# Die Fourier-Transformierte

Proseminar Analysis
Sommersemester 2008

Natalia Dück

16.06.08

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung/Fourier-Transformierte

## 1.1 Definition

**Definiton**: Es sei f eine integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$, das heißt $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist die Fourier-Transformierte zu f die Funktion $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit

$$\boxed{\hat{f}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-i<x,t>} dt,\ x \in \mathbb{R}^n}$$

**Bemerkungen:**

- $\hat{f}$ ist stetig (nach dem Stetigkeitssatz für parameterabhängige Integrale).
- $\hat{f}$ ist beschränkt mit $|\hat{f}(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \|f\|_1, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- Die Fourier-Transformation $f \longmapsto \hat{f}$ definiert eine lineare Abbildung.

## 1.2 Beispiele

1. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit f charakteristische Funktion des Intervalls $I = [-1; 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \notin I \\ 1 & \text{falls } x \in I \end{cases}$$

   Dann ist die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ von f:

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-1}^{1} e^{-ixt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\sin(x)}{x} \end{aligned}$$

   Es ist zu beachten: Obwohl $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ gilt, ist $\hat{f} \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

2. Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = e^{\frac{-\|x\|^2}{2}}; x = (x_1, x_2, ...., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

   Dann ist die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ von f:

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-i<x,t>} dt \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|t\|^2}{2}} e^{-i<x,t>} dt \\
&= \prod_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t_\nu^2}{2}} e^{-ix_\nu} dt_\nu \\
&= \prod_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(t_\nu + ix_\nu)^2 - \frac{1}{2}x_\nu^2} dt_\nu \\
&= \prod_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2} e^{-\frac{1}{2}x_\nu^2} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} e^{z_\nu^2} dz_\nu}_{\sqrt{\pi}} \\
&= \prod_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_\nu^2} \sqrt{\pi} \\
&= \prod_{\nu=1}^{n} e^{-\frac{1}{2}x_\nu^2} \\
&= e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
\boxed{f = \hat{f} \text{ für } f(x) = e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}}
$$

## 1.3 Einige Eigenschaften der Fourier-Transformierten

**Satz 1:** Sei $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, und $\hat{f}, \hat{g}$ ihre Fourier-Transformierten.

a) Sei $(\tau_a f)(x) := f(x-a), a \in \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$
\widehat{(\tau_a f)}(t) = \hat{f}(t) e^{-i<a,t>}.
$$

b) $\widehat{(f * g)}(t) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(t)\hat{g}(t)$.

c) Sind $\hat{f}g$ und $f\hat{g}$ integrierbar, so gilt:

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x) d^n x = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\hat{g}(y) d^n y.
$$

**Beweise:**

a)

$$\begin{aligned}
\widehat{(\tau_a f)}(t) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-a) e^{-i<x,t>} dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i<y+a,t>} dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-i<a,t>} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i<y,t>} dy \\
&= e^{-i<a,t>} \hat{f}(t).
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\widehat{(f * g)}(t) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) e^{-i<x,t>} dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big( \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(s) g(x-s) ds \Big) e^{-i<x,t>} dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big( \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x-s) e^{-i<x-s,t>} dx \Big) f(s) e^{-i<s,t>} ds
\end{aligned}$$

(nach dem Satz von Fubini)

$$\begin{aligned}
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x-s) e^{-i<x-s,t>} dx \Big) f(s) e^{-i<s,t>} ds \\
&= \hat{g}(t) \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(s) e^{-i<s,t>} ds \\
&= \hat{g}(t) \hat{f}(t) (2\pi)^{\frac{n}{2}}.
\end{aligned}$$

c) $\hat{f}g$ und $f\hat{g}$ sind integrierbar, da $\hat{f}$ und $\hat{g}$ stetig und beschränkt sind:

$$\begin{aligned}
\int f(x)\hat{g}(x) d^n x &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(x) \Big( \int g(y) e^{-i<y,x>} d^n y \Big) d^n x \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \Big( \int f(x) e^{-i<x,y>} d^n x \Big) g(y) d^n y \\
&= \int \hat{f}(y) g(y) d^n y.
\end{aligned}$$

□

## 1.4 Der Umkehrsatz

Gewisse Funktionen besitzen eine Integraldarstellung mittels ihrer Fourier-Transformierten, wie der nachfolgende Satz zeigt. Diese Darstellung findet ihre Anwendung im Lösen von Differentialgleichungen (siehe Teil 2).

**Umkehrsatz:** Es sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion, deren Fourier-Transformierte ebenfalls zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gehört. Dann gilt für fast alle $t \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_R \hat{f}(x) e^{i<x,t>} dx.}$$

**Beweis:** Die Dirac-Folge $(\delta_k)$ sei definiert durch

$$\delta_1 := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-\|t\|^2}{2}} \text{ und } \delta_k := k^n \delta_1(kt).$$

$\delta_1$ erfüllt die Invarianzeigenschaft, d.h. es gilt $\delta_1 = \hat{\delta_1}$ (siehe Beispiel 2.2)):

$$\begin{aligned}
\delta_k(t) &= k^n \hat{\delta}_1(kt) \\
&= k^n \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}} e^{-i<kt,\xi>} d\xi \\
&= \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}} \underbrace{e^{i<kt,\xi>}}_{\text{da } \delta_1 \text{ gerade ist}} d\xi \\
\text{(Substituiere: } k\xi = x) &= \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n \frac{1}{k^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x\|^2}{2k^2}} e^{i<x,t>} dx \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x\|^2}{2k^2}} e^{i<x,t>} dx
\end{aligned}$$

Nun falten wir f mit der Dirac-Folge $(\delta_k)$:

$$\begin{aligned}
(f * \delta_k)(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \underbrace{f(s) e^{-\frac{\|x\|^2}{2k^2}} e^{-i<x,t-s>}}_{\leq |f(s)| e^{-\|x\|^2} \text{(integr. Majorante)}} dx \Big) ds \\
\text{(Vertauschen der Integrationsreihenfolge)} &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \Big( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(s) e^{-i<s,x>} ds \Big) e^{-\frac{\|x\|^2}{2k^2}} e^{i<x,t>} dx \\
&= \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\hat{f}(x) e^{-\frac{\|x\|^2}{2k^2}} e^{i<x,t>}}_{\leq |\hat{f}(x)| \text{(integr. Majorante)}} dx}_{} \qquad (1) \\
&\longrightarrow \frac{1}{(2\pi^{\frac{n}{2}})} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{i<x,t>} dx
\end{aligned}$$

Der Ausdruck unter dem Integral besitzt für alle k die obige intergrierbare Majorante. Nach dem *Konvergenzsatz von Lebesgue* konvergiert dieser also punktweise für $k \to \infty$. Nach dem Approximationssatz über die Faltung von Funktionen mit Dirac-Folgen (Vortrag vom 21.04.08) gilt allerdings:

$$(f * \delta_k) \longrightarrow f \text{ bezgl. } L^1.$$

Des Weiteren gilt nach dem Satz von Riesz-Fischer: Es gibt eine geeignete Teilfolge von der Funktion (1), die auch *punktweise* gegen f konvergiert.
$\Longrightarrow$ Behauptung.

$\square$

**Bemerkung:** Gleichheit besteht in jedem Punkt $t_0$ in dem f stetig ist.

# 2 Anwendung auf (gewöhnliche) Differentialgleichungen

## 2.1 Definition

**Definiton: (Multiindex)** Ein Multiindex ist ein n-Tupel $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ganzer Zahlen $\alpha_\nu \geq 0$ mit

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$
$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

für $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und

$$c^\alpha := c^{|\alpha|}$$

für $c \in \mathbb{C}$. Demnach ist

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \ldots \partial_n^{\alpha_n} f.$$

## 2.2 Verhalten der Fourier-Transformierten bei der Differentation

**Lemma 1:** $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ so, dass für ein $k \in \mathbb{N}$ und jeden Multiindex $\alpha$ mit $|\alpha| \leq k$, $t^\alpha f(t)$ über $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist. Dann existieren die partiellen Ableitung $\partial^\alpha \hat{f}$ und es gilt:

$$\partial^\alpha \hat{f} = (-i)^\alpha \widehat{t^\alpha f},$$
$$\widehat{t^\alpha f} = (i\partial)^\alpha \hat{f}.$$

Insbesondere sind die partiellen Ableitungen $\partial^\alpha \hat{f}$ beschränkt.

**Beweis:** Es genügt die Behauptung nur für $\partial_\nu$ zu zeigen:

$$\partial_\nu \hat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \partial_\nu \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-i<x,t>} dt.$$

Nun gilt: $|\partial_\nu f(t) e^{-i<x,t>}| = |f(t)(-i) t_\nu^{-i<x,t>}| \leq |t_\nu f(t)|$.

Mit dem Differentationssatz für parameterabhängige Integrale ergibt sich:

$$\begin{aligned}\partial_\nu \hat{f}(x) &= (-i)\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} t_\nu f(t)e^{-i<x,t>}dt \\ &= (-i)\widehat{t_\nu f(x)}.\end{aligned}$$

$\square$

**Lemma 2:** Sei $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$, dem Vektorraum der k-mal stetig-differenzierbaren Funktionen, so dass f und $\partial^\alpha f$ für jeden Multiindex $\alpha$ mit $|\alpha| \leq k$ über $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist. Dann gilt:

$$\widehat{\partial^\alpha f} = (ix)^\alpha \hat{f}.$$

**Beweis:** Es genügt die Behauptung nur für $\partial_\nu$ und die Dimension $n = 1$ zu zeigen: Es gilt

$$f(t) = f(0) + \int\limits_0^t f'(\tau)d\tau.$$

Aus dieser Darstellung folgt zunächst die Existenz folgender Grenzwerte:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) \text{ und } \lim_{t\to-\infty} f(t).$$

Da aber f auch über ganz $\mathbb{R}$ integrierbar sein soll, folgt

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = 0.$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \widehat{f'(x)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{ixt}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\underbrace{f(t)e^{-ixt}\mid_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)(-ix)e^{-ixt}dt \\ &= \frac{ix}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt \\ &= ix\hat{f}(x).\end{aligned}$$

$\square$

## 2.3 Anwendungsbeispiel: Schwingungsgleichung

Gegeben sei folgende Differentialgleichung für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ mit $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

$$y'' - y = f. \tag{2}$$

Gesucht sei nun eine Funktion $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, die (2) an allen Stetigkeitsstellen löst.
Falls $y, y'$ und $y'' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ folgt mit Lemma 2:

$$\begin{aligned} \hat{f}' &= (ix)^2\hat{y} - \hat{y} \\ &= (-x^2 - 1)\hat{y} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{-\frac{1}{1+x^2}\hat{f}(x)}_{\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})} = \hat{y}(x)$$

Der Umkehrsatz liefert dann:

$$\begin{aligned} \Longrightarrow y(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{y}(x)e^{ixt}dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\hat{f}(x)}{1+x^2}e^{ixt}dx \end{aligned} \tag{3}$$

Es soll nun gezeigt werden, dass (3) tatsächlich aus $\mathcal{C}^2$ ist und (2) an allen Stetigkeitsstellen löst:

$$y(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\hat{f}(x)}{1+x^2}e^{ixt}dx$$

Für fixes x ist die Funktion $t \mapsto \frac{\hat{f}(x)}{1+x^2}e^{ixt}$ stetig-differenzierbar. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \Big|\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\hat{f}(x)}{1+x^2}e^{ixt}\Big)\Big| &= \Big|\frac{(ix)\hat{f}(x)}{1+x^2}e^{ixt}\Big| \leq |\hat{f}(x)| \\ \Big|\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{(ix)\hat{f}(x)}{1+x^2}e^{ixt}\Big)\Big| &= \Big|\frac{(ix)^2\hat{f}(x)}{1+x^2}e^{ixt}\Big| \leq |\hat{f}(x)| \end{aligned}$$

In beiden Fällen ist $|\hat{f}(x)|$ eine integrierbare Majorante. Der Differentationssatz liefert somit $y \in \mathcal{C}^2$.

$$y''(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\hat{f}(x)}{1+x^2}(ix)^2e^{ixt}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\hat{f}(x)}{1+x^2} x^2 e^{ixt} \\
y''(t) - y(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\hat{f}(x)}{1+x^2} x^2 e^{ixt} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\hat{f}(x)}{1+x^2} e^{ixt} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \Big( \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} \Big) \hat{f}(x) e^{ixt} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) e^{ixt} dx \\
\text{(nach dem Umkehrsatz)} &= f(t).
\end{aligned}
$$

Da der Umkehrsatz fast überall und insbesondere an den Stetigkeitsstellen gilt, löst y die Differentialgleichung (2) an all diesen Stellen.

# 3 Fourier-Transformation im Schwartz-Raum

## 3.1 Der Schwartz-Raum

Die Integrierbarkeit von $\hat{f}$ ist nicht immer gegeben, wie Beispiel 1) das demonstiert hat. Im Umkehrsatz musste deshalb auch $f \in \mathcal{L}^1$ explizit gefordert werden. Ein Raum, in dem dies das aber gegeben ist, ist der Raum der *schnell fallenden* Funktionen.

**Definition:** Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *schnell fallend*, wenn sie beliebig oft stetig-differenzierbar ist, und wenn für jedes Paar $\alpha, \beta$ von Multiindizes die Funktion $t^\alpha \partial^\beta f(t)$ auf $\mathbb{R}^n$ beschränkt ist.

Der Vektorraum aller schnell fallenden Funktionen heißt *Schwartz-Raum* und wird mit $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.

**Beispiele:** Alle $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen mit kompaktem Träger und Funktionen der Form $e^{-a\|x\|^2}, a > 0$ sind aus $\mathcal{S}$.

**Definiton:**(Skalarprodukt) Auf $\mathcal{S}$ ist aufgrund der Tatsache, dass mit $f, g \in \mathcal{S}$ auch $f\overline{g} \in \mathcal{S}$ gilt, die Einführung eines Skalarprodukts sinnvoll:

$$\boxed{< f, g >:= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\overline{g} dx}$$

## 3.2 Hermitesche Funktionen

Zunächst werden die *Hermiteschen Polynome* eingeführt. Diese sind defininert durch

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{(dx)^n} e^{-x^2}, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Die ersten Hermite-Polynome lauten:

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= (-1)^0 e^{x^2} e^{-x^2} = 1 \\
H_1(x) &= (-1)^1 e^{x^2} e^{-x^2}(-2x) = 2x \\
H_2(x) &= (-1)^2 e^{x^2} e^{-x^2}(4x^2 - 2) = 4x^2 - 2 \\
H_3(x) &= (-1)^3 e^{x^2} e^{-x^2}(8x^3 - 12x) = 8x^3 - 12x
\end{aligned}$$

Zudem gilt

$$H'_n = 2nH_{n-1} \tag{4}$$

und die Rekursionsformel

$$H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}. \tag{5}$$

**Beweis von (4) und (5):**
Zunächst soll folgende Identität bewiesen werden:

$$w(x, t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n, t \in \mathbb{R}.$$

Diese Funktion wird als *erzeugende Funktion* der Hermite-Polynome bezeichnet.
Nun gilt, dass $w$ als Funktion von t stetig-differenzierbar ist. Die Entwicklung von $w$ in der Variable t um 0 liefert

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{(n)(0)}}{n!} t^n, t \in \mathbb{R}.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
w^{(n)}(0) &= \left[\frac{\partial^n}{(\partial t)^n} e^{2xt-t^2}\right]_{t=0} \\
&= e^{x^2} \left[\frac{\partial^n}{(\partial t)^n} e^{-(x-t)^2}\right]_{t=0} \\
\text{(Substitution: } u = x - t\text{)} &= (-1)^n e^{x^2} \left[\frac{\partial^n}{(\partial u)^n} e^{-u^2}\right]_{u=x} \\
&= (-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^n}{(\partial x)^n} e^{-u^2} \\
&= H_n(x).
\end{aligned}$$

Zu (4):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} w(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} e^{2xt-t^2} = 2te^{2xt-t^2} &= 2tw(x,t) \\
\Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} w(x,t) - 2tw(x,t) &= 0 \\
\Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n - 2t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n &= 0 \\
\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n'(x)}{n!} t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{n!} t^{n+1} &= 0 \\
\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n'(x)}{n!} t^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{(n-1)!} t^n &= 0
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}
\frac{H_n'(x)}{n!} - 2\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} &= 0 \\
\Longleftrightarrow H_n'(x) &= 2nH_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

Zu (5):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} w(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t} e^{2xt-t^2} = (2x-t)e^{2xt-t^2} \\
&= (2x-2t)w(x,t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} w(x,t) - 2xw(x,t) - 2tw(x,t) &= 0 \\
\Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n + 2t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n &= 0 \\
\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{(n-1)!} t^{n-1} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1} &= 0 \\
\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{n!} t^n - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} t^n &= 0 \\
\Longleftrightarrow H_1(x) - 2xH_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{n!} t^n - 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} t^n &= 0
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}
\frac{H_{n+1}(x)}{n!} - 2x\frac{H_n(x)}{n!} + 2\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} &= 0 \\
\Longrightarrow H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Die *Hermiteschen Funktionen* $h_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sind folgendermaßen definiert:

$$h_n(x) := H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{(dx)^n} e^{x^2}.$$

**Satz:** $h_n$ ist eine Eigenfunktion der Fourier-Transformation zum Eigenwert $(-i)^n$, das heißt es gilt:

$$\hat{h}_n = (-i)^n h_n.$$

**Beweis** durch vollständige Induktion nach n:
Induktionsanfang: $n = 0$

$$h_0(x) = H_0(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} = (-i)^0 \hat{h_0}(x)$$

Induktionsschritt: $n \longrightarrow n+1$

$$\begin{aligned}
\hat{h}_{n+1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \Big( e^{-ixt}(-1)^{n+1} e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} e^{t^2} \Big) dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big( \underbrace{e^{-ixt}(-1)^{n+1} e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^n}{(dx)^n} e^{t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1}(-ix+t)e^{-ixt} e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^n}{(dx)^n} e^{t^2} dt \Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-ix+t)e^{-ixt} \underbrace{(-1)^n e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^n}{(dx)^n} e^{t^2}}_{=h_n(x)} dt \\
&= (-i\widehat{x+t)h}_n(x) \\
&= -ix\hat{h_n}(x) + t\hat{h}_n(x) \\
&= (-i)^{n+1}(xh_n(x) - h_n'(x))
\end{aligned}$$

Es gelten folgende Identitäten:

$$h_n' = 2nh_{n-1} - xh_n, \tag{6}$$

denn

$$\begin{aligned}
h_n'(x) &= \Big( H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \Big)' \\
&= H_n'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - xH_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&= 2nh_{n-1}(x) - xh_n(x).
\end{aligned}$$

und

$$h_{n+1} = 2xh_n - 2nh_{n-1}, \tag{7}$$

denn

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) &= H_{n+1}e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= (2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x))e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= 2xh_n(x) - 2nh_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Zusammen mit (6) und (7) folgt dann schließlich:

$$h_{n+1} = (-i)^{n+1}h_{n+1}.$$

□

### 3.3 Formel von Plancherel

**Satz:**(Formel von Plancherel) Für $f, g \in \mathcal{S}$ gilt

$$\boxed{< \hat{f}, \hat{g} >=< f, g >.}$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} < \hat{f}, \hat{g} > &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) \Big( \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(t) e^{-i<x,t>} dt} \Big) dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big( \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{i<x,t>} \Big) \overline{g(t)} dt \\ &= < f, g > . \end{aligned}$$

Neben dem Umkehrsatz, kam der Satz von Fubini zum Einsatz. Letzterer durfte verwendet werden, weil die Funktion $(x, t) \mapsto \hat{f}(x)g(t)e^{i<x,t>}$ über $\mathbb{R}^{2n}$ integrierbar ist.

□