

Stephan h.t. Zahrte
Die schwingende Saite



**periodische Lösungen
der Wellengleichung**

Proseminar Fourier-Analysis
im Sommersemester 2008

Inhalt

0	Bezeichnungen, Definitionen	2
1	Die Wellengleichung	2
1.1	Was ist eine Welle?	2
1.2	Herleitung der Wellengleichung der schwingenden Saite	3
2	Lösungsansätze	5
2.1	Separation	5
2.2	Das Eigenwertproblem	6
2.3	Eigenschwingungen.....	6
2.4	Fourier-Reihen.....	8
2.5	Eulers Analyse	9
2.6	Die gezupfte Saite.....	10
3	Schwingungen und Töne	12
3.1	Etwas Harmonielehre.....	12
	Definition der musikalischen Intervalle	12
	Bruchrechnung der Intervalle.....	12
3.2	Grund- und Obertöne	13
4	Literatur	14
	Quellen zur schwingenden Saite.....	14
	Grundlagen, Weiterführendes	14

Abbildungen / Tabellen

Titelseite	Oberschwingung einer Saite (3. Harmonische)	
Abbildung 1	Nach links/rechts laufende Welle	3
Abbildung 2	Die ausgelenkte Saite	4
Abbildung 3	Fourier-Polynome der Rechteck-Funktion	8
Abbildung 4	Fourier-Polynome der Sägezahn-Funktion	8
Abbildung 5	Eulers Konstruktion von $\tilde{f}(x)$	9
Abbildung 6	Schwingungsverlauf der gezupften Saite.....	10
Abbildung 7	Die Knickfunktion k / gezupfte Saite.....	10
Abbildung 8	Obertonanteile an verschiedenen Stellen gezupfter Saiten	11
Abbildung 9	Wellenformen einiger Obertöne	13
Tabelle 1	Die musikalischen Intervalle	12
Tabelle 2	Komplementärintervalle	13
Tabelle 3	Intervallzusammensetzung einiger Obertöne	13

0 Bezeichnungen, Definitionen

Definition Auslenkung in Abhängigkeit vom **Ort x** und der **Zeit t**

- (1) $u(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ sowie
 (2) $v(x), w(t) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ Orts- bzw. Zeitkomponente von u (für Separation)
 (3) $f(x), g(x) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ Auslenkung, Geschwindigkeit für $t = 0$

Definition Partielle Ableitungen nach **Ort** bzw. **Zeit**

$$(4) \quad u' := \frac{\partial u}{\partial x}; \quad u'' := \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}; \quad \dot{u} := \frac{\partial u}{\partial t}; \quad \ddot{u} := \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}$$

Definition Konstanten

- (5) $\ell \in \mathbb{R}_{>0}$ - **Saitenlänge**; Abstand der Stellen, an denen die Saite eingespannt ist. ($\rightarrow(16)$)
 (6) $c \in \mathbb{R}_{>0}$ - **Ausbreitungsgeschwindigkeit** einer Welle (\rightarrow Wellengleichung (14))
 (7) $\kappa_1 := \frac{\pi}{\ell}; \quad \lambda_1 := \kappa_1^2; \quad \omega_0 := \kappa_1 c = \frac{\pi}{\ell}; \quad \nu_0 := \frac{c}{2\ell} = \frac{\omega_0}{2\pi}; \quad \tau_0 := \frac{1}{\nu_0} = \frac{2\ell}{c}; \quad \delta, \sigma$ - Bedeutung s.u.
 (8) $A, B, C, D, A_n, B_n \in \mathbb{R}; \quad n \in \mathbb{N}$ - allgemeine Konstanten

1 Die Wellengleichung

Die Wellengleichung beschreibt die Ausbreitung von Wellen in Raum und Zeit unter bestimmten vereinfachenden Voraussetzungen. Sie ist eine **partielle Differentialgleichung (pDGL)**, d.h. es treten partielle Ableitungen nach verschiedenen Variablen auf (hier x und t). Wir betrachten später nur die **eindimensionale Wellengleichung**, d.h. mit nur einer räumlichen Dimension. Es ist i.d.R. möglich, diese pDGL auf mehrere **gewöhnliche DGLn (gDGLn)** zurückzuführen, die nur noch eine Variable und deren totale Ableitung enthalten.

1.1 Was ist eine Welle?

Wir geben zunächst die allgemeine Wellengleichung für drei Raumdimensionen an:

Satz 1 Allgemeine Wellengleichung (d'Alembert) für $x = (x_1, x_2, x_3)$

$$(9) \quad \ddot{u} = c^2 \Delta u; \quad \text{mit } \Delta u := \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \quad (\text{Laplace-Operator})$$

Definition $u(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ heißt **Welle** $\Leftrightarrow u$ erfüllt die Allgemeine Wellengleichung (9)

Im Fall einer Raumdimension reduziert sich x zum Skalar, Δu auf u'' und $u(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Beispiel: (eindimensionale **nach links laufende Welle**)

$$(10) \quad u(x, t) = f(x+ct); \quad f(x) \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$(11) \quad \ddot{u} = c^2 \ddot{f}(x+ct) = c^2 f''(x+ct) = c^2 u'' \quad (\ddot{f} = f'', \text{ da } f \text{ nur von einer Variablen abhängt})$$

Die Funktion f muss nicht notwendig zweimal differenzierbar im bekannten Sinne sein. Mit dem erweiterten Ableitungsbegriff für Distributionen kann die Wellengleichung trotzdem erfüllt sein. Wir nehmen hier vereinfachend an, dass es genügt, wenn die Gleichung fast überall erfüllt ist, d.h. außerhalb einer Nullmenge, z.B. aus endlich (oder abzählbar) vielen Punkten.

Die schwingende Saite

Abbildung 1 zeigt eine gemäß (10) mit der Geschwindigkeit $c = 1$ nach links bzw. rechts laufende Welle für die Knickfunktion, die wir bei der gezupften Saite wiederfinden (\rightarrow Abschnitt 2.6).

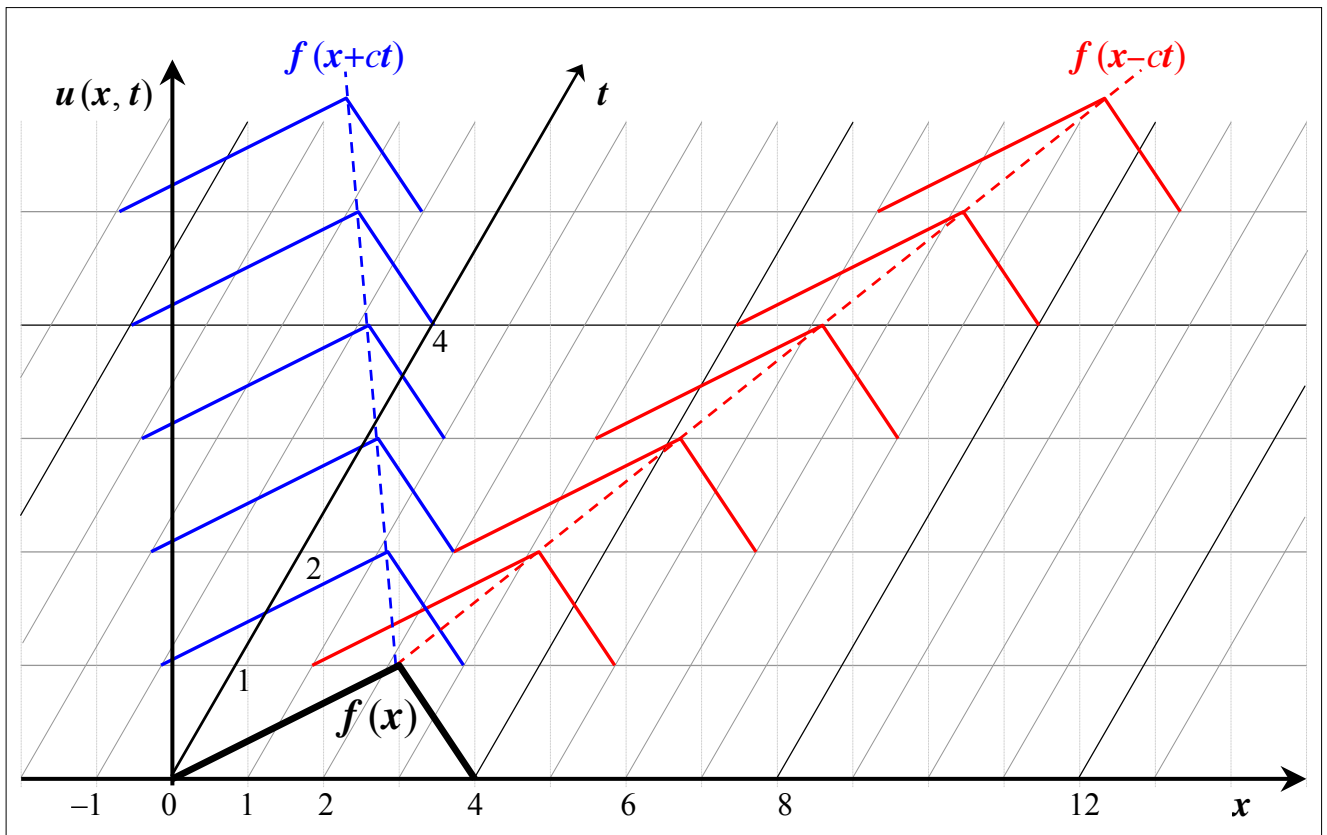


Abbildung 1 Nach links/rechts laufende Welle

1.2 Herleitung der Wellengleichung der schwingenden Saite

Wir formulieren und erläutern zunächst die Gleichungen, bevor wir eine Herleitung angeben.

Wie aus der Analysis-Vorlesung bekannt ist, benötigt man bei einer gDGL der Ordnung n

$$(12) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}); \quad n \in \mathbb{N}$$

für eine eindeutig bestimmte Lösung $y(x)$ z.B. n **Anfangsbedingungen (AB)**

$$(13) \quad y^{(k)}(x_0) = y_k; \quad k = 0..n-1$$

Die Kombination von (12) und (13) nennt man **Anfangswertaufgabe (AWA)**.

Satz 2 **Wellengleichung der schwingenden Saite.**

Die Auslenkung $u(x, t)$ der schwingenden Saite ist Lösung der **Randwertaufgabe (RWA)**

$$(14) \quad \ddot{u} = c^2 u''$$

$$(15) \quad u(0, t) = u(\ell, t) = 0; \quad t \geq 0 \text{ beliebig}$$

$$(16) \quad u(x, 0) = f(x); \quad \dot{u}(x, 0) = g(x); \quad x \in [0; \ell] \text{ beliebig}$$

Die Gleichungen (15) heißen **Randbedingungen (RB)** da sie im Gegensatz zu Anfangsbedingungen die Funktionswerte an verschiedenen Stellen angeben. I.d.R. benötigt man bei Ordnung n ebenfalls n Randbedingungen. Diese müssen aber die Lösung nicht immer eindeutig bestimmen.

Die Gleichungen (16) entsprechen bei festem x den zwei Anfangsbedingungen, die bei einer gDGL 2. Ordnung die Lösung eindeutig festlegen.

Die schwingende Saite

Herleitung: (\rightarrow [HeuG, §28, S. 292], kein Beweis im mathematischen Sinne)

Wir machen die **Annahmen**, dass die Saite **homogen** ist, d.h. eine **konstante Längendichte** δ (Masse pro Längeneinheit) besitzt, sowie **vollkommen elastisch** und biegsam ist. Sie weist also keine Steifigkeit auf, und erzeugt eine **konstante Spannung** σ , d.h. innere Kraft. Außerdem wird jede **Dämpfung vernachlässigt**, z.B. aufgrund innerer und äußerer Reibung.

An einer Stelle x werde die Saite ein wenig um $u(x)$ ausgelenkt (\rightarrow Abbildung 2). Die Masse Δm eines Teilstückes von x bis $x+\Delta x$ für ein (infinitesimal) kleines Δx ist dann

$$(17) \quad \Delta m = \delta \Delta x \quad (\text{Längendichte mal Länge})$$

Für die Kraft F_z in z-Richtung gilt daher nach dem Newtonschen Gesetz ($F = m \cdot a$)

$$(18) \quad F_z = \Delta m \cdot a = \delta \Delta x \ddot{u}$$

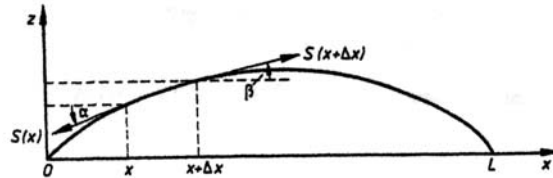


Abbildung 2 Die ausgelenkte Saite

$S(x)$ sei die tangentielle Spannung. Da die Spannung in x-Richtung konstant σ ist, gilt für die horizontalen Komponenten

$$(19) \quad S(x+\Delta x) \cos \beta = S(x) \cos \alpha = \sigma$$

und für die vertikalen, d.h. in z-Richtung, ergibt die Differenz die Resultierende F_z

$$(20) \quad S(x+\Delta x) \sin \beta - S(x) \sin \alpha = F_z \stackrel{(18)}{=} \delta \Delta x \ddot{u}$$

Teilt man (20) durch σ und nutzt dabei die beiden Gleichheiten aus (19), so folgt:

$$(21) \quad \frac{S(x+\Delta x) \sin \beta}{S(x+\Delta x) \cos \beta} - \frac{S(x) \sin \alpha}{S(x) \cos \alpha} = \frac{\delta}{\sigma} \Delta x \ddot{u} \quad \Leftrightarrow$$

$$(22) \quad \tan \beta - \tan \alpha = \frac{\delta}{\sigma} \Delta x \ddot{u}$$

$$(23) \quad \tan \beta = u'(x+\Delta x); \quad \tan \alpha = u'(x) \quad (\text{der Tangens gibt die Steigung an}) \quad \Rightarrow$$

$$(24) \quad \frac{u'(x+\Delta x) - u'(x)}{\Delta x} = \frac{\delta}{\sigma} \ddot{u}$$

Durch Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ erhält man schließlich die Wellengleichung:

$$(25) \quad \ddot{u} = c^2 u''; \quad c := \sqrt{\frac{\sigma}{\delta}}$$

Die Randbedingungen (15) ergeben sich direkt aus den physikalischen Vorgaben. Die Gleichungen (16) geben für jedes feste x die gemäß (13) nötigen Anfangsbedingungen an.

□

Die Konstante c hat die Einheit einer Geschwindigkeit:

$$(26) \quad [c^2] = N / \frac{kg}{m} = kg \frac{m}{s^2} \frac{m}{kg} = \frac{m^2}{s^2} \quad \Rightarrow \quad [c] = \frac{m}{s}$$

und beschreibt bei einer laufenden Welle deren Ausbreitungsgeschwindigkeit. Die Bedeutung bei einer stehenden Welle zeigt sich in Abschnitt 2.5.

2 Lösungsansätze

2.1 Separation

Durch sogenannte **Separation** der pDGL (14) erhält man gDGLn. Dazu nimmt man an, dass sich die Lösung u als Produkt einer rein orts- bzw. zeitabhängigen Funktion schreiben lässt. Man nennt dies auch **synchrone Schwingungen**.

$$(27) \quad u(x, t) = v(x) w(t)$$

$$(28) \quad \ddot{u}(x, t) = v(x) \ddot{w}(t); \quad u''(x, t) = v''(x) w(t)$$

Bei v und w handelt es sich um totale Ableitungen, da sie nur von einer Variable abhängen.

Eingesetzt in (14) ergibt dies:

$$(29) \quad v(x) \ddot{w}(t) = c^2 v''(x) w(t)$$

Falls $v(x) = 0$ oder $w(t) = 0$, gilt auch $u(x, t) = 0$ und nach (29) muss die jeweils andere Funktion verschwinden, so dass mit (28) die Wellengleichung (14) erfüllt ist. Wir nehmen daher an, dass

$$(30) \quad v(x) \neq 0; \quad w(t) \neq 0$$

und erhalten dann

$$(31) \quad \frac{\ddot{w}(t)}{w(t)} = c^2 \frac{v''(x)}{v(x)}$$

Da die linke Seite nur von t und die rechte nur von x abhängt, müssen beide Seiten konstant sein. Diese Konstante nennen wir $-\lambda c^2$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und erhalten

$$(32) \quad \frac{\ddot{w}(t)}{w(t)} = -\lambda c^2; \quad \frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda \Rightarrow$$

$$(33) \quad \ddot{w}(t) = -\lambda c^2 w(t); \quad v''(x) = -\lambda v(x)$$

Seien nun umgekehrt $w(t)$ und $v(x)$ Lösungen von (14) und $u(x, t) = v(x) w(t)$. Dann gilt:

$$(34) \quad \ddot{u} = v \ddot{w} = -\lambda c^2 v w = c^2 v'' w = c^2 u''$$

und $u(x, t)$ ist Lösung der Wellengleichung (14).

Mit (33), partieller Integration und da v nur konstant ist, falls $u \equiv 0$, erhält man:

$$(35) \quad \lambda \int_0^\ell v^2 dx = \int_0^\ell v \cdot \lambda v dx = - \int_0^\ell v v'' dx = -[v v']_0^\ell + \int_0^\ell (v')^2 dx = \int_0^\ell (v')^2 dx > 0 \Rightarrow$$

$$(36) \quad \lambda > 0$$

Wir setzen daher

Definition

(37) $\kappa := \sqrt{\lambda}$ - **Wellenzahl** (beschreibt die **räumliche** Schwingung)

(38) $\omega := \kappa c$ - **Kreisfrequenz** (beschreibt die **zeitliche** Schwingung)

und erhalten insgesamt die

Satz 3 Schwingungsgleichungen. Sind $v(x)$ und $w(t)$ Lösungen der folgenden gDGLn, so ist $u = vw$ eine Lösung der Wellengleichung (14)

(39) $v'' = -\kappa^2 v$

(40) $\ddot{w} = -\omega^2 w$

(41) $\omega = \kappa c; \quad \kappa, \omega \in \mathbb{R}_{>0}$

2.2 Das Eigenwertproblem

Mit den linearen Differentialoperatoren

Definition

(42) $\mathbf{W} := C^\infty(\mathbb{R}); \quad \mathbf{V} := \{v \in C^\infty([0; \ell]) \mid v(0) = v(\ell) = 0\}$

(43) $\mathbf{L}: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}; \quad v \mapsto -v''$

(44) $\tilde{\mathbf{L}}: \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}; \quad w \mapsto -c^{-2} \ddot{w}$

sind die Gleichungen (39) bis (41) zusammen mit der RB (15) für $v(t)$ ein

Satz 4 Simultanes Eigenwertproblem zu den Schwingungsgleichungen

(45) $\mathbf{L}v = \lambda v; \quad \tilde{\mathbf{L}}w = \lambda w; \quad \lambda = \kappa^2$

Man muss also gleichzeitig Eigenvektoren von \mathbf{L} und $\tilde{\mathbf{L}}$ zum selben Eigenwert λ finden. Dies ist Ausdruck der Kopplung der beiden DGLn durch $\omega = \kappa c$ (41).

Die RB (16) für $w(t)$ ist hierbei noch nicht berücksichtigt.

2.3 Eigenschwingungen

Wie aus der Analysis bekannt (\rightarrow [Kön1], [For2]) haben die DGLn (39) und (40) für festes κ, ω die allgemeinen Lösungen:

(46) $v(x) = \mathbf{C}\sin(\kappa x) + \mathbf{D}\cos(\kappa x); \quad \mathbf{C}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}$

(47) $w(t) = \mathbf{A}\sin(\omega t) + \mathbf{B}\cos(\omega t); \quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}$

Aus den RBn (15) erhält man für die Konstanten von $v(x)$

(48) $\mathbf{D} = 0; \quad \kappa \ell = \mathbf{n}\pi; \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow$

(49) $\kappa = \mathbf{n}\kappa_1; \quad \kappa_1 := \frac{\pi}{\ell}; \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}$

(50) $\omega = \mathbf{n}\omega_0; \quad \omega_0 := \kappa_1 c; \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}$

Die Gleichungen (49) und (50) beschreiben eine **Quantisierung**.

Die Eigenwerte und -vektoren von (45) lauten damit

$$(51) \quad \lambda = \lambda_n := n^2 \lambda_1; \quad \lambda_1 := \kappa_1^2 = \frac{\pi^2}{\ell^2}; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(52) \quad v(x) = v_n(x) := \sin(n\kappa_1 x)$$

$$(53) \quad w(t) = w_n(t) := A_n \sin(n\omega_0 t) + B_n \cos(n\omega_0 t); \quad A_n, B_n \in \mathbb{R}$$

Die Auslenkung der Saite für einen festen Eigenwert ist also

$$(54) \quad u(x, t) = u_n(x, t) := \sin(n\kappa_1 x) [A_n \sin(n\omega_0 t) + B_n \cos(n\omega_0 t)]; \quad A_n, B_n \in \mathbb{R}$$

Diese Lösung nennt man **reine Schwingung**. Sie enthält nur eine Frequenz ν , ganzzahliges Vielfaches der **Eigenfrequenz** ν_0 mit zugehöriger Periode τ_0 :

$$(55) \quad 2\pi\nu_0 = \omega_0 = \kappa_1 c = \frac{\pi}{\ell} c \Rightarrow$$

$$(56) \quad \nu_0 := \frac{c}{2\ell} \stackrel{(25)}{=} \frac{1}{2\ell} \sqrt{\frac{\sigma}{\delta}}; \quad \tau_0 := \frac{1}{\nu_0} = \frac{2\ell}{c}$$

Die Eigenfrequenz ν_0 gibt die Grundfrequenz des von der Saite erzeugten Tones an. Sie hängt bei fester Saitenlänge ℓ von der Spannung σ und der Dichte δ ab. Dies sieht man bei den meisten Saiteninstrumenten, z.B. Violine und Klavier, deutlich. Die tieferen Saiten werden immer dicker (höhere Längendichte δ). Je stärker eine Saite gespannt wird (größeres σ), um so höher ist der Ton. Bei Instrumenten wie der Harfe wird die Tonhöhe hingegen v.a. durch ℓ bestimmt.

Eine reine Schwingung mit $\nu = n\nu_0$ nennt man **n-te Harmonische** bzw. **(n-1)-ten Oberton**.

Als Lösung für $v(x)$ bei beliebiger RB (16) erwartet man nun als eine Überlagerung aller möglichen Schwingungen, **gemischte Schwingung** genannt, ein **trigonometrisches Polynom** vom Grad N oder im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ eine unendliche Reihe mit noch zu bestimmenden Koeffizienten. Für die Lösung findet man damit die Form

$$(57) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\kappa_1 x) [A_n \sin(n\omega_0 t) + B_n \cos(n\omega_0 t)]; \quad A_n, B_n \in \mathbb{R}$$

$$(58) \quad \dot{u}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\kappa_1 x) n\omega_0 [A_n \cos(n\omega_0 t) - B_n \sin(n\omega_0 t)]$$

Aus (16) erhält man schließlich Bedingungen für die Koeffizienten:

$$(59) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\kappa_1 x) = u(x, 0); \quad x \in [0; \ell] \text{ beliebig}$$

$$(60) \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0 A_n \sin(n\kappa_1 x) = \dot{u}(x, 0); \quad x \in [0; \ell] \text{ beliebig}$$

Deren Bestimmung und ob dies bei beliebigen RBn möglich ist, ist Bestandteil der Fourier-Entwicklung (\rightarrow Satz 5), die in späteren Vorträgen behandelt wird.

Für den Fall $g(x) \equiv 0$ (Saite zu Beginn in Ruhe; \rightarrow Abschnitt 2.5) erhält man $A_n = 0$; $n \in \mathbb{N}$.

In der Literatur wird oft

$$(61) \quad \ell = \pi \Rightarrow \kappa_1 = 1; \quad \omega_0 = c$$

und evtl. auch noch $c = 1$ gesetzt (\rightarrow Satz 5). Dadurch werden die Formeln etwas einfacher und lassen sich durch Skalierung von Ort x und Zeit t wieder auf den allgemeinen Fall zurückführen.

2.4 Fourier-Reihen

Wir geben hier nur die Formeln für die Fourier-Entwicklung an (\rightarrow [Heu2, S. 124], [Kön1, S. 326], [For1, §23]). Die Herleitung und Bedingungen für ihre Gültigkeit, insbesondere für die Konvergenz der Reihe und Gleichheit von Reihe und entwickelter Funktion f folgen in späteren Vorträgen.

Satz 5 Fourier-Entwicklung und Euler-Fourier-Formeln für die Koeffizienten.

Unter bestimmten Voraussetzungen gilt für eine 2π -periodische Funktion f

$$(62) \quad f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx); \quad \text{mit}$$

$$(63) \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx; \quad n = 0, 1, \dots$$

$$(64) \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx; \quad n = 1, 2, \dots$$

Die Interpolation durch abbrechende trigonometrische Polynome wird wie bei den Taylor-Polynomen oder den Interpolations-Polynomen der Numerik mit steigendem Grad am Rand oft stark oszillierend, besonders an Unstetigkeitsstellen. Beispiele von Fourier-Polynomen zeigen die folgenden Abbildungen (\rightarrow [For1a, S. 198], [For1n, S. 275])

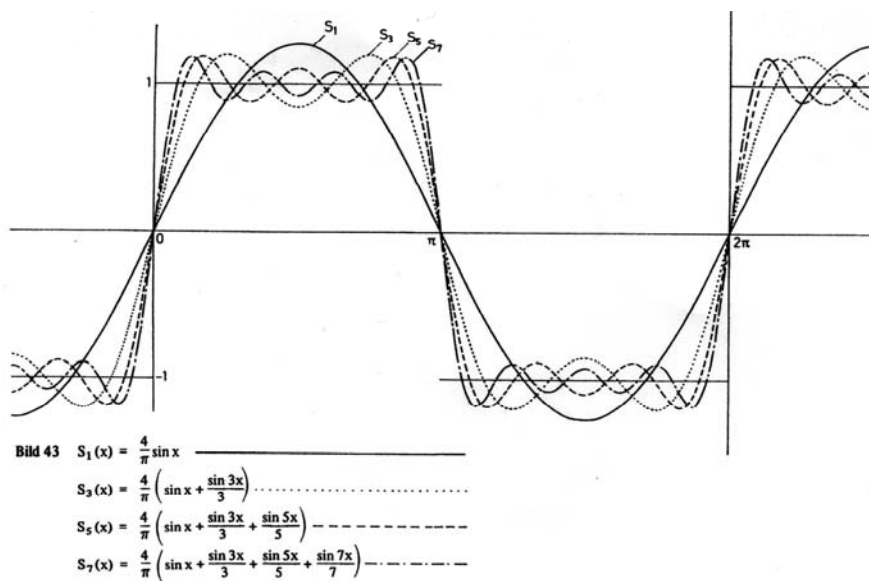


Abbildung 3 Fourier-Polynome der Rechteck-Funktion

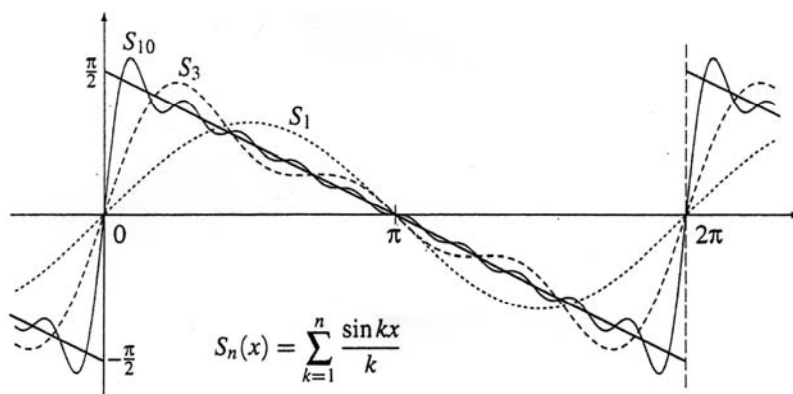


Abbildung 4 Fourier-Polynome der Sägezahn-Funktion

2.5 Eulers Analyse

Nach [Bri2, S. 260ff] hat Euler die Wellengleichung (Satz 2) unter der vereinfachenden Annahme untersucht, dass die Saite zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe ist, d.h. $g(x) \equiv 0$:

$$(65) \quad \ddot{u} = c^2 u''$$

$$(66) \quad u(0, t) = u(l, t) = 0; \quad t \geq 0 \text{ beliebig}$$

$$(67) \quad u(x, 0) = f(x); \quad \dot{u}(x, 0) = 0; \quad x \in [0; l] \text{ beliebig}$$

Er nimmt weiter an, dass $u, f \in C^\infty$.

Dann setzt er die zunächst nur auf dem Intervall $[0; l]$ definierte Funktion f wie folgt fort auf $[-l; l]$:

Definition

$$(68) \quad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x); & \text{für } 0 \leq x \leq l \\ -f(-x); & \text{für } -l \leq x \leq 0 \end{cases}$$

und erweitert diese dann $2l$ -periodisch auf ganz \mathbb{R} .

$$(69) \quad \tilde{f}(x+2l) = \tilde{f}(x); \quad x \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

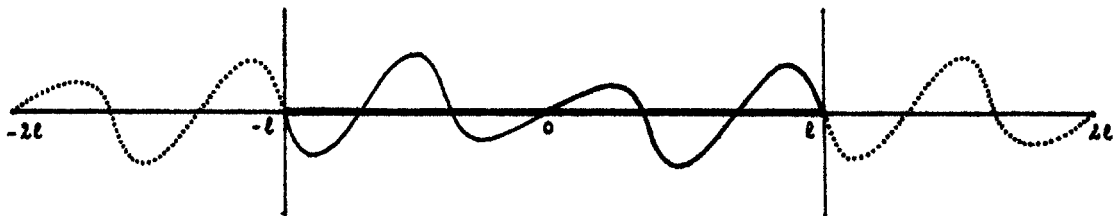


Abbildung 5 Eulers Konstruktion von $\tilde{f}(x)$

Als Lösung der Wellengleichung der schwingenden Saite verwendete er eine Kombination von mit der Geschwindigkeit c laufenden Wellen:

$$(70) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{f}(x-ct) + \tilde{f}(x+ct)]$$

Es handelt sich um die Linearkombination einer nach rechts und einer nach links laufenden Welle, und beschreibt eine **stehende Welle**, welche die Wellengleichung und die Randbedingungen erfüllt ($t \geq 0; x \in [0; l]$ beliebig):

$$(71) \quad \ddot{u} = \frac{1}{2} c^2 [\ddot{\tilde{f}}(x-ct) + \ddot{\tilde{f}}(x+ct)] = \frac{1}{2} c^2 [\tilde{f}''(x-ct) + \tilde{f}''(x+ct)] = c^2 u''$$

$$(72) \quad u(l, t) = \frac{1}{2} (\tilde{f}(l-ct) + \tilde{f}(l+ct)) = \frac{1}{2} (\tilde{f}(-l-ct) + \tilde{f}(l+ct)) = \frac{1}{2} (-\tilde{f}(l+ct) + \tilde{f}(l+ct)) = 0$$

$$(73) \quad u(0, t) = \frac{1}{2} (\tilde{f}(-ct) + \tilde{f}(ct)) = \frac{1}{2} (-f(ct) + f(ct)) = 0$$

$$(74) \quad u(x, 0) = \frac{1}{2} (\tilde{f}(x) + \tilde{f}(x)) = \tilde{f}(x) = f(x)$$

2.6 Die gezupfte Saite

Die gezupfte Saite ist vor dem Loslassen in Ruhe und erfüllt daher die Bedingung der Analyse von Euler. Die Auslenkung zu Beginn wird näherungsweise beschrieben durch eine stückweise lineare Knickfunktion $f = k$ (\rightarrow Abbildung 6). Diese ist in den Knickstellen nicht differenzierbar, besitzt aber eine Fourier-Reihe.

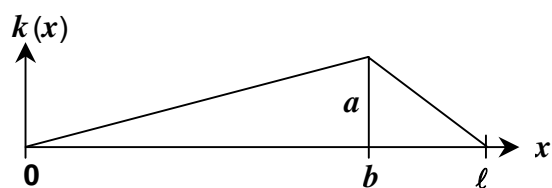


Abbildung 6 Die Knickfunktion k / gezupfte Saite

Setzt man die Funktion k ein in die Gleichung (70) von Euler, dann erhält man einen Schwingungsverlauf wie in Abbildung 7 als Überlagerung einer nach links und einer nach rechts laufenden Welle.

Für die Auslenkung der gezupften Saite findet man mit $\ell = \pi$ und $c = 1$ für die Fourier-Entwicklung nach Satz 5 (\rightarrow [Bri2, S. 271])

$$(75) \quad u(x, t) = \frac{2a}{b(\pi - b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nb)}{n^2} \sin(nx) \cos(nt)$$

Hieraus lässt sich ablesen, wie stark bei festem x die Obertöne in Abhängigkeit von b sind, d.h. der Stelle, an der gezupft wird. Abbildung 8 stellt graphisch die relative Amplitude der ersten 10 Harmonischen dar für verschiedene Stellen, an denen gezupft wird.

Laut [Bri2] liegt die **musikalisch optimale Stelle** zum Zupfen etwa bei $b = 0,2\ell$. (\rightarrow Abbildung 8, Farbe Grün). Die 2. bis 4. Harmonische (Oktave, Quinte und Terz) sind recht stark, die höheren, ab der 7. z.T. unreinen (\rightarrow Tabelle 3), dagegen unterdrückt. Bei Zupfinstrumenten wie der Gitarre liegt diese Stelle über dem Schall-Loch (ca. von $0,15\ell$ bis $0,3\ell$ gelegen); bei Streichinstrumenten wie Violine, Viola, Violoncello hingegen über den ersten Zentimetern des Griffbrettes. Dies liegt daran, dass diese primär für das Streichen gebaut sind.

Bei $b = 0,5\ell$ (in der Mitte der Saite; \rightarrow Abbildung: Farbe Schwarz) fehlen alle geraden Harmonischen und damit insbesondere alle Oktaven. Der Ton klingt hohl und dumpf.

Bei $b = 0,05\ell$ und weniger (zum Rand/Steg hin) sind auch die hohen, z. T. unreinen Obertöne ab der 7. Harmonischen stark und bewirken einen scharfen, harten Klang. Die n -te Harmonische hat hier bereits fast genau den Anteil $1/n$, wie im Grenzfall $b \rightarrow 0$ (\rightarrow Abbildung: Farbe Weiß).

Für die **gestrichene Saite** lassen die Ergebnisse eine ähnliche Variation des Obertonspektrums vermuten. Mathematisch ist dies mit diesem Ansatz nicht zu ermitteln, da es sich nicht um eine freie, sondern um eine erzwungene Schwingung handelt, die nicht mehr der Wellengleichung in der diskutierten Form genügt. Nach praktischen Erfahrungen liegt das Optimum allerdings deutlich näher zum Steg (bei ca. $0,1\ell$) und der musikalisch erwünschte Bereich ist erheblich kleiner – abgesehen von besonderen Techniken wie „sul ponticello“, bei der durch Streichen sehr nahe am Steg Klänge erzeugt werden, in denen der Grundton fast völlig fehlt, und deren „sphärischer“ Klang stark vom üblichen Streicherklang abweicht.

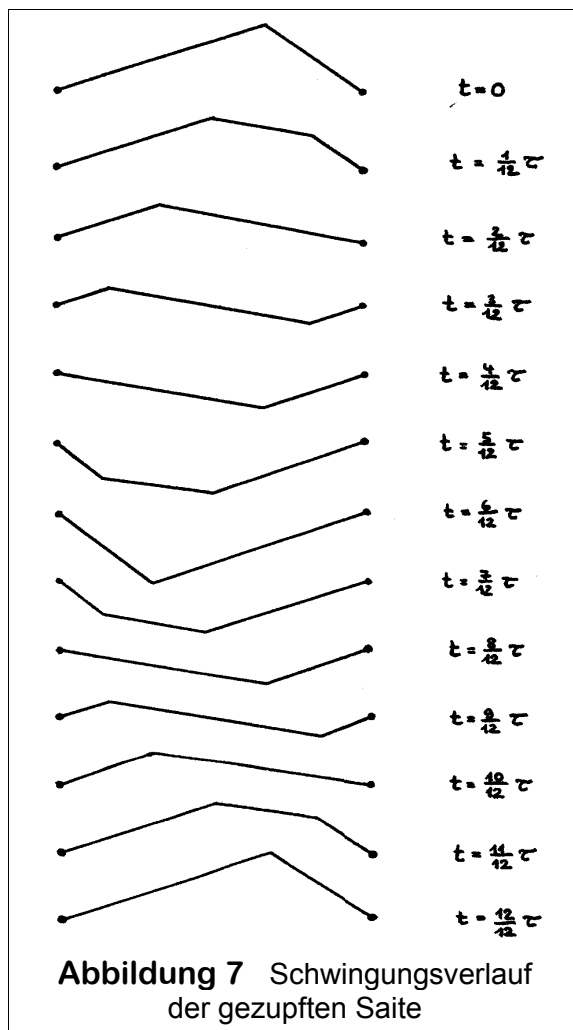
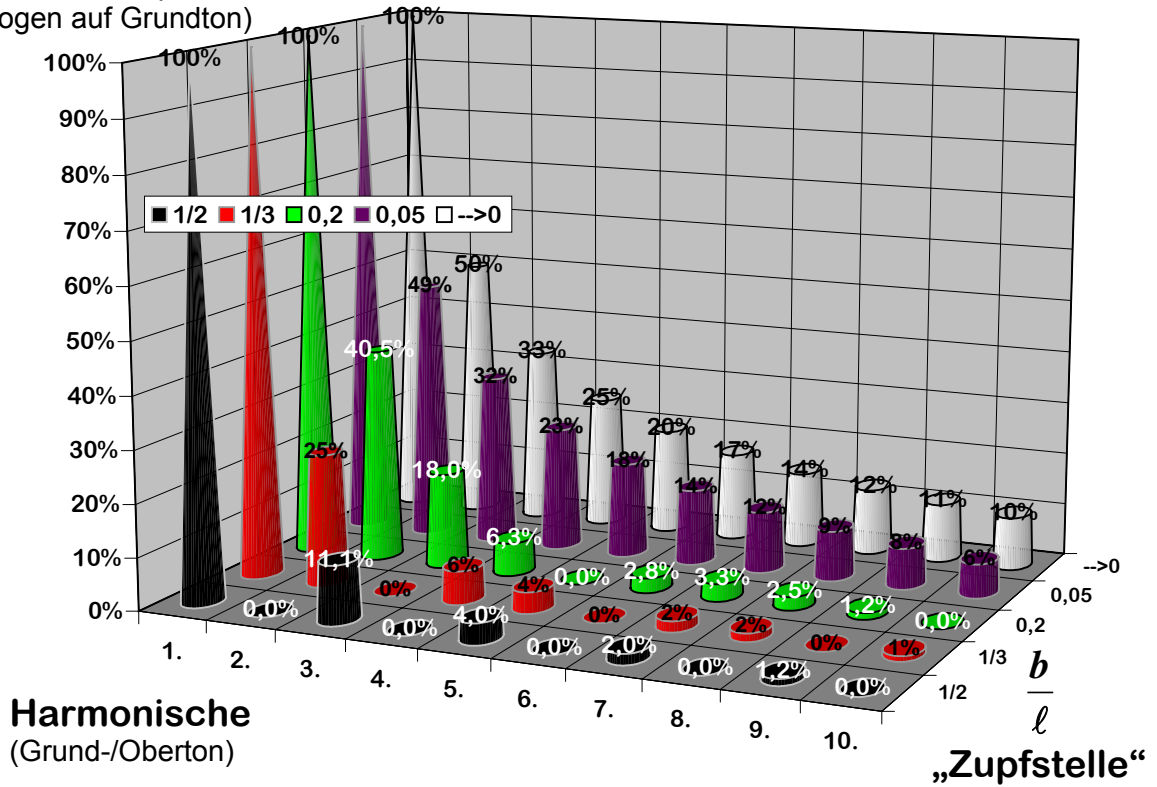


Abbildung 7 Schwingungsverlauf der gezupften Saite

Relative Amplitude

(bezogen auf Grundton)



Relative Amplitude

(bezogen auf Grundton)

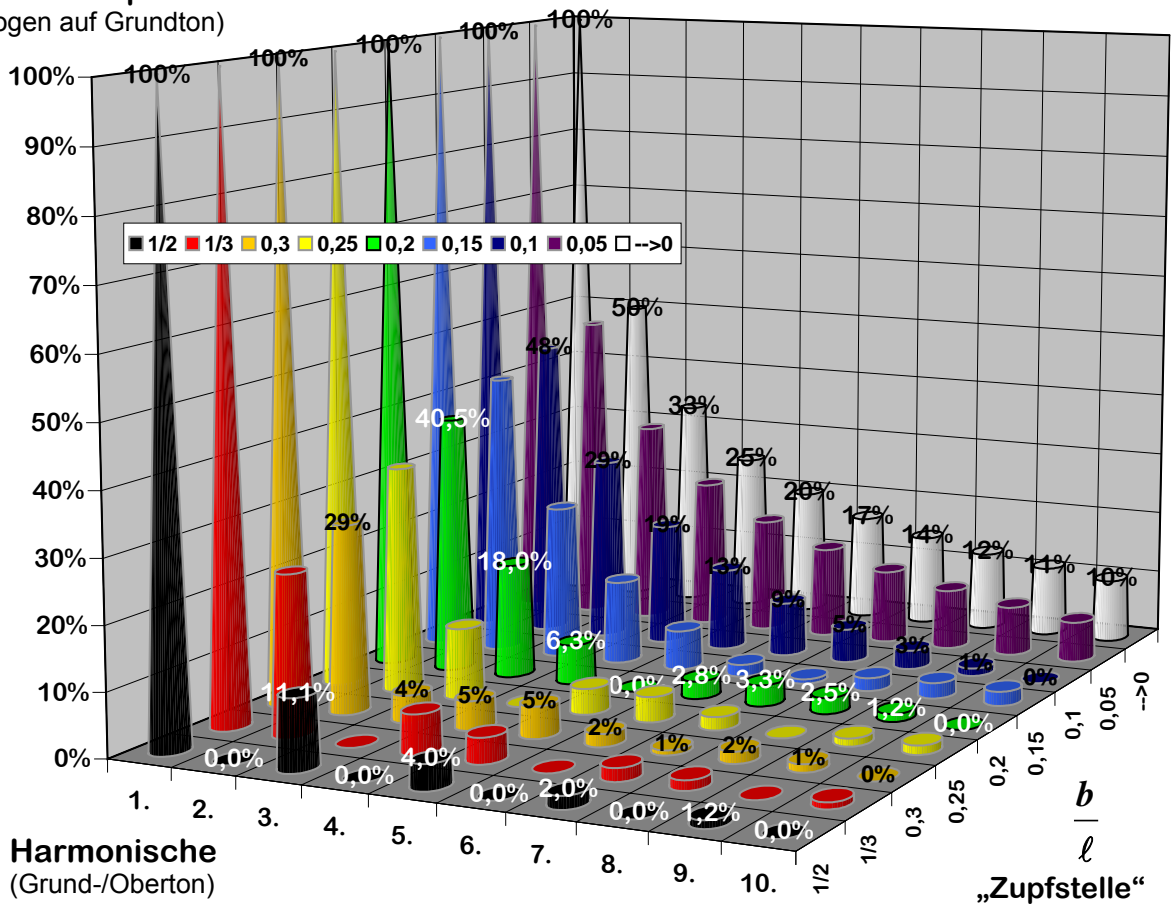


Abbildung 8 Obertonanteile an verschiedenen Stellen gezupfter Saiten

3 Schwingungen und Töne

3.1 Etwas Harmonielehre

Definition der musikalischen Intervalle

Man unterscheidet in der Musik zwischen **reiner** und **temperierter Stimmung**. Bei reiner Stimmung (im Barock und bis gegen 1800) wird für jedes Intervall ein exakter Bruch als Frequenzverhältnis angenommen. In der temperierten Stimmung (gegen 1750 eingeführt) wird hingegen die Oktave in 12 gleiche Halbtöne mit dem Frequenzverhältnis $\sqrt[12]{2}$ aufgeteilt, und jedes Intervall ist als Zusammensetzung von Halbtönen definiert (→Tabelle 1).

Die reine Stimmung entspricht dem Höreindruck bei „rein“, d.h. harmonisch klingenden Akkorden. Bei ihr haben allerdings z.B. 7 Oktaven und 12 Quinten nicht genau das gleiche Verhältnis und immer nur eine einzige Tonart klingt absolut rein. Sie findet vor allem Anwendung bei Chor-Gesang und Melodie-Instrumenten wie der Violine. In der temperierten Stimmung wird der „Fehler“ dagegen gleichmäßig auf alle Halbtöne und Tonarten verteilt. Sie wird heute bei Tasteninstrumenten wie dem Klavier verwendet.

Die **pythagoreische Stimmung** ist benannt nach Pythagoras. Bei ihr wird nur der Fehler der Quinten im Vergleich zu den Oktaven ausgeglichen, das sogenannte „pythagoreische Komma“:

(76) $1,5^{12} \doteq 129,75 \neq 128 = 2^7$ (12 Quinten \neq 7 Oktaven, obwohl $12 \times 7 = 7 \times 12$)

Name des Intervalls	Frequenzverhältnis „reines Intervall“	in Halbtönen („temperiert“)
Prime	1 : 1 = 1	0: 1,0000
Oktave	2 : 1 = 2	12: 2,0000
Quinte	3 : 2 = 1,5	7: 1,4983
Quarte	4 : 3 \doteq 1,3333	5: 1,3348
Große Terz	5 : 4 = 1,25	4: 1,2599
Kleine Terz	6 : 5 = 1,2	3: 1,1892
Große Sekunde	9 : 8 = 1,125	2: 1,1225
Kleine Sekunde	16:15 \doteq 1,0417	1: 1,0595
Kleine Sexte	8 : 5 = 1,6	8: 1,5874
Große Sexte	10: 6 \doteq 1,6667	9: 1,6818
Kleine Septime	16: 9 \doteq 1,7778	10: 1,7818
Große Septime	15:8 = 1,875	11: 1,8877
verminderte Quinte / Tritonus	$(9:8)^3 = 729:512 \doteq 1,4238$ („Diabolus in Musica“)	6: 1,4142

Tabelle 1 Die musikalischen Intervalle

Bruchrechnung der Intervalle

Die Addition, d.h. das aufeinander Schichten von Intervallen ergibt sich durch Multiplikation der Verhältnisse, die Subtraktion durch entsprechende Division.

Komplementärintervalle ergänzen sich jeweils zur Oktave (→Tabelle 2), da Töne im Abstand einer Oktave sehr ähnlich klingen.

Auch andere Intervalle können als Summe von kleineren gebildet werden, z.B. die Quinte aus großer und kleiner Terz: $(6 : 5) \times (5 : 4) = (6 : 4) = (3 : 2)$.

Quinte	Quarte	$(3 : 2) \times (4 : 3) = (2 : 1)$
Große Terz	Kleine Sexte	$(5 : 4) \times (8 : 5) = (2 : 1)$
Kleine Terz	Große Sexte	$(6 : 5) \times (10 : 6) = (2 : 1)$
Große Sekunde	Kleine Septime	$(9 : 8) \times (16 : 9) = (2 : 1)$
Kleine Sekunde	Große Septime	$(16 : 15) \times (15 : 8) = (2 : 1)$
Tritonus	Tritonus	$(\sqrt{2} : 1) \times (\sqrt{2} : 1) = (2 : 1)$

Tabelle 2 Komplementärintervalle

3.2 Grund- und Obertöne

Die Harmonischen einer Schwingung setzen sich zum großen Teil aus reinen Intervallen zusammen, wie die folgende Abbildung und Tabelle zeigen.

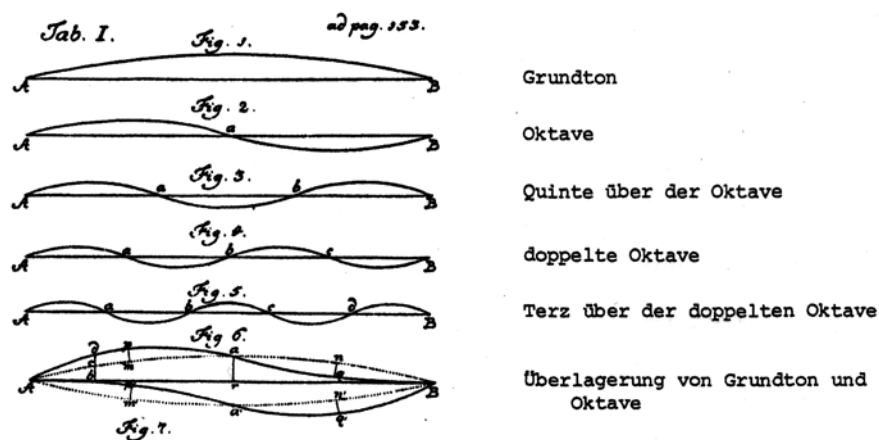


Abbildung 9 Wellenformen einiger Obertöne

Harmonische / Name	Frequenzverhältnis
1. Grundton (Prime)	1 : 1
2. Oktave	2 : 1
3. Quinte über der Oktave)	3 : 1 = (3 : 2) x (2 : 1)
4. Doppeloktave (2-Okt.)	4 : 1 = (2 : 1) ²
5. Große Terz über der 2-Okt.	5 : 1 = (5 : 4) x (4 : 1)
6. Quinte über 2-Okt.	6 : 1 = (3 : 2) x (4 : 1)
7. unreine Septime über 2-Okt.	7 : 1 = — (kein reines Intervall)
8. Dreifachoktave (3-Okt.)	8 : 1 = (2 : 1) ³
9. Große Sekunde über 3-Okt.	9 : 1 = (9 : 8) x (8 : 1)
10. Große Terz über 3-Okt.	10 : 1 = (5 : 4) x (8 : 1)
11. unreine Quarte über 3-Okt.	11 : 1 = — (kein reines Intervall)
12. Quinte über 3-Okt.	12 : 1 = (3 : 2) x (8 : 1)
13. unrein	13 : 1 = — (kein reines Intervall)
14. unrein	14 : 1 = — (kein reines Intervall)
15. Große Septime über 3-Okt.	15 : 1 = (15 : 8) x (8 : 1)
16. Vierfachoktave (4-Okt.)	16 : 1 = (2 : 1) ⁴

Tabelle 3 Intervallzusammensetzung einiger Obertöne

4 Literatur

Quellen zur schwingenden Saite

- [Heu2] Harro Heuser: „**Analysis 2**“, 1980, 6. Aufl. 1991,
§§ 132/3, 144/5, S. 118ff, 174ff {Schwingende Saite Einführung/Fourier-Reihen}
- [HeuG] Harro Heuser: „**Gewöhnliche Differentialgleichungen**“, 1988, 2. Aufl. 1991,
§§ 18, 28, 34, 45, S. 200ff, 292ff, 372ff, 438ff {Historisches, Herleitung der Wellengleichung}
- [Bri2] Egbert Brieskorn: „**Lineare Algebra und analytische Geometrie II**“, 2. Aufl. 1985,
§ 11.7, Anhang S. 260ff {Schwingende Saite Eigenwertproblem}
- [Gre2] Walter Greiner: „**Theoretische Physik, Band 2: Mechanik II**“, 1977, 2. Aufl. 1977,
§ 8, S. 82ff {Herleitung Wellengleichung, schwingende Saite}

Grundlagen, Weiterführendes

- [Kön1] Konrad Königsberger: „**Analysis 1**“, 1990, 6. Aufl. 2004,
§§ 10.4, 16, S. 182ff, 321ff {Schwingungsgleichung, Fourier-Reihen}
- [For1a] Otto Forster: „**Analysis 1**“, 1976, 4. Aufl. 1985,
§ 23, S. 189ff {Fourier-Reihen, Abb. Recheck}
- [For1n] Otto Forster: „**Analysis 1**“, 1976, 8. Aufl. 2006,
§ 23, S. 265ff {Fourier-Reihen, Abb. Sägezahn}
- [For2] Otto Forster: „**Analysis 2**“, 1976, 7. Aufl. 2006,
§ 14, S. 174ff {Lösung der Schwingungsgleichung}