Infinite Games

Lecture XI

Lent 2021

15 February 2021

Mathematische Probleme.

Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900.

Von

D. Hilbert.

Wer von uns würde nicht gern den Schleier lüften, unter dem die Zukunft verborgen liegt, um einen Blick zu werfen auf die bevorstehenden Fortschritte unsrer Wissenschaft und in die Geheimnisse ihrer Entwickelung während der künftigen Jahrhunderte! Welche besonderen Ziele werden es sein, denen die führenden mathematischen Geister der kommenden Geschlechter nachstreben? welche neuen Methoden und neuen Thatsachen werden die neuen Jahrhunderte entdecken — auf dem weiten und reichen Felde mathematischen Denkens?

The Continuum Problem

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

$(*)$

Es sei noch eine andere sehr merkwürdige Behauptung Cantors erwähnt, die mit dem genannten Satze in engstem Zusammenhange steht und die vielleicht den Schlüssel zum Beweise dieses Satzes liefert.

Cantor betrachtet nun eine besondere Art von geordneten Mengen, die er als wohlgeordnete Mengen bezeichnet und die dadurch charakterisirt sind, daß nicht nur in der Menge selbst, sondern auch in jeder Teilmenge eine früheste Zahl existirt. Das System der ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... in dieser seiner natürlichen Ordnung ist offenbar eine wohlgeordnete Menge. Dagegen ist das System aller reellen Zahlen, d. h. das Continuum in seiner natürlichen Ordnung offenbar nicht wohlgeordnet.

Es erhebt sich nun die Frage, ob sich die Gesamtheit aller Zahlen nicht in anderer Weise so ordnen läßt, daß jede Teilmenge ein frühestes Element hat, d. h. ob das Continuum auch als wohlgeordnete Menge aufgefaßt werden kann, was Cantor bejahen zu müssen glaubt. Es erscheint mir höchst wünschenswert, *einen direkten Beweis dieser merkwürdigen Behauptung von Cantor zu gewinnen*, etwa durch wirkliche Angabe einer solchen Ordnung der Zahlen, bei welcher in jedem Teilsystem eine früheste Zahl aufgewiesen werden kann.

David **Hilbert**: *Mathematische Probleme*. In: Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse. Heft 3, 1900, S. 253–297.

In ZFC: equivalent formulation

$(**)$ Every uncountable set of reals ($A \subseteq \omega^\omega$) is in bijection with the set of all reals.

Comment: Formulation $(*)$ implies that ω^ω is well-ordered, whereas $(**)$ does not; so we can think $(**)$ as the choice-free version of CH.

(**) Every uncountable $A \subseteq \omega^\omega$ is in bijection with ω^ω.

<u>Def.</u> We say that a set $A \subseteq \omega^\omega$ has the <u>perfect set property</u> if it is either countable or there is a perfect tree T s.t. $[T] \subseteq A$.

<u>Remark</u> Since every perfect set $[T]$ has size $2^{\aleph_0}$, having the p.s.p. implies not being a counterexample to (**).

<u>Theorem</u> (Cantor-Bendixson).
Every uncountable closed set of reals contains a non-empty perfect subset.

$\Longleftrightarrow$ Every closed set has the p.s.p.

[<u>Proof Sketch.</u> $A \subseteq \omega^\omega$, remove isolated points:

$A' := \{x \in A ;\ x \text{ is not isolated}\}$

CANTOR-BENDIXSON DERIVATIVE

$A_0 := A$; $A_{\alpha+1} := (A_\alpha)'$; $A_\lambda := \bigcap_{\alpha<\lambda} A_\alpha$.

Since ω^ω is second countable, each

$A_{\alpha+1} \setminus A_\alpha$ is countable.

There is a fixed pt $A_\beta = A_{\beta+1}$ with $\beta < \aleph_1$.

Case 1. $A_\beta = \emptyset \Rightarrow A$ was ctble; Case 2: $A_\beta \neq \emptyset$ & perfect

Def. If Γ is a pointclass, write
$PSP(\Gamma)$ for
"for every $A \in \Gamma$, A has the p.s.p.".

C-B: $PSP(\underset{\sim}{\Pi}^0_1)$.

Def. Write PSP for "every set has the p.s.p.".

Observation $PSP \Longrightarrow CH$
[in the sense of (**)]

Theorem (Bernstein)
$AC \Longrightarrow \neg PSP$.

[So, this approach is not going to solve the Continuum Problem, unless you're willing to give up the AC.]

We already saw the proof of Bernstein's Thm. It's the proof of $AC \Longrightarrow$ there is a non-determined set: just replace the notion of "strategic tree" by "perfect tree".

Theorem (Hausdorff).

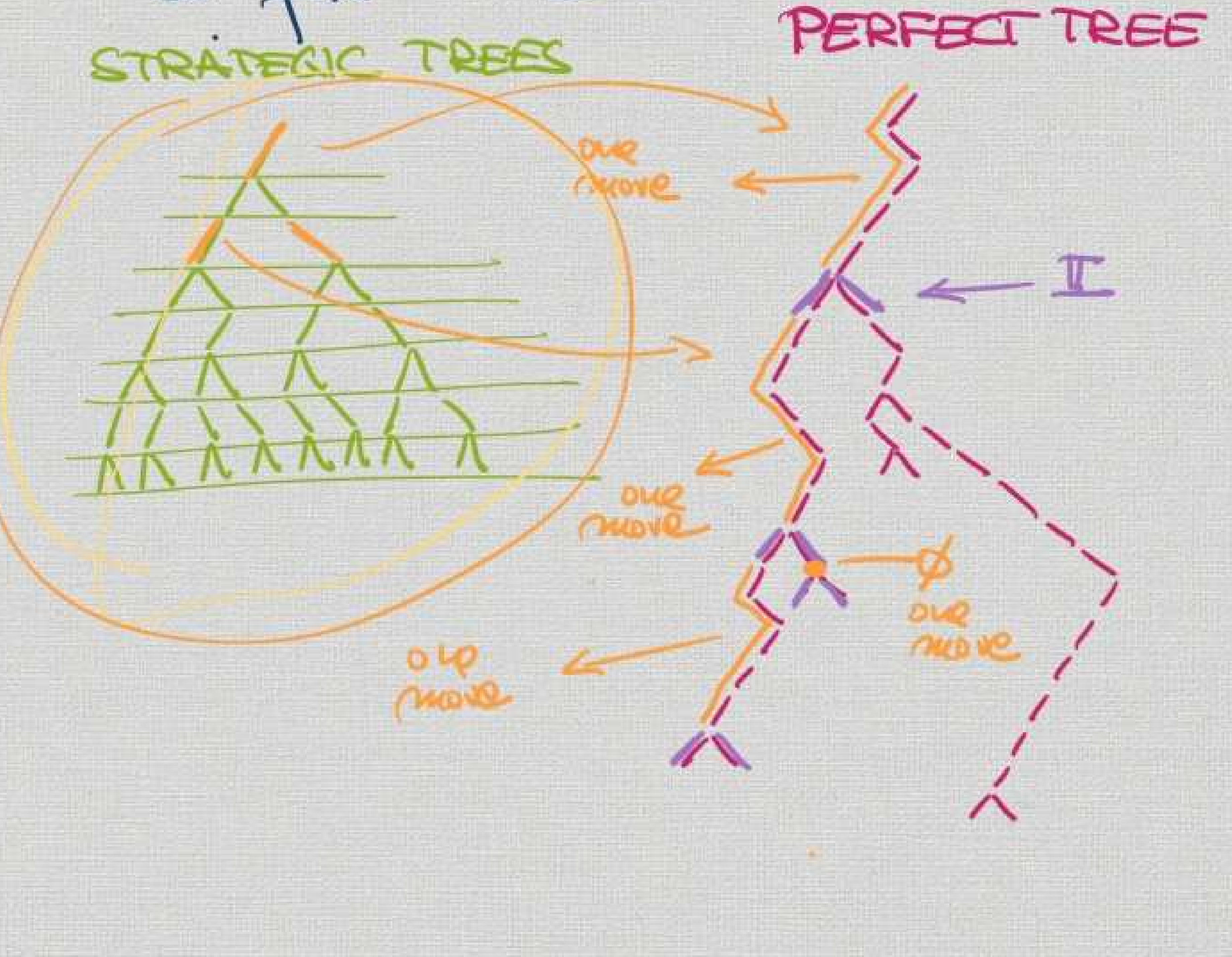
PSP (Borel).

We're going to prove Hausdorff's Thm from Borel determinacy using games.

Theorem If Γ is a boldface pointclass, then $\mathrm{Det}(\Gamma) \Longrightarrow \mathrm{PSP}(\Gamma)$.

Proof. For technical simplicity, we do this on Cantor space.

So fix $A \subseteq 2^{\omega}$.



Asymmetric game $G^*(A)$ $\quad A \subseteq 2^\omega$

is played with moves in $2^{<\omega}$ by player I and moves in 2 by player II:

$$\begin{array}{lllll} \mathrm{I} & s_0 & s_1 & s_2 & \cdots \\ \mathrm{II} & b_0 & b_1 & b_2 & \end{array}$$

If $z = (s_0, b_0, s_1, b_1, \ldots) \in (2^{<\omega} \cup 2)^\omega$,

we form $z^* = \underbrace{s_0 b_0 s_1 b_1 \cdots}_{\text{concatenation}} \in 2^\omega$.

Player I wins if $z^* \in A$.

<u>NOTATION</u> Position in the game

$$p = (s_0, b_0, s_1, b_1, \ldots, s_n/b_n)$$

If τ is a strategy for II and $t := (s_0, \ldots, s_n)$ is a sequence of elts of $2^{<\omega}$, then $t * \tau$ is the position obtained by playing τ against t.

If $p = (s_0, b_0, \ldots, s_n, b_n)$, $s \in 2^{<\omega}$, τ is a strategy for II, we write $ps\tau$ for the position obtained by playing s & τ: $p^\frown(s, \tau(p, s))$.

Proof that if $A \in \Gamma$ and $\mathrm{Det}(\Gamma)$ holds, then $G^*(A)$ is determined:

[Find $A^* \subseteq \omega^\omega$ s.t. $G(A^*)$ and $G^*(A)$ are the same game and A^* is a cts preimage of A.

Fix your favourite bijection $\pi : 2^{<\omega} \longrightarrow \omega$ and define for $x \in \omega^\omega$

$$x^\pi(n) := \begin{cases} \pi(x(n)) & \text{if } n \text{ is even} \\ x(n) \bmod 2 & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

Then x^π is a run of $G^*(A)$.

$$A^* := \{x \in \omega^\omega \,;\, x^\pi \in A\}$$

then A^* is the preimage of the map $x \longmapsto x^\pi$ of A. But this map is continuous.]

<u>Claim 1</u> If player I has a w.s. in $G^*(A)$, then A contains a perfect subset.

[By construction, a strategic tree for $G^*(A)$ is a perfect tree on 2.]

Claim 2 If II has a w.s. in $G^*(A)$, then A is countable.

Let p be a position, $x \in 2^\omega$ and τ be any strategy for II in $G^*(A)$.

We say that

p is τ-decisive for x

if $\left[\begin{array}{l} p = (s_0, b_0, s_1, b_1, \dots, s_n, b_n) \\ p^* = s_0 b_0 s_1 b_1 \dots s_n b_n \in 2^{<\omega} \end{array} \right]$

$p^* \subseteq x$ but f.a. $s \in 2^{<\omega}$

$(ps\tau)^* \not\subseteq x$.

[So p is the "maximal" position consistent with τ & x.]

Subclaim 2a If τ is winning for II, then for each $x \in A$ there is a τ-decisive position p for x.

[Suppose not, then for every p we find s s.t. $ps\tau^* \subseteq x$. Recursively define a sequence $s := (s_i ; i \in \mathbb{N})$ s.t. s_{i+1} is the witness that $(s_0, \dots, s_i) * \tau$ is not

τ-decisive. Then $(s * \tau)^* = x \in A$.
So τ is not winning.]

<u>Subclaim 2b</u> Every position p is τ-decisive for at most one $x \in 2^\omega$.

[Proof next time.]