Schwerpunkt Mathematische Statistik
und Stochastische Prozesse

Prof.Dr.G.Neuhaus

SS 2002
Übungen zur Vorlesung
Mathematische Statistik
Blatt 5
Abgabe am Dienstag, den 7.05.2002,
zu Beginn der Übungsstunde

K-Aufgabe 17. (3 P) Seien $X, X_1, \ldots, X_n$ $\mathbb{R}^k$-wertige i.i.d. ZV mit $EX = a$ (komponentenweiser Erwartungswert) und Kovarianzmatrix $E(X-a)(X-a)^T = S$ (komponentenweiser Erwartungswert der Matrix). Man zeige unter Verwendung der Cramér-Wold-Technik den multivariaten Zentralen Grenzwertsatz:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - a) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, S).$$

K-Aufgabe 18. (3 P) Sei $H = \mathbb{R}^k$ und $\langle x, y \rangle = x^T \Gamma^{-1} y$, Γ positiv definite $k \times k-$Matrix. Man zeige:
Ist X eine ZV bzgl. $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit $X \sim \mathcal{N}(h, I_k)$, so gilt $X \sim \mathcal{N}(h, \Gamma)$ in $\mathbb{R}^k$ mit dem üblichen Skalarprodukt $x^T y$.

K-Aufgabe 19. In dieser Aufgabe sollen die Überlegungen zu V 3.2 Beispiel im Fall vektorwertiger ZV wiederholt werden.
Seien also $X, X_1, X_2, \cdots \in \mathbb{R}^k$ i.i.d. mit $EX = a \in \mathbb{R}^k$ und endlicher Kovarianzmatrix $E(X-a)(X-a)^T =: S$, wobei S positiv definit sei, also eine Inverse besitzt. Man zeige für $n \to \infty$

a)(1 P) $\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \to a$ f.s.

b) (2 P) Die Stichproben-Kovarianzmatrix

$$\hat{S}_n := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)(X_i - \bar{X}_n)^T$$

ist (komponentenweise) erwartungstreu für S und es gilt $\hat{S}_n \to S$ f.s.
c) (2 P) Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen, die wir hier voraussetzen wollen, ist $\hat{S}_n$ f.s. nicht ausgeartet. Man zeige dann unter Verwendung der vorigen K-Aufgabe 18

$$n(\bar{X}_n - a)^T \hat{S}_n^{-1} (\bar{X}_n - a) \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi_k^2$$

Falls $Z \sim \chi_k^2$ und $P\{Z \leq c_k(\alpha)\} = 1 - \alpha, 0 < \alpha < 1$, so folgt also für

$$\mathcal{E}_n := \{a \in \mathbb{R}^k : n(\bar{X}_n - a)^T \hat{S}_n^{-1} (\bar{X}_n - a)^T) \leq c_k(\alpha)\}$$

die Aussage

$$P(\mathcal{E}_n) \to 1 - \alpha$$

$\mathcal{E}_n$ heißt Konfidenzellipsoid zum (approximativen) Konfidenzniveau $1 - \alpha$.

K-Aufgabe 20. (2 P) Man zeige:
Sind X_1, X_2 stochastisch unabhängig und beide standard normalverteilt, so sind auch $Y_1 := \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}$ und $Y_2 := \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}$ stochastisch unabhängig und standard normalverteilt.