sharp(s)dsdt \\
&= \int_0^{|\Omega|} g^\sharp(s)ds + \int_a^b \int_0^{|\{f^\sharp>t\}|} g^\sharp(s)dsdt = \int_0^{|\Omega|} f^\sharp(s)g^\sharp(s).
\end{aligned}$$

Per ottenere la disuguaglianza è stato fatto uso del Teorema 2.4. Se $1 \leqslant p < \infty$ dato che l'applicazione $u \to u^\sharp$ è continua da $L^p(\Omega)$ in $L^p((0, |\Omega|))$ possiamo procedere per "densità". □

Estendiamo il risultato della Proposizione 2.6 a tutti gli esponenti $p \geqslant 1$.

Teorema 2.6. *Siano* $f, g \in L^p(\Omega)$ *dove* $1 < p < \infty$*. Allora*

$$\|f^\sharp - g^\sharp\|_{L^p((0,|\Omega|))} \leqslant \|f - g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Per ora abbiamo riordinato la funzione u sulla retta reale; il nostro prossimo obiettivo è simmetrizzarla.

Definizione 2.4. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato. Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. La sua **simmetrizzazione di Schwarz** (o **riordinamento decrescente a simmetria sferica**) è una funzione $u^* : \Omega^* \to \mathbb{R}$ definita come

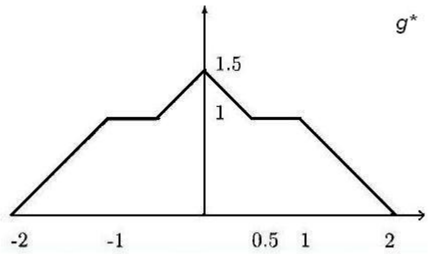
$$u^*(x) = u^\sharp(\omega_N |x|^N), \quad x \in \Omega^*$$

dove con ω_N[1] denotiamo il volume della palla unitaria in $\mathbb{R}^N$ e con Ω^* la palla aperta centrata nell'origine e avente la stessa misura di Ω, ovvero $|\Omega|$=$|\Omega^*|$.

Esempio 2.2. Riprendendo l'Esempio 2.1, simmetrizziamo la funzione u definita su $\Omega = [-2, 2]$ a valori in $\mathbb{R}$; u^* sarà definita su $\Omega^* = [-2, 2]$ e

[1] ω_N è definito come $\omega_N = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2+1)}$ dove $\Gamma(s)$ è la funzione Gamma.

$$g^*(-x) = g^*(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - x & 0 \leqslant x \leqslant 0.5 \\ 1 & 0.5 < x \leqslant 1 \\ 2 - x & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$



Osserviamo che g, $g^\sharp$ e g^* hanno la stessa funzione di distribuzione.
Si noti che nella definizione di simmetrizzazione di Schwarz appare la funzione di riordinamento $u^\sharp$; l'idea ora è quella di riordinare la funzione non più su una retta, ma su una sfera.

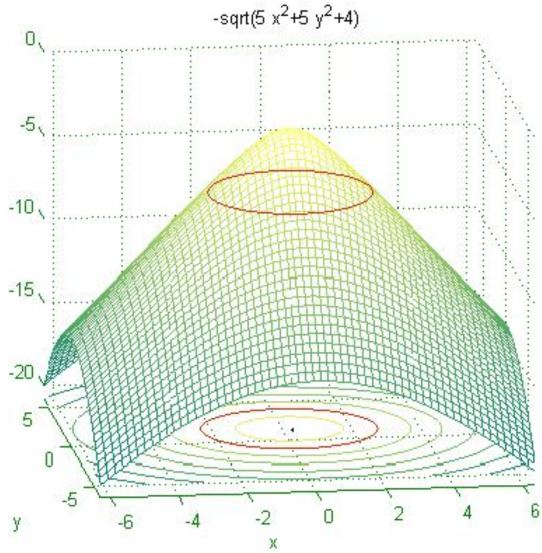


Figura 2.1: Questo è un modello di funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ costante sugli insiemi di livello, che sono cerchi concentrici ed interni ad Ω^*, che assume il massimo nell'origine e decresce verso l'esterno.

Osservazione 2.3. Se R è il raggio di Ω^*, allora

$$\int_{\Omega^*} u^*(x)dx = \int_{\Omega^*} u^\sharp(\omega_N |x|^N)dx = \int_0^R u^\sharp(\omega_N r^N) N\omega_N r^{N-1} dr =$$
$$= \int_0^{|\Omega^*|} u^\sharp(s)ds = \int_0^{|\Omega|} u^\sharp(s)ds.$$

A questo punto possiamo trasferire a u^* tutti i risultati ottenuti per il riordinamento unidimensionale $u^\sharp$:

- u^* è radialmente simmetrica e decrescente;

- u, $u^\sharp$ e u^* sono equimisurabili;

- se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile tale che $F \geqslant 0$ e $F(u) \in L^1(\Omega)$ allora
$$\int_{\Omega^*} F(u^*(x))dx = \int_{\Omega} F(u(x))dx.$$
In particolare u e u^* hanno la stessa norma L^p e se u è sommabile su Ω allora
$$\int_{\Omega} u(x)dx = \int_{\Omega^*} u^*(x)dx$$

- se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione crescente, allora $(\varphi(u))^* = \varphi(u^*)$;

- l'applicazione $u \to u^*$ da $L^p(\Omega)$ in $L^p(\Omega^*)$ è non espansiva;

- se $E \subset \Omega$ è un sottoinsieme misurabile, allora
$$\int_E u(x)dx \leqslant \int_0^{|E|} u^\sharp(s)ds = \int_{E^*} u^*(x)dx$$
e l'uguaglianza si ottiene quando $(u|_E)^* = u^*|_{E^*}$.

- (Hardy-Littlewood) siano $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ dove $(1/p)+(1/q) = 1$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Allora
$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dx \leqslant \int_0^{|\Omega|} f^\sharp(s)g^\sharp(s)ds = \int_{\Omega^*} f^*(x)g^*(x)dx.$$

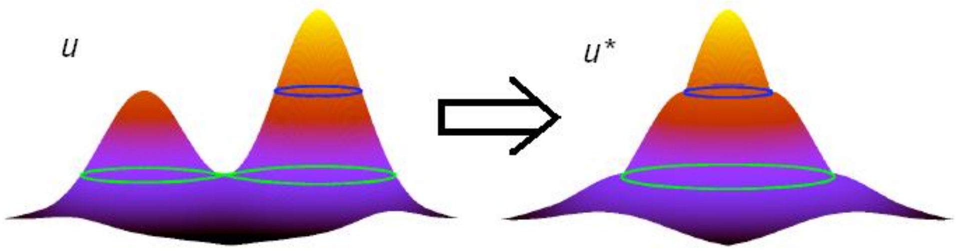


Figura 2.2: Esempio di una funzione in 2 variabili e della sua simmetrizzata di Schwarz

Capitolo 3

Teoremi di confronto

In questo capitolo vogliamo **confrontare** le soluzioni di due problemi **ellittici** con dati differenti, ma legati dal fatto che uno è il simmetrizzato dell'altro.
Consideriamo un problema **ellittico** in forma di divergenza del tipo

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f & \text{su } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

dove Ω è un dominio limitato, f è una funzione in $L^2(\Omega)$ e $A(x) = (a_{ij}(x))$ è una matrice $N \times N$ di funzioni definite su Ω appartentente alla famiglia $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$ delle matrici che soddisfano:

$$\alpha|\xi|^2 \leqslant A(x)\xi \cdot \xi \leqslant \beta|\xi|^2 \quad \text{q.o. in } \Omega \quad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{3.2}$$

Noi considereremo solo **soluzioni deboli** del problema (3.1), ovvero funzioni $u \in H_0^1(\Omega)$ verificanti

$$\int_\Omega A\nabla u \nabla v = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.3}$$

Una tale soluzione esiste ed è unica per il Teorema di Lax-Milgram.
Possiamo dunque dare la *formulazione debole* del problema (3.1):
definiamo la forma bilineare

$$a(u, v) = \int_\Omega A\nabla u \nabla v \, dx \quad \text{per} \quad u, v \in H_0^1(\Omega).$$

e cerchiamo una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$a(u, v) = \int_\Omega fv \, dx \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.4}$$

Ora simmetrizziamo i dati del problema (3.4): sostituiamo la funzione f definita su Ω con la sua simmetrizzata f^* definita sulla sfera Ω^*, e la matrice A con la matrice αI.

Vogliamo dunque trovare una soluzione w del problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\alpha I \nabla w) = f^* & \text{su} \quad \Omega^* \\ w = 0 & \text{su} \quad \partial\Omega^*. \end{cases} \tag{3.5}$$

La domanda che ci facciamo è la seguente:
Che relazione sussiste tra la soluzione w *del problema* (3.5), *e la simmetrizzata* u^* *della soluzione* u *di* (3.4)*?*
Enunciamo un risultato che useremo più avanti.

Lemma 3.1. *Sia* Ω *un dominio limitato e sia* $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ *tale che* $u \geqslant 0$ *q.o. in* Ω. *Allora, per* $t > 0$,

$$-\frac{d}{dt}\Big(\int_{\{u>t\}} |\nabla u|\, dx\Big) \geqslant N\omega_N^{\frac{1}{N}} |\{u > t\}|^{1-\frac{1}{N}}.$$

Siamo pronti per dare un risultato di fondamentale importanza dovuto a Talenti e risalente al 1976.

Teorema 3.1. *Siano* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un dominio limitato e* $A \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$ *con* $0 < \alpha < \beta$. *Siano* f *una funzione in* $L^2(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$ *una soluzione (debole) del problema* (3.4) *e* $f^* \in L^2(\Omega^*)$ *la simmetrizzata di Schwarz di* f. *Se* w *è la soluzione del problema*

$$\begin{cases} -\alpha \triangle w = f^* & \textit{su } \Omega^* \\ w = 0 & \textit{su } \partial\Omega^* \end{cases} \tag{3.6}$$

e $u \geqslant 0$ *in* Ω, *allora* $u^* \leqslant w$ *q.o. in* Ω^*, *dove* u^* *è la simmetrizzata di Schwarz di* u.

Dimostrazione. Articoliamo questa dimostrazione in 4 passi.
Passo 1.- Senza perdere di generalità, assumiamo $\alpha = 1$. Siano $t > 0$ e $v = (u-t)^+$; allora, per il Corollario 1.1, $v \in H_0^1(\Omega)$ e possiamo usarla come funzione test nella formulazione debole (3.4).
Poiché se $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\{u>t\}} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, dx = \int_{\{u>t\}} f \cdot (u-t)\, dx$$

derivando rispetto al parametro t, ne segue che

$$-\frac{d}{dt} \int_{\{u>t\}} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx = \int_{\{u>t\}} f\, dx.$$

Passo 2.- Per l'ellitticità dell'operatore differenziale (vedi la condizione (3.2) ponendo $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \xi_i$, $|\nabla u|^2 = |\xi|^2$ e $A(x) = (a_{ij}(x)))$

$$\int_{\{t<u\leqslant t+h\}} |\nabla u|^2\, dx \leqslant \int_{\{t<u\leqslant t+h\}} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx.$$

Dividendo entrambi i membri per h [1] otteniamo, per $h \to 0$,

$$0 \leqslant -\frac{d}{dt}\int_{\{u>t\}} |\nabla u|^2\,dx \leqslant \int_{\{u>t\}} f\,dx.$$

D'altra parte per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\Big(\frac{1}{h}\int_{\{t<u\leqslant t+h\}} |\nabla u|\,dx\Big)^2 \leqslant \Big(\frac{1}{h}\int_{\{t<u\leqslant t+h\}} dx\Big)\Big(\frac{1}{h}\int_{\{t<u\leqslant t+h\}} |\nabla u|^2\,dx\Big)$$

e facendo tendere h a zero otteniamo

$$\Big(-\frac{d}{dt}\int_{\{u>t\}} |\nabla u|\,dx\Big)^2 \leqslant -\mu'(t)\int_{\{u>t\}} f\,dx$$

dove μ è la funzione di distribuzione di u.
Sia ora $F(\zeta) = \int_0^\zeta f^\sharp(s)ds$.
Per quanto dimostrato nel capitolo 2, vale

$$\int_{\{u>t\}} f\,dx \leqslant \int_0^{\mu(t)} f^\sharp(s)ds = F(\mu(t)).$$

Ora sfruttando il Lemma 3.1, il che è possibile perché $u \geqslant 0$ per ipotesi, è immediato verificare che

$$(N\omega_N^{\frac{1}{N}})^2 \mu(t)^{2-\frac{2}{N}} \leqslant F(\mu(t))(-\mu'(t))$$

che equivale a

$$1 \leqslant (N\omega_N^{\frac{1}{N}})^{-2} \mu(t)^{\frac{2}{N}-2} F(\mu(t))(-\mu'(t)).$$

Integrando tra t e t' e ponendo successivamente $\xi = \mu(t)$ otteniamo

$$t - t' \leqslant (N\omega_N^{\frac{1}{N}})^{-2} \int_{\mu(t)}^{\mu(t')} \zeta^{\frac{2}{N}-2} F(\zeta)\,d\zeta. \tag{3.7}$$

Passo 3.- Siano $t' = 0$, $t = u^\sharp(s) - \eta$ con $\eta > 0$ e $s \in (0, |\Omega|)$. Allora per la definizione di riordinamento unidimensionale

$$\mu(t') = |\Omega| \quad \text{e} \quad \mu(t) = |\{u > u^\sharp(s) - \eta\}| \geqslant s.$$

Perciò

$$u^\sharp(s) - \eta \leqslant (N\omega_N^{\frac{1}{N}})^{-2} \int_s^{|\Omega|} \xi^{\frac{2}{N}-2} F(\xi) d\xi$$

[1] Se chiamiamo $g(t) = \int_{\{u>t\}} |\nabla u|^2\,dx$ e ne facciamo il rapporto incrementale, questo è uguale a

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \frac{1}{h}\Big(\int_{\{u>t+h\}} |\nabla u|^2\,dx - \int_{\{u>t\}} |\nabla u|^2\,dx\Big).$$

Facendo tendere h a zero si ottiene $\frac{d}{dt}\int_{\{u>t\}} |\nabla u|^2\,dx$.

e per l'arbitrarietà di $\eta > 0$

$$u^\sharp(s) \leqslant (N\omega_N^{\frac{1}{N}})^{-2} \int_s^{|\Omega|} \xi^{\frac{2}{N}-2} F(\xi) d\xi. \tag{3.8}$$

Passo 4.- Poiché Ω^* è una palla di $\mathbb{R}^N$ e f^* una funzione radialmente simmetrica, allora, per le proprietà di simmetria del Laplaciano, w è radialmente simmetrica.
Se poniamo $w(x) = w(|x|)$ e passiamo in coordinate polari abbiamo che $w(r)$ soddisfa il seguente problema ai valori al bordo:

$$\begin{cases} -w''(r) - \frac{N-1}{r} w'(r) = f^* \quad 0 < r < R \\ w(R) = 0 \\ w'(0) = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

dove R è il raggio di Ω^*.
Calcolando abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(-r^{N-1} w'(r)) &= -(N-1) r^{N-2} w'(r) - r^{N-1} w''(r) \\ &= r^{N-1}(-\frac{N-1}{r} w'(r) - w''(r)) = r^{N-1} f^*. \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{d}{dr}(-r^{N-1} w'(r)) = r^{N-1} f^*$$

ovvero, sfruttando la definizione di f^*,

$$-r^{N-1} w'(r) = \int_0^r \sigma^{N-1} f^\sharp(\omega_N \sigma^N) d\sigma.$$

Ponendo $s = \omega_N \sigma^N$ abbiamo che

$$-r^{N-1} w'(r) = \int_0^r \sigma^{N-1} f^\sharp(\omega_N \sigma^N) d\sigma = (N\omega_N)^{-1} \int_0^{\omega_N r^N} f^\sharp(s) ds.$$

Poniamo $G(r) = (N\omega_N)^{-1} \int_0^{\omega_N r^N} f^\sharp(s) ds$; allora

$$\begin{aligned} -r^{N-1} w'(r) = G(r) &\Rightarrow -w'(r) = G(r) r^{1-N} \\ &\Rightarrow w(r) = \int_r^R G(\tau) \tau^{1-N} d\tau = \\ &= \int_r^R \tau^{1-N} ((N\omega_N)^{-1} \int_0^{\omega_N \tau^N} f^\sharp(s) ds) d\tau. \end{aligned}$$

Cambiamo di nuovo variabili, ponendo

$$\zeta = \omega_N \tau^N \Rightarrow \tau = \frac{\zeta^{\frac{1}{N}}}{\omega_N^{\frac{1}{N}}}$$

da cui

$$d\tau = \frac{1}{N}\frac{\zeta^{\frac{1}{N}-1}}{\omega_N^{\frac{1}{N}}}.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} w(r) &= (N\omega_N)^{-1}\int_{\omega_N r^N}^{\omega_N R^N} \frac{\zeta^{\frac{1-N}{N}}}{\omega_N^{\frac{1-N}{N}}}(\int_0^{\xi} f^\sharp(s)ds)\frac{1}{N}\frac{\zeta^{\frac{1}{N}-1}}{\omega_N^{\frac{1}{N}}}d\zeta = \\ &= (N^2\omega_N^{\frac{2}{N}})^{-1}\int_{\omega_N r^N}^{\omega_N R^N} \zeta^{\frac{2}{N}-2}(\int_0^{\zeta} f^\sharp(s)ds)d\zeta = \\ &= (N\omega_N^{\frac{1}{N}})^{-2}\int_{\omega_N r^N}^{\omega_N R^N} \zeta^{\frac{2}{N}-2}(\int_0^{\zeta} f^\sharp(s)ds)d\zeta. \end{aligned}$$

Dato che l'integrando è non negativo e w è radialmente decrescente, per la Proposizione 2.4

$$w^\sharp(s) = (N\omega_N^{\frac{1}{N}})^{-2}\int_s^{|\Omega|} \zeta^{\frac{2}{N}-2}F(\zeta)d\zeta \tag{3.10}$$

e confrontando (3.8) e (3.10) ne segue che

$$u^\sharp(s) \leqslant w^\sharp(s).$$

□

3.1 Capacità elettrica

In questa sezione discuteremo uno dei primi successi della teoria della simmetrizzazione , ovvero la disuguaglianza isoperimetrica per la capacità elettrica che venne pubblicata nel 1930 da Szegö nell' articolo ''Uber eingine Extremalaufgaben der Potentialtheorie".
Sia Ω_0 un dominio limitato di $\mathbb{R}^3$ e sia $T \subset \Omega_0$ un sottoinsieme aperto. La regione $\Omega = \Omega_0 \setminus \overline{T}$ rappresenta il condensatore elettrostatico. Denotiamo con Γ_0 la frontiera di Ω_0 e con Γ_1 quella di T. Il *potenziale elettrostatico* è la funzione $u \in H^1(\Omega)$ che risolve il seguente problema:

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{su } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_0 \\ u = 1 & \text{su } \Gamma_1. \end{cases} \tag{3.11}$$

La *capacità elettrica* di Ω è data da

$$C(\Omega) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma. \tag{3.12}$$

dove con ν si indica la normale uscente rispetto alla frontiera di Ω.
Prendiamo l'equazione $\triangle u = 0$ e moltiplichiamola per $u \in H^1(\Omega)$

$$u\triangle u = 0.$$

Integrando per parti su Ω e ricordando il teorema di Green in $\mathbb{R}^3$ si ha:

$$0 = \int_\Omega u\triangle u = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma - \int_\Omega \nabla u \nabla u \, dx.$$

Osserviamo che per la condizione di Dirichlet $u = 1$ su Γ_1 ; dunque, portando il primo membro dall'espressione a sinistra e moltiplicando per $\frac{1}{4\pi}$, abbiamo

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx. \tag{3.13}$$

Perciò possiamo scrivere

$$C(\Omega) = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx.$$

Essendo u una funzione armonica, essa assume il suo valore massimo su $\partial\Omega$ e quindi $0 < u < 1$ in Ω.

Proposizione 3.1 (Principio di Dirichlet)**.** *Il potenziale elettrostatico* u *minimizza il funzionale*

$$J(w) = \int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx$$

sull'insieme $K = \{w \in H^1(\Omega) | w = 0 \text{ su } \Gamma_0 \text{ e } w = 1 \text{ su } \Gamma_1\}$.

Dimostrazione. Sia $w \in K$. Definiamo $\varphi = w - u$, che, come differenza di funzioni di $H^1(\Omega)$, è ancora un elemento di $H^1(\Omega)$. La funzione φ così definita ha la proprietà di annullarsi sul bordo di Ω, quindi è un elemento di $H^1_0(\Omega)$ e lo possiamo usare come funzione test nell'equazione in (3.11). Quindi si ha:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi \, dx = -\int_\Omega \triangle u\varphi \, dx = 0$$

e quindi deduciamo che

$$J(w) = \int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx = \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla\varphi|^2 + \nabla u \nabla \varphi \, dx) =$$
$$= \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla\varphi|^2)\, dx \geqslant \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = J(u)$$

da cui la tesi. □

Enunciamo un risultato fondamentale nelle applicazioni:

Teorema 3.2 (Polya-Szegö)**.** *Sia* $1 \leqslant p < \infty$. *Sia* $\Omega \in \mathbb{R}^N$ *un dominio limitato e sia* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *tale che* $u \geqslant 0$. *Allora*

$$\int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^p \, dx \leqslant \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx.$$

In particolare, $u^* \in W_0^{1,p}(\Omega^*)$.

Dal principio di Dirichlet per la capacità elettrica deduciamo immediatamente la disuguaglianza isoperimetrica per questa

Teorema 3.3 (Szegö)**.** *Siano* Ω_0^* *e* T^* *le palle centrate nell'origine tali che* $|\Omega_0^*| = |\Omega_0|$ *e* $|T^*| = |T|$. *Se* $\tilde{\Omega} = \Omega_0^* \setminus \overline{T}^*$ *è l'anello in* $\mathbb{R}^3$ *da essi determinato allora*

$$C(\Omega) \geqslant C(\tilde{\Omega}).$$

Dimostrazione. Sia u una soluzione di (3.11) e denotiamo con $\tilde{u}$ la funzione prolungata ad 1 all'interno di T. Ovviamente $\tilde{u} \geqslant 0$ e $\tilde{u}$ appartiene ad $H_0^1(\Omega_0)$. Applicando il Teorema di Polya Szegö e la (3.13) si ha

$$4\pi C(\Omega) = \int_{\Omega_0} |\nabla \tilde{u}|^2 \, dx \geqslant \int_{\Omega_0^*} |\nabla \tilde{u}^*|^2 \, dx = \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla \tilde{u}^*|^2 \, dx.$$

Ma su $\tilde{\Omega}$, $\tilde{u}^*$ è non negativa, ed inoltre $\tilde{u}^* = 0$ su $\partial \Omega_0{}^*$ e $\tilde{u}^* = 1$ su ∂T^*. Usando il principio di Dirichlet sul dominio $\tilde{\Omega}$ troviamo che

$$\int_{\tilde{\Omega}} |\nabla \tilde{u}^*|^2 \, dx \geqslant 4\pi C(\tilde{\Omega}).$$

e quindi

$$C(\Omega) \geqslant C(\tilde{\Omega})$$

che è la tesi. □

Calcoliamo esplicitamente $C(\tilde{\Omega})$ nel caso in cui $\tilde{\Omega}$ è l'anello di raggi R_0 e R_1 con $0 \leqslant R_1 \leqslant R_0$. Il funzionale da minimizzare è

$$\int_{\Omega_0^*} |\nabla w|^2 \, dx$$

sull'insieme delle funzioni appartenenti a $H^1(\tilde{\Omega})$, non negative, che si annullano su $\partial \Omega_0^*$ e che sono identicamente uguali ad 1 su T^*. Inoltre il potenziale elettrostatico v soddisfa $0 < v < 1$ nell'anello: conseguentemente v^* sarà uguale ad 1 in T^* e a zero su $\partial \Omega_0^*$. Dal momento che la simmetrizzazione di Schwarz "abbassa il valore dell'integrale" abbiamo

$$\int_{\Omega_0^*} |\nabla v|^2 \, dx \geqslant \int_{\Omega^*} |\nabla v^*|^2 \, dx$$

e per l'unicità della soluzione del problema (3.11) segue che $\nu = \nu^*$.
Riscriviamo il problema (3.11) in coordinate polari:

$$\begin{cases} \nu''(r) + \frac{N-1}{r}\nu'(r) = 0 \quad R_1 < r < R_0 \\ \nu(R_1) = 1 \\ \nu(R_0) = 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Questa equazione differenziale radiale di secondo grado ha come soluzione

$$\nu(r) = \begin{cases} \frac{r^{2-N} - R_0^{2-N}}{R_1^{2-N} - R_0^{2-N}} & N > 2 \\ \frac{\log r - \log R_0}{\log R_1 - \log R_0} & N = 2. \end{cases} \tag{3.15}$$

Per $N = 3$ abbiamo che

$$\nu(r) = \frac{r^{-1} - R_0^{-1}}{R_1^{-1} - R_0^{-1}}$$

che riscriviamo per comodità come

$$\nu(r) = D\frac{1}{r} + E$$

dove $D = \frac{1}{R_1^{-1} - R_0^{-1}}$ e $E = \frac{-R_0^{-1}}{R_1^{-1} - R_0^{-1}}$.
Per calcolare $C(\tilde{\Omega})$ applichiamo la definizione, osservando che

$$C(\tilde{\Omega}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega} |\nabla \nu|\hat{\nu}\, d\tau.$$

Passiamo per le coordinate cartesiane: poniamo $r = (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, e dunque $\nabla \nu = D\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ e $\hat{\nu} = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$.
Moltiplicando scalarmente otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega} |\nabla \nu|\hat{\nu}\, d\tau &= \int_{\mathbb{R}^3} D\frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\, dx\, dy\, dz = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} D\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz. \end{aligned}$$

Ora passando a coordinate polari notiamo che l'integrale non dipende più dal raggio ρ: infatti

$$C(\tilde{\Omega}) = D\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (\rho^2)^{-1}\rho^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\vartheta.$$

Quest'ultimo integrale è uguale a

$$D\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} d\vartheta = D\frac{1}{4\pi}(2)(2\pi) = D.$$

In definitiva abbiamo trovato

$$C(\tilde{\Omega}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma = \frac{R_1 R_0}{R_0 - R_1}.$$

3.2 Il problema dell'ostacolo

In questa sezione, facendo uso delle tecniche usate per dimostrare il Teorema di Talenti, studiamo un esempio di disuguaglianza variazionale.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato; consideriamo una matrice $A \in \mathcal{M}(1, \beta, \Omega)$ e la forma bilineare associata $a(\cdot, \cdot) = \int_\Omega A\nabla \cdot \nabla \cdot$.
Definiamo l'insieme

$$K = \{w \in H_0^1(\Omega) | w \geqslant 0 \text{ in } \Omega\}.$$

Il problema variazionale è il seguente:
data $f \in L^2(\Omega)$ *trovare una funzione* $u \in K$ *tale che per ogni* $w \in K$ *sia soddisfatta la disuguaglianza*

$$a(u, w - u) \geqslant \int_\Omega f \cdot (w - u)\, dx. \tag{3.16}$$

Poiché K è un sottoinsieme chiuso e convesso di $H_0^1(\Omega)$, per un teorema dovuto a Stampacchia (vedi [11]) sappiamo che questo problema ha un'unica soluzione $u \in K$; se, inoltre, A è simmetrica, allora u minimizza su K il funzionale dell'energia meccanica dato da

$$J(w) = \frac{1}{2} a(w, w) - \int_\Omega f w\, dx.$$

Per avere un idea del problema in questione possiamo pensare ad un dominio piano Ω in $\mathbb{R}^2$ che presenta un ostacolo al suo interno. Su tale dominio piano stendiamo una membrana, fissandola sul bordo $\partial\Omega$. Se applichiamo una forza esterna sulla membrana (ad esempio la ''pizzichiamo'') essa compierà delle oscillazioni finchè non raggiungerà la posizione di equilibrio che corrisponde alla configurazione che richiede meno energia.
Definiamo $\Omega_0 = \{x \in \Omega | u(x) = 0\}$[2] . Sull'insieme $\Omega_+ = \Omega \setminus \Omega_0$ la funzione u soddisfa l'equazione differenziale $\mathcal{L}(u) = f$, dove $\mathcal{L}$ è l'operatore differenziale ellittico del secondo ordine definito da $\mathcal{L}(u) = -\mathrm{div}(A\nabla u)$.
Il nostro prossimo obbiettivo è quello di *confrontare la soluzione di questo problema e del relativo problema simmetrizzato* così da poter ricavare informazioni su Ω_0 e Ω_0^* ovvero gli insiemi su cui le funzioni u e u^* si annullano.
Data $f \in L^2(\Omega)$ definiamo

$$F(\xi) = \int_0^\xi f^\sharp(\eta)\, d\eta.$$

Lemma 3.2. *Sia* $u \in K$ *la soluzione di* (3.16)*. Allora*

[2] In letteratura Ω_0 viene chiamato *coincidence set* (insieme di coincidenza).

- $F \geqslant 0$ *sull'intervallo* $[0, |\{u > 0\}|]$*;*

- *per ogni* $0 < t' \leqslant t \leqslant \operatorname{ess\,sup}(u)$*, abbiamo che*

$$t - t' \leqslant (N\omega_N^{\frac{1}{N}})^{-2} \int_{|\{u>t\}|}^{|\{u>t'\}|} \xi^{\frac{2}{N}-2} F(\xi) d\xi.$$

Dimostrazione. Sia $t > 0$ e poniamo $w = (u-t)^+$. Allora

$$\begin{aligned} a(u, w) - \int_\Omega f w \, dx &= \int_\Omega A \nabla u \nabla w \, dx - \int_\Omega f w \, dx \\ &= \int_{\{u>t\}} (\mathcal{L}(u) - f)(u - t) \, dx = 0. \end{aligned}$$

Quindi

$$a(u, (u-t)^+) = \int_{\{u>t\}} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx = \int_{\{u>t\}} f(u-t) \, dx.$$

Ma per la condizione di ellitticità dell'operatore differenziale, l'integrando della parte a sinistra è non-negativo e quindi l'integrale è una funzione in t decrescente. Derivando e sfruttando il teorema 2.4

$$0 \leqslant -\frac{d}{dt} \int_{\{u>t\}} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx = \int_{\{u>t\}} f \, dx \leqslant F(\mu(t)).$$

Dunque $F \geqslant 0$ sull'intervallo $[0, |\{u > 0\}|]$.
La seconda disuguaglianza invece è proprio la (3.7) ottenuta nel Teorema di Talenti. □

Corollario 3.1. *Sia* $u \in K$ *la soluzione di* (3.16)*. Allora*

- *si ha*

$$\begin{cases} u^\sharp(s) \leqslant (N\omega_N^{\frac{1}{N}})^{-2} \int_{|\{u>t\}|}^{|\{u>t'\}|} \xi^{\frac{2}{N}-2} F(\xi) d\xi & \textit{se } s \in [0, |\{u>0\}|] \quad (1), \\ u^\sharp(s) \leqslant 0 & \textit{se } s \in [|\{u>0\}|, |\Omega|]; \quad (2) \end{cases}$$

- $-\frac{du^\sharp}{ds}(s) \leqslant (N\omega_N^{\frac{1}{N}})^{-2} s^{\frac{2}{N}-2} F(s)$*;* (3)

Dimostrazione. Sia $0 < s < s' \leqslant |\{u > 0\}|$; allora, siccome $u^\sharp$ è decrescente, abbiamo che $u^\sharp(s') \leqslant u^\sharp(s)$ e per definizione di riordinamento $|\{u^\sharp > u^\sharp(s)\}| \geqslant s'$. Se fissiamo un ε positivo piccolo a piacere, per la decrescenza di $u^\sharp$ abbiamo

$$|\{u^\sharp > u^\sharp(s) - \varepsilon\}| \geqslant |\{u^\sharp > u^\sharp(s)\}| \geqslant s.$$

Chiamando $t' = u^\sharp(s')$ e $t = u^\sharp(s) - \varepsilon$,per il Lemma precedente oteniamo

$$u^\sharp(s) - \varepsilon - u^\sharp(s') = t - t' \leqslant (N\omega_N^{\frac{1}{N}})^{-2} \int_s^{s'} \xi^{\frac{2}{N}-2} F(\xi) d\xi.$$

Facendo tendere ε a zero otteniamo

$$u^\sharp(s) - u^\sharp(s') \leqslant (N\omega_N^{\frac{1}{N}})^{-2} \int_s^{s'} \xi^{\frac{2}{N}-2} F(\xi) d\xi$$

che corrisponde alla (1). Se invece poniamo $s' = |\{u > 0\}|$ allora $u^\sharp(s') = 0$ che è la (2). Per quanto riguarda la (3), l'uguaglianza segue direttamente derivando la (1):

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(u^\sharp(s) - u^\sharp(s')) &\leqslant \frac{d}{ds}(N\omega_N^{\frac{1}{N}})^{-2} \int_s^{s'} \xi^{\frac{2}{N}-2} F(\xi) d\xi \\ &= (N\omega_N^{\frac{1}{N}})^{-2} \frac{d}{ds} \int_s^{s'} \xi^{\frac{2}{N}-2} F(\xi) d\xi \quad = (N\omega_N^{\frac{1}{N}})^{-2} s^{\frac{2}{N}-2} F(s). \end{aligned}$$

□

Ora consideriamo il problema variazionale simmetrizzato:
vogliamo trovare $v \in K^* \subset H_0^1(\Omega^*)$ *che soddisfi*

$$\int_{\Omega^*} \nabla v \nabla (w - v)\, dx \geqslant \int_{\Omega^*} f^* \cdot (w - v)\, dx \quad \textit{per ogni } w \in K^* \tag{3.17}$$

dove $K^* = \{w \in H_0^1(\Omega^*) | w \geqslant 0 \textit{ in } \Omega^*\}$.
Questo problema, come quello precedente, ammette un'unica soluzione $v \in K^*$ che minimizza il funzionale dell'energia meccanica

$$J^*(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^*} |\nabla w|^2\, dx - \int_{\Omega^*} f^* w\, dx$$

su K^*. Inoltre, v soddisfa l'equzione $-\triangle v = f^*$ sull'insieme $\{v > 0\}$. Per il teorema di Polya-Szegö e la disuguaglianza di Hardy-Littlewood abbiamo che $J^*(w) \geqslant J^*(w^*)$; ma la funzione che minimizza il potenziale è unica, e segue dunque che $v = v^*$.
Concludiamo che sull'insieme $\{v > 0\}$, che è una palla centrata nell'origine, si ha che

$$v^\sharp(s) = \begin{cases} (N\omega_N^{\frac{1}{N}})^{-2} \int_s^{|\{v>0\}|} \xi^{\frac{2}{N}-2} F(\xi) d\xi & s \in [0, |\{v > 0\}|] \\ 0 & s \in [|\{v > 0\}|, |\Omega|]. \end{cases} \tag{3.18}$$

Teorema 3.4. *Siano* u *e* v *le soluzioni di* (3.16) *e* (3.17) *rispettivamente. Allora*

$$|\{u > 0\}| \leqslant |\{v > 0\}| = \begin{cases} 0 & f \leqslant 0 \textit{ q.o.} \\ |\Omega| & \int_\Omega f\, dx \geqslant 0 \textit{ e } f \not\equiv 0 \\ s_0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

dove s_0 *è l'unica soluzione di* $F(s) = 0$ *in* $(|\{f \geqslant 0\}|, |\Omega|)$.
Inoltre $u^* < v$ *su* Ω^* .

Dimostrazione. *i)* Se $f \leqslant 0$ allora $u = 0$ e $v = 0$ sono soluzioni di (3.16) e (3.17) rispettivamente; infatti se $u = 0$

$$a(0, w) = 0 \geqslant \int_\Omega fw \, dx$$

e ciò è sempre verificato poichè $\int_\Omega fw \, dx \leqslant 0$; se $v = 0$ allora

$$a(0, w) = 0 \geqslant \int_{\Omega^*} f^* w \, dx$$

e questo è verificato analogamente.

ii) Supponiamo che $\int_\Omega f \, dx \geqslant 0$.

Siccome $F(\xi) = \int_0^\xi f^\sharp(\eta) \, d\eta$ abbiamo che

$$F(0) = \int_0^0 f^\sharp(\eta) \, d\eta = 0$$

e

$$F(|\Omega|) = \int_0^{|\Omega|} f^\sharp(\eta) \, d\eta = \int_\Omega f(x) \, dx.$$

Essendo per definizione $f^\sharp$ decrescente, F è concava e $F \geqslant 0$ nell'intervallo $[0, |\Omega|]$.

Se $z \in H_0^1(\Omega^*)$ è la funzione tale che $-\triangle z = f^*$ allora z è non negativa e z risolve la (3.17) con tutte uguaglianze: infatti

$$\begin{aligned} -\triangle z = f^* \Rightarrow \quad & \int -\triangle z \cdot (w - z) \, dx = \int f^*(w - z) \, dx \\ \Rightarrow \quad & \int_\Omega \nabla z \nabla (w - z) \, dx = \int f^*(w - z) \, dx \end{aligned}$$

e dunque z in particolare risolve la disuguaglianza (3.16). Quindi $v = z$ e $|\{v > 0\}| = |\Omega|$.

iii) Supponiamo $\int_\Omega f dx < 0$ e $|\{f > 0\}| > 0$.

Siccome F è concava, $F(0) = 0$ e $F(|\Omega|) = \int_0^{|\Omega|} f^\sharp(s) \, ds = \int_\Omega f(s) \, ds < 0$ ne segue che esiste un unico $s_0 \in (|\{f \geqslant 0\}|, |\Omega|)$ tale che $F(s_0) = 0$. Infatti se s_0 è un punto tale che $F(s_0) = \int_0^{s_0} f^\sharp dx = 0$,vuol dire che $f^\sharp$ cambia segno. Se $\tilde{s} < s_0$ è il punto dove $f^\sharp$ cambia segno, allora $0 = f^\sharp(\tilde{s}) = \inf\{t | |\{f > t\}| < \tilde{s}\}$ e quindi per ogni t vale che $|\{f \geqslant t\}| < \tilde{s}$ e passando al limite per $t \to 0$ abbiamo che $|\{f \geqslant 0\}| \leqslant \tilde{s} \leqslant s_0$.

Perciò $F > 0$ in $(0, s_0)$ e $F < 0$ in $(s_0, |\Omega|)$; per il Corollario 3.1 abbiamo che

$$\frac{dv^\sharp}{ds}(s) = -(N\omega_N^{\frac{1}{N}})^{-2} s^{\frac{2}{N}-2} F(s)$$

sull'insieme $\{v > 0\}$.

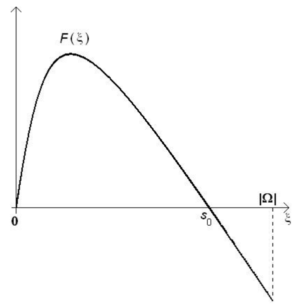


Figura 3.1: La funzione $F(\xi)$

Dunque $|\{v > 0\}| = s_0$ è il punto in cui la derivata si annulla per la prima volta; questo perchè dalla (3.18) e dal Lemma di Hopf [12] discende che se $s_0 < |\{v > 0\}|$ allora $\frac{dv^\sharp}{ds}(s_0) \neq 0$, in quanto v (e quindi $v^\sharp$) è strettamente decrescente nell'insieme dove $\{v > 0\}$. Ne segue quindi che $s_0 \geqslant |\{v > 0\}|$.

Poichè $s_0 \in (|\{f \geqslant 0\}, |\Omega|)$ allora $s_0 \in (|\{f^\sharp \geqslant 0\}|, |\Omega|)$ e quindi, per il Principio del Massimo, $s_0 \in (0, |\{v > 0\}|)$. Dunque $s_0 = |\{v > 0\}|$.

Dato che sull'intervallo $[0, |\{u > 0\}|]$ si ha $F \geqslant 0$ (per il Corollario 3.1), allora $|\{u > 0\}|$ deve essere minore di s_0 perchè $F(s_0) = 0$. Quindi $|\{u > 0\}| \leqslant s_0 = |\{v > 0\}|$.

Dal Corollario 3.1 discende poi immediatamente che $u^\sharp \leqslant v^\sharp$ e dunque $u^* \leqslant v$.

□

Proposizione 3.2. *Siano* u *e* v *le soluzioni di* (3.16) *e* (3.17) *rispettivamente. Allora*

$$J(u) \geqslant J^*(v).$$

Dimostrazione. Se u è soluzione di (3.16) allora u minimizza il funzionale

$$J(w) = \frac{1}{2}a(w, w) - \int_\Omega fw \, dx.$$

Per la condizione di ellitticità con $\alpha = 1$

$$a(u,u) = \int_\Omega A\nabla u\nabla u dx \geqslant \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

perciò

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - \int_\Omega fu dx \geqslant \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega fu dx.$$

Siccome $u \geqslant 0$ al primo membro dell'ultima espressione applichiamo la Disuguaglianza di Polya-Szegö

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega fu dx \geqslant \int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^2 dx - \int_\Omega fu dx.$$

Invece, al secondo membro della medesima espressione applichiamo la Disuguaglianza di Hardy-Littlewood

$$\int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^2 dx - \int_\Omega fu dx \geqslant \int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^2 dx - \int_\Omega f^* u^* dx = J^*(u^*).$$

Quindi

$$J(u) \geqslant J^*(u^*).$$

Ora, $u^* \in K^*$ e dato che v, soluzione di (3.17) , è caratterizzata dall'essere il minimo del funzionale dell'energia potenziale possiamo concludere che

$$J(u) \geqslant J^*(u^*) \geqslant J^*(v) \qquad \Rightarrow \qquad J(u) \geqslant J^*(v).$$

□

Bibliografia

[1] Kesavan S., *Topics in Functional Analysis*, Wiley-Eastern, 1989.

[2] Brezis H., *Analisi funzionale*, Liguori, 1986.

[3] Bose S.K., *Functional Analysis*, MacMillan, 1992.

[4] Kesavan S., *Symmetrization and their application*, World Scientific, Series in Analysis Vol.3, 2006.

[5] Bramanti A., *Simmetrizzazione di Schwarz di funzioni e applicazioni a problemi variazionali ed equazioni a derivate parziali*, Quaderno del Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano n°42/R, 2004.

[6] Kawohl B., *Rearrangements and Convexity of Level sets in PDE*, Springer-Verlag, 1985.

[7] Talenti G., Elliptic Equations and rearrangements, Ann. Scuola Normale di Pisa, Serie IV, 1976.

[8] Bandle C., *Isoperimetric Inequalities and Applications*, Pitman, 1980.

[9] Courant R, Robbins H., *What is Mathematics?*, Oxford University Press, 1996.

[10] Polya G. e Szegö G., *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Ann. Math Studies Princeton, 1951.

[11] Stampacchia G., Formes bilineaires coercitives sur les ensembles convexes, C.R. Acad. Sci. Paris 258, 1964.

[12] M. H. Protter, H. F. Weinberger, Maximum principles in differential equations. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J..