Mathematik 2 für Studierende der Physik

Vorlesungsskript[1]

Thomas Leistner
Department Mathematik
Universität Hamburg
www.math.uni-hamburg.de/home/leistner

Hamburg, Sommersemester 2009

[1]Version vom 13. Juli 2009

Vorbemerkung

Diese Vorlesung ist eine Fortsetzung der Vorlesung

Mathematik 1 für Studierende der Physik.

Die Bezeichnungen in diesem Skript orientieren sich an denen aus dem Handout des vergangenen Semesters:

`www.math.uni-hamburg.de/home/leistner/mfp1/mfp1-info.html`

Die Webseite und das Skript zu dieser Vorlesung finden Sie unter

`www.math.uni-hamburg.de/home/leistner/mfp2/mfp2-info.html`

Inhaltsverzeichnis I

Inhaltsverzeichnis II

Inhaltsverzeichnis III

Inhaltsverzeichnis IV

Inhaltsverzeichnis V

Wiederholung: Determinante

Die Determinante $\det : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ ist definiert durch:

D1) det ist linear in jeder Spalte,

D2) det ist alternierend

D3) det ist normiert, d.h. *det* der Einheitsmatrix ist gleich 1.

Explizite Formel für die Determinante von $A = (a_j^i)_{i,j=1,\dots,n}$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_1^{\sigma(1)} \cdots a_n^{\sigma(n)}. \tag{1}$$

Es gilt:

- Die Matrix A ist invertierbar, d.h. $rg(A) = n$, $\iff$ $\det(A) \neq 0$.
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$, $\forall A, B \in Mat_n(\mathbb{K})$.
  Insbesondere ist $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \to (\mathbb{K}^*, \cdot)$ ist ein Gruppenmorphismus.

Berechnung der Determinante nach Formel (1) für $n \leq 3$:

- $n = 1$: $a = a^1_1 \in \mathrm{Mat}(1, \mathbb{K}) = \mathbb{K}$, $\quad \det a = a^1_1$,
- $n = 2$:
$$\det \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix} = a^1_1 a^2_2 - a^1_2 a^2_1,$$
- $n = 3$:
$$\det \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix} = a^1_1 a^2_2 a^3_3 + a^1_2 a^2_3 a^3_1 + a^1_3 a^2_1 a^3_2$$
$$-a^1_3 a^2_2 a^3_1 - a^1_2 a^2_1 a^3_3 - a^1_1 a^2_3 a^3_2,$$

  dabei entsprechen die ersten drei Terme den zyklischen Permutationen (123), (231) und (312), die letzten drei den Transpositionen τ_{13}, τ_{12} und τ_{23}.

  Das erste Tripel beginnt mit dem Produkt der Hauptdiagonalelemente, das zweite mit dem Produkt der Nebendiagonalelemente.

Determinante und Gauss-Agorithmus

Es gilt:

- Addition des λ-fachen der j-ten Spalte von A zur i-ten Spalte von A $(i \neq j)$ ändert den Wert der Determinante nicht:

$$\det(a_1 \cdots a_{i-1} \, a_i + \lambda a_j \, a_{i+1} \cdots a_n) = \det(A).$$

- Jede invertierbare Matrix A läßt sich durch wiederholtes Anwenden folgender zwei Spaltenumformungen in eine Diagonalmatrix $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ überführen:

  S1) Vertauschen von zwei Spalten bei gleichzeitiger Multiplikation einer der beiden mit -1 und

  S2) Addition eines Vielfachen einer Spalte zu einer anderen Spalte.

Dies impliziert:

$$\det(A) = \det(A') = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n.$$

Definition (Transponierte Matrix)

Sei $A = (a^i_j)_{i,j}$ eine $(m \times n)$-Matrix.
Die $(n \times m)$-Matrix A^t mit den Einträgen

$$(A^t)_{ij} := a_{ji}$$

heißt die zu A transponierte Matrix.

Satz

Für alle $A \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{Mat}(n, m, \mathbb{K})$ gilt

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Beweis. Für $C = AB$ und $D = B^t A^t$ gilt

$$(C^t)^k_i = c^i_k = \sum_{j=1}^{n} a^i_j b^j_k = \sum_{j=1}^{n} (B^t)^k_j (A^t)^j_i = (D)^k_i.$$

$\square$

Folgerung

(i) $\alpha : \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \ni A \mapsto (A^{-1})^t \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, *ist ein Gruppenautomorphismus (d.h. Gruppenmorphismus und bijektiv).*

(ii) α *ist eine Involution, d.h.* $\alpha \circ \alpha = \mathrm{Id}$.

(iii) *Für alle* $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ *gilt* $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

Beweis. Nach dem Satz ergibt sich durch Transponieren von $AA^{-1} = \mathbf{1}_n$

$$\mathbf{1}_n = \left(AA^{-1}\right)^t = \left(A^{-1}\right)^t A^t = \alpha(A)A^t.$$

Also sind $\alpha(A)$ und A^t invertierbar, und es gilt

$$(\alpha(A))^{-1} = A^t \quad \text{und} \quad (A^t)^{-1} = \alpha(A),$$

d.h. (iii) folgt. Damit gilt aber auch (ii), denn
$\alpha(\alpha(A)) = \left((\alpha(A))^{-1}\right)^t = (A^t)^t = A.$
Für $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ und somit

$$\alpha(AB) = (B^{-1}A^{-1})^t = (A^{-1})^t(B^{-1})^t = \alpha(A)\alpha(B).$$

Also ist $\alpha = \alpha^{-1}$ ein Gruppenisomorphismus. □

Satz

Für jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ gilt

$$\det A = \det A^t.$$

Beweis. Wir benutzten die Formel (1):
Die Substitution $\sigma' = \sigma^{-1}$ liefert wegen $\varepsilon(\sigma') = \varepsilon(\sigma)$

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_1^{\sigma(1)} \cdots a_n^{\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma') a^1_{\sigma'(1)} \cdots a^n_{\sigma'(n)} \\ &= \det A^t. \end{aligned}$$

□

Folgerung

(i) *Es gibt genau eine Abbildung* $\det : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

D1') $\det$ *ist linear in jeder Zeile,*

D2') *es gilt* $\det A = 0$, *falls zwei Zeilen von A übereinstimmen und*

D3') $\det(\mathbf{1}_n) = 1$.

(ii) *Addition des* λ*-fachen der j-ten Zeile der Matrix A zur i-ten Zeile* $(i \neq j)$ *ändert nicht den Wert der Determinante.*

(iii) *Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile* $(i \neq j)$ *ändert die Determinante nur um ein Vorzeichen.*

(iv) *Insbesondere läßt sich die Determinante durch Anwendung des Gaußalgorithmus auf die Zeilen der Matrix berechnen.*

Matrixinversion mittels Gaußalgorithmus

Wir wollen die Inverse A^{-1} zu $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ bestimmen. Dazu erinnern wir uns an:

- i-te Spalte von $A^{-1} = A^{-1}e_i$, wobei e_i der i-te kanonische Basisvektor ist.
- Nun ist $x := A^{-1}e_i =$ i-te Spalte von A^{-1} die eindeutige Lösung von des Gleichungssystems $Ax = e_i$.
- D.h. wir können x bestimmen, indem wir den Gauß'schen Algorithmus auf $(A|e_i)$ anwenden bis wir $(\mathbf{1}_n|x)$ erhalten.

Somit haben wir die i-te Spalte $x = A^{-1}e_i$ von A^{-1} ermittelt. D.h. das Verfahren

$$(A \mid \mathbf{1}_n) \quad \xrightarrow{\text{Gauß'scher Alg.}} \quad (\mathbf{1}_n \mid A')$$

liefert die inverse Matrix $A^{-1} = A'$.
(Hierbei bezeichne $\mathbf{1}_n$ wieder die $n \times n$ Einheitsmatrix.)

Ein Zahlenbeispiel:

Wir wollen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ invertieren (das geht, da $\det A = -3$):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{III-I}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{I-II,\ III\cdot(-1/3)}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \overset{II-2\cdot III}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right),$$

d.h. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Ein Test, $AA^{-1} = \mathbf{1}_3$, bestätigt dies.

Berechnung der Inversen mittels Determinanten

Dazu benötigt man die Streichungsmatrix.

Definition (Streichungsmatrix)

Sei $A = (a_l^k)_{k,l=1}^n \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ *und* $1 \le i \le j \le n$ *zwei Indizes. Die Matrix* $A_{ij} \in \mathrm{Mat}(n-1, \mathbb{K})$*, die aus* A *durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht heißt* (i,j)*-te* ***Streichungsmatrix*** *von* A*.*

Lemma

(i) $(A^t)_{ij} = (A_{ji})^t$ *und*

(ii) $(-1)^{i+j} \det A_{ij} = \det(a_1 \cdots a_{j-1} e_i a_{j+1} \cdots a_n)$.

Beweis. (i) ist klar.

Beweis von (ii). Die $(n \times n)$-Matrix $(a_1 \cdots a_{j-1} e_i a_{j+1} \cdots a_n)$ läßt sich durch Addition von Vielfachen der j-ten Spalte zu den anderen Spalten in folgende Form bringen:

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & 0 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & 0 & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & 0 & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & 0 & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Matrix B_{ij} läßt sich durch $i-1$ Zeilen- und $j-1$ Spaltenvertauschungen in die Blockdiagonalgestalt $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{ij} \end{pmatrix}$ bringen.
Also $\det(a_1 \cdots a_{j-1} e_i a_{j+1} \cdots a_n) =$
$\det B_{ij} = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \det A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$. □

Satz (Berechnung der Inversen Matrix mittels Determinanten)

Sei $A = (a^i_j)_{i,j} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ *und* $\widetilde{A} = (\widetilde{a}^i_j)_{i,j}$ *definiert durch*

$$\widetilde{a}^i_j := (-1)^{i+j} \det A_{ji} \overset{Lemma}{=} \det(a_1 \cdots a_{i-1} e_j\, a_{i+1} \cdots a_n).$$

Dann gilt $\widetilde{A}A = A\widetilde{A} = (\det A)\mathbf{1}_n$.

Beweis. Wir zeigen zuerst $\widetilde{A}A = (\det A)\mathbf{1}_n$:

$$\begin{aligned}\sum_j \widetilde{a}^i_j a^j_k &\overset{Lemma}{=} \sum_j a^j_k \det(a_1 \cdots a_{i-1} e_j\, a_{i+1} \cdots a_n) \\ &= \det(a_1 \cdots a_{i-1} \overbrace{\sum_j a^j_k e_j}^{=a_k} a_{i+1} \cdots a_n) \;=\; \delta^i_k \det A.\end{aligned}$$

Ist $\det(A) \neq 0$, so erhalten wir daraus auch $A\tilde{A} = \det(A)\mathbf{1}_n$, und zwar durch Multiplikation von $\widetilde{A}A = (\det A)\mathbf{1}_n$ von links mit A und von rechts mit A^{-1}.

Weiter im Beweis: Ist nun $0 = \det(A) = \det(A^t)$, so erhält man

$$0 = \widetilde{A^t} A^t \stackrel{Lemma,(i)}{=} \left(\widetilde{A}\right)^t A^t = (A\widetilde{A})^t$$

und damit $A\widetilde{A} = 0$. $\square$

Folgerung (Entwicklungssatz von Laplace)

Für jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ *gilt:*

(Z) *(Entwicklung nach der i-ten Zeile)*

$$\det A = \sum_j (-1)^{i+j} a^i_j \det A_{ij}$$

(S) *(Entwicklung nach der j-ten Spalte)*

$$\det A = \sum_i (-1)^{i+j} a^i_j \det A_{ij}.$$

Beweis. Auf der rechten Seite von (Z) bzw (S) steht genau der i-te bzw. j-te Diagonaleintrag der Matrix $A\widetilde{A} = (\det A)\mathbf{1}_n$ bzw. der Matrix $\widetilde{A}A = (\det A)\mathbf{1}_n$. □

Folgerung (Cramersche Regel)

Sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ und $b \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt:

(i) $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, \widetilde{A}$.

(ii) *Die eindeutig bestimmte Lösung $x = (x^i)_{i=1\ldots n}$ der Gleichung $Ax = b$ berechnet sich nach der folgenden Cramerschen Regel*

$$x^i = \frac{1}{\det A} \det(a_1 \cdots a_{i-1}\, b\, a_{i+1} \cdots a_n).$$

Beweis.

(i) folgt sofort aus $\det A \neq 0$ und $\tilde{A}A = (\det A)\mathbf{1}_n$.

(ii) Nach dem Lemma Teil (ii) ist $\widetilde{a}^i_j = \det(a_1 \cdots a_{i-1} e_j a_{i+1} \cdots a_n)$ und somit ist wegen $x = A^{-1}b$

$$\begin{aligned} x^i &= \frac{1}{\det A} \sum_j \widetilde{a}^i_j b^j = \frac{1}{\det A} \det(a_1 \cdots a_{i-1} \sum_j b^j e_j \; a_{i+1} \cdots a_n) \\ &= \frac{1}{\det A} \det(a_1 \cdots a_{i-1}\, b\, a_{i+1} \cdots a_n) \end{aligned}$$

□

“Zahlen”-Beispiel.

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{K}),$$

d.h. $\det A = ad - bc \neq 0$.

Dann ergibt sich aus dem vorherigen Satz

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Als Lösung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ von $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ erhält man

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} du - bv \\ -cu + av \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte, Eigenvektor und Eigenraum

Definition

Sei F ein Endomorphismus eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, d.h. $F : V \to V$ ist $\mathbb{K}$-linear.

- *$\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert von F, wenn es einen Vektor $0 \neq v \in V$ gibt, so dass*
$$F(v) = \lambda v.$$
- *Jeder solche Vektor heißt Eigenvektor von F zum Eigenwert λ.*
- *Der Unterraum von V definiert durch*
$$V_\lambda := \{v \in V | F(v) = \lambda v\}$$
heißt Eigenraum von F zum Eigenwert λ.

Beispiel 1:

Sei $V = \mathbb{R}^2$ und

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(V).$$

$e_1 + e_2$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1,

$e_1 - e_2$ zum Eigenwert -1,

$V_1 = \mathbb{R}(e_1 + e_2)$, $V_{-1} = \mathbb{R}(e_1 - e_2)$,

Da $V = V_1 \oplus V_{-1}$, hat F keine weiteren Eigenwerte.

Beispiel 2:

Die lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, gegeben durch die Matrix

$$D_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

ist eine Drehung um den Winkel φ und hat daher hat keine reellen Eigenwerte, falls φ kein ganzzahliges Vielfaches von π ist.

In der Tat: Z. B. ist $D_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und die Eigenwertgleichung liefert

$$D_{\pi/2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

d.h. $-y = \lambda x$ und $x = \lambda y$. Dies impliziert aber $x = -\lambda^2 x$ und $y = -\lambda^2 y$. Wegen $\lambda^2 \geq 0$ ergibt dies $x = y = 0$.

Charakteristisches Polynom

Das charakteristische Polynom dient zur Bestimmung der Eigenvektoren.

Verabredung. Wir nehmen im Folgenden an, dass $\mathbb{K}$ ein unendlicher Körper ist. Dann brauchen wir zwischen Polynomen $P(t) \in \mathbb{K}[t]$ und polynomialen Funktionen $P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ nicht zu unterscheiden.

Definition (Charakteristisches Polynom)

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR der Dimension $n < \infty$ und $F \in \mathrm{End}(V)$.

Das charakteristische Polynom $P_F : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $t \mapsto P_F(t)$, von F ist definiert durch

$$\begin{aligned} P_F(t) &:= \det(F - t\mathrm{Id}) = \det(A - t\mathbf{1}_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(a^1_{\sigma(1)} - t\delta^1_{\sigma(1)}\right) \cdot \ldots \cdot \left(a^n_{\sigma(n)} - t\delta^n_{\sigma(n)}\right), \end{aligned}$$

wobei $A = (a^i_j)_{i,j}$ die darstellende Matrix von F bez. (irgend)einer Basis von V ist.

Wie sieht das charakteristische Polynom aus?

Satz

Das charakteristische Polynom von $F \in \mathrm{End}(V)$ hat Grad $n = \dim V$.

Schreibt man

$$P_F(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$$

mit Koeffizienten $\alpha_j \in \mathbb{K}$, die von F abhängen, dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \det F = \det A. \\ \alpha_{n-1} &= (-1)^{n-1}\left(a_1^1 + \cdots + a_n^n\right) \\ \alpha_n &= (-1)^n, \end{aligned}$$

wobei $A = (a^i_j)$ die Darstellende Matrix von F ist.

Die Summe der Diagonalelemente von A bzw. F heißt auch $\mathrm{spur}(F) = \mathrm{spur}(A) := a_1^1 + \cdots + a_n^n$.

Beweis. Das Polynom $(a^1_{\sigma(1)} - t\delta^1_{\sigma(1)}) \cdot \ldots \cdot (a^n_{\sigma(n)} - t\delta^n_{\sigma(n)})$ hat für jede Permutation $\sigma \neq \mathrm{Id}$ den Grad $\leq n-2$, da dann mindestens zwei $\delta^i_{\sigma(i)} = 0$ sind.

Daher gilt

$$P_F(t) = (a^1_1 - t) \cdot \ldots \cdot (a^n_n - t) + Q(t)$$

mit einem Polynom $Q(t)$ vom Grad $\leq n-2$.

Ausmultiplizieren liefert nun:

$$P_F(t) = (-t)^n + (-t)^{n-1}(a_{11} + \cdots + a_{nn}) + \cdots + P_F(0)$$

mit $P_F(0) = \det(F - 0 \cdot \mathrm{Id}) = \det F$.

$\square$

Charakteristisches Polynom und Eigenwerte

Satz

Sei V ein endlichdimensionaler VR und $F \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt:

Die Eigenwerte von F sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von F.

Beweis.

$\lambda \in \mathbb{K}$ ist genau dann ein Eigenwert von F, wenn es einen Vektor $0 \neq v \in V$ gibt mit $F(v) = \lambda v$, d.h. wenn $\ker(F - \lambda \mathrm{Id}) \neq 0$.

Dies ist gleichbedeutend mit $\det(F - \lambda \mathrm{Id}) = P_F(\lambda) = 0$. □

Diagonalisierbarkeit

Definition

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR der Dimension n.

$F \in \mathrm{End}(V)$ heißt diagonalisierbar, wenn es eine Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ von V gibt, so dass die darstellende Matrix von F Diagonalgestalt hat:

$$M_B(F) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \textit{mit } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}.$$

Bemerkung

Die Basisvektoren b_i sind dann Eigenvektoren von F und die Diagonaleinträge λ_i sind die zugehörigen Eigenwerte λ_i.

F ist also genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis aus Eigenvektoren gibt.

Charakteristisches Polynom und Diagonalisierbarkeit

Satz

Das charakteristische Polynom eines diagonalisierbaren Endomorphismus F zerfällt in Linearfaktoren.

Beweis. Aus $M_B(F) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ folgt

$$\begin{aligned} P_F(t) &= \det(\mathrm{diag}(\lambda_1 - t, \ldots, \lambda_n - t)) \\ &= (\lambda_1 - t) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - t) \\ &= (-1)^n (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_n). \end{aligned}$$

□

Bemerkung

Beachte die Umkehrung des Satzes gilt nicht immer, wie wir gleich sehen werden.

Beispiel 1

Sei

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^2).$$

$P_F(t) = (t-1)^2$ zerfällt in Linearfaktoren, aber F ist nicht diagonalisierbar:

1 ist der einzige Eigenwert und $V_1 = \mathbb{K}e_1$.

Es gibt also keine Basis aus Eigenvektoren.

Beispiel 2

Sei

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^2).$$

Dann gilt $P_F(t) = t^2 + 1$.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hat $P_F(t)$ keine Nullstellen und zerfällt also nicht in Linearfaktoren.

Insbesondere ist F nicht diagonalisierbar. Wir haben schon gesehen, daß F die 90°-Drehung ist und deshalb keine Eigenvektoren hat.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ zerfällt $P_F(t) = t^2 + 1 = (t + i)(t - i)$.

Darüber hinaus ist F diagonalisierbar (mit komplexen Eigenwerten):

$$\begin{aligned} F(e_1 - ie_2) &= e_2 + ie_1 = i(e_1 - ie_2) \\ F(e_1 + ie_2) &= e_2 - ie_1 = -i(e_1 + ie_2). \end{aligned}$$

Multiplizität der Nullstellen des char. Polynoms

Ist λ eine Nullstelle eines Polynoms $P(t)$, so kann man P schreiben als

$$P(t) = (t - \lambda)^m Q(t)$$

mit einem Polynom Q mit $Q(\lambda) \neq 0$. m heißt dann Multiplizität von λ. Mit ihrer Hilfe kann man die Dimension des Eigenraumes bestimmen.

Definition (Multiplizität der Nullstellen des char. Polynoms)

Sei F ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums V mit Eigenwert λ.

Die Multiplizität m_λ von λ ist definiert durch

$$P_F(t) = (t - \lambda)^{m_\lambda} Q(t), \ \textit{wobei } Q \in \mathbb{K}[t] \textit{ mit } Q(\lambda) \neq 0.$$

Multiplizität und Dimension des Eigenraumes

Satz

Es sei V_λ *der Eigenraum zu* λ *und* $n_\lambda := \dim V_\lambda$*, dann gilt*

$$n_\lambda \leq m_\lambda.$$

Beweis. Sei $B_\lambda = (b_1, \ldots, b_{n_\lambda})$ eine Basis des Eigenraums V_λ.

Nach dem Basisergänzungssatz können wir B_λ zu einer Basis B von V ergänzen.

Dann gilt

$$M_B(F) = \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{1}_{n_\lambda} & * \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

wobei D eine quadratische Matrix ist.

Daraus ergibt sich $P_F(t) = (-1)^{n_\lambda}(t-\lambda)^{n_\lambda} P_D(t)$ und somit $n_\lambda \leq m_\lambda$. □

Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren

Satz

Sei V ein VR, $F \in \mathrm{End}(V)$ und v_i, $i = 1, \ldots, k$, seien Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten λ_i.

Dann sind $(v_1, \ldots, v_k)$ linear unabhängig.

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach k.

IA: Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen.

IV: Sei $k \geq 2$, und es gelte daß $k - 1$ Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_{k-1}$ zu verschiedenen Eigenwerten λ_i linear unabhängig sind.

IS: Seien $v_1, \ldots, v_k$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten λ_i. Wir müssen zeigen, daß die v_i linear unabhängig sind.

Weiter im Beweis:

Angenommen, es gelte $0 = \sum_{i=1}^{k} c_i v_i$, so folgt folgt einerseits

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_k c_i v_i$$

und andererseits durch Anwendung von F

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i v_i.$$

Subtraktion der beiden Gleichungen liefert

$$0 = \sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{(\lambda_k - \lambda_i)}_{\neq 0} c_i v_i$$

und somit (wegen der IV) $c_i = 0$ für $i = 1, \dots, k-1$.

Es folgt $0 = \sum_{i=1}^{k} c_i v_i = c_k v_k$ und somit auch $c_k = 0$. $\square$

Erinnerung: Direkte Summe von zwei Unterräumen V_1, $V_2 \subset V$ ist der Unterraum $V_1 \oplus V_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$, falls $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Definition (Direkte Summe von mehr als zwei Unterräumen)

Sei V ein VR und $V_1, V_2, \ldots, V_k \subset V$ Unterräume mit der Eigenschaft

$$V_i \cap V_j = \{0\} \ \forall \ i \neq j \tag{2}$$

Die direkte Summe der V_i's ist dann der Unterraum

$$V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k := \{v_1 + v_2 + \cdots + v_k | v_i \in V_i, i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Es gilt:

- (2) $\iff$ Jedes k-Tupel $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ von Vektoren $v_i \in V_i \setminus 0$ ist linear unabhängig.
- Jeder Vektor $v \in V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ hat eine eindeutige Darstellung $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$ mit $v_i \in V_i$
- $V_1 \oplus \ldots \oplus V_k = (\cdots((V_1 \oplus V_2) \oplus V_3) \oplus \cdots \oplus V_{k-1}) \oplus V_k$.

Diagonalisierbarkeit und Aufspaltung in Eigenunterräume

Satz

Sei V ein endlichdimensionaler VR und $F \in \mathrm{End}(V)$.

F ist diagonalisierbar

$\iff$ Das charakteristische Polynom P_F zerfällt in Linearfaktoren und $m_\lambda = n_\lambda$ für alle Eigenwerte λ

$\iff$ $V = \bigoplus_{\lambda \text{ EW}} V_\lambda$, d.h. V ist direkte Summe von Eigenunterräumen.

Beweis. $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ seien die verschieden Eigenwerte von F. Damit sind zugehörige Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig. Somit ist die Summe der Eigenräume direkt:

$$U := \bigoplus_{i=1}^{k} V_{\lambda_i} = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k} \subset V.$$

Sei B_U eine Basis von U. Nach dem Austauschlemma können wir B_U zu einer Basis B von V ergänzen.

Weiter im Beweis:
Die darstellende Matrix von F bez. B hat dann die Gestalt

$$M_B(F) = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

wobei A die darstellende Diagonalmatrix der Einschränkung $F|_U$ (bezüglich B_U) ist und D eine $(m \times m)$-Matrix ist. (Hierbei ist $m = \dim V - \dim U$.)
Daraus folgt für das charakteristische Polynom von F

$$P_F(t) = P_A(t)Q(t),$$

wobei $Q(t) = P_D(t)$, falls $m > 0$ und $Q(t) = 1$, falls $m = 0$.
Nun gilt: F diagonalisierbar $\iff$ $U = V \iff$ $m = 0$ $\iff$
$P_F(t) = P_A(t) = (\lambda_1 - t)^{n_{\lambda_1}} \cdots (\lambda_k - t)^{n_{\lambda_k}}$. □

Euklidische und Hermitesche Vektorräume

Dies sind Vektorräume, die mit einer zusätzlichen Struktur ausgestattet sind, nämlich mit einem Skalarprodukt, mit dessen Hilfe wir geometrische Größen wie Abstand, Länge und Winkel definieren können.

Erinnerung: Linearformen

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

- Der Vektorraum
$$V^* := L(V, \mathbb{K}) = \{L : V \to \mathbb{K} \mid L \text{ ist } \mathbb{K}\text{-linear}\}$$
heißt Dualraum zu V oder auch Raum der Linearformen.
- Hat V die Dimension n, so auch V^*. Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, so ist $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, definiert durch
$$\sigma^i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases},$$
eine Basis von V^*. $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ heißt die zu $(v_1, \ldots, v_n)$ duale Basis.

Bi- und Multilinearformen

Definition

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

- *Eine Abbildung $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt* Bilinearform, *wenn Sie linear in beiden Argumenten ist, d.h. $\forall x, y, z \in V$ und $a, b \in \mathbb{K}$ gilt:*

$$\begin{aligned} \beta(ax + by, z) &= a\beta(x, z) + b\beta(y, z) \text{ und} \\ \beta(z, ax + by) &= a\beta(z, x) + b\beta(z, y) \end{aligned}$$

- *Eine Abbildung*

$$\begin{aligned} \beta : V^k = V \times \cdots \times V &\to \mathbb{K} \\ (v_1, \ldots, v_k) &\mapsto \mu(v_1, \ldots, v_k) \end{aligned}$$

heißt Multilinearform *(genauer* k-Linearform*), wenn μ in jedem der k Argumente linear ist.*

Beispiele

- Linearformen sind 1-Linearformen

  Beispielsweise ist $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ eine Linearform auf dem VR der integrierbaren Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$.
- Sei $V = C^0([a, b])$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$. Dann definiert $\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx$ eine Bilinearform auf V.
- Die Determinante $\det : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}) = (\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K}$ ist n-linear.

Symmetrische und schiefymmetrische Bilinearformen

Definition

Eine Bilinearform $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt

- *symmetrisch, wenn*

$$\beta(v, w) = \beta(w, v) \quad \text{für alle} \quad v, w \in V.$$

- *schiefsymmetrisch, wenn*

$$\beta(v, w) = -\beta(w, v) \quad \text{für alle} \quad v, w \in V.$$

- *nicht entartet, wenn die lineare Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} V & \to & V^* \\ v & \mapsto & \beta(v, \cdot) \end{array}$$

  injektiv ist. (M.a.W. wenn $v = 0$ der einzige Vektor ist, für den $\beta(v, w) = 0$ für alle $w \in V$.)

Definition

Sei $\dim V = n$, $\alpha : V \times V \to \mathbb{K}$ *eine Bilinearform und* $B = (b_1, \ldots, b_n)$ *eine Basis von* V. *Die* *darstellende Matrix* *von* α *ist die* $(n \times n)$*-Matrix* A *mit den Einträgen*

$$\alpha^i_j := \alpha(b_i, b_j).$$

Bemerkungen/ÜA

- Der Raum der (schief-)symmetrischen Bilinearformen bildet einen Vektorraum über $\mathbb{K}$.
- α ist genau dann symmetrisch bzw. schiefsymmetrisch, wenn A symmetrisch bzw. schiefsymmetrisch ist, d.h. wenn $A = A^t$ bzw. $A = -A^t$.
- α ist genau dann nicht entartet, wenn A invertierbar ist.

  (Hinweis: Die darstellende Matrix der linearen Abbildung $V \ni v \mapsto \alpha(v, \cdot) \in V^*$ bezüglich einer Basis von V und der dazu dualen Basis ist A^t.)

Euklidische Vektorräume

Definition (Euklidisches Skalarprodukt/Euklidischer Vektorraum)

Sei V ein reeller VR. Eine symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt positiv definit, wenn für alle $v \in V$, $v \neq 0$ gilt

$$\langle v, v \rangle > 0.$$

Ein (Euklidisches) Skalarprodukt auf V ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform $V \times V \to \mathbb{R}$.

Ein Euklidischer Vektorraum ist ein reeller VR zusammen mit einem Skalarprodukt darauf.

Bemerkung

Skalarprodukte sind nicht entartet, denn aus $\langle v, v \rangle = 0$ folgt $v = 0$.

Beispiel

Das kanonische Skalarprodukt von $\mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x^i y^i,$$

wobei $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$ und $y = \sum_{i=1}^n y^i e_i$. Die darstellende Matrix des kanonischen Skalarprodukts von $\mathbb{R}^n$ bez. der kanonischen Basis ist die Einheitsmatrix $\mathbf{1}_n$, denn

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Geometrische Größen 1: Länge und Abstand

Definition

Sei V ein Euklidischer VR.

- *Die Länge eines Vektors $v \in V$ ist die Zahl*

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

- *Der Abstand $d(x, y)$ zweier Punkte $x, y \in V$ ist die Länge des Vektors $y - x$:*

$$d(x, y) := \|y - x\|.$$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung ist fundamental in der Geometrie. Sie erlaubt es u.a., Winkel zu definieren.

Satz (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Sei V ein Euklidischer VR. Dann gilt für alle $v, w \in V$:

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|,$$

mit Gleichheit genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis. Wir können annehmen, dass $v \neq 0$ und $w \neq 0$, denn sonst ist nichts zu zeigen.

Weiter im Beweis:
Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 \leq \langle \lambda v + \mu w, \lambda v + \mu w \rangle = \lambda^2 \|v\|^2 + \mu^2 \|w\|^2 + 2\lambda\mu \langle v, w \rangle.$$

Einsetzen von $\lambda = \sqrt{\frac{\|w\|}{\|v\|}}$ und $\mu = \pm\sqrt{\frac{\|v\|}{\|w\|}}$ liefert

$$0 \leq 2\|v\|\|w\| \pm 2\langle v, w \rangle,$$

d.h. $\pm\langle v, w \rangle \leq \|v\|\|w\|$, und damit die die CSU. Gleichheit gilt genau dann, wenn für eine dieser beiden Wahlen $\lambda v + \mu w = 0$, d.h. wenn v und w linear abhängig sind. $\square$

Geometrische Größen 2: Winkel und Orthogonalität

Definition

Sei V ein Euklidischer VR und $v, w \in V \setminus 0$.

- *Der* Winkel $\angle(v, w)$ *zwischen v und w ist definiert als*

$$\angle(v, w) := \arccos \underbrace{\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|}}_{\in[-1,1]} \in [0, \pi].$$

- *Man sagt, dass $v, w \in V$* senkrecht *aufeinander stehen oder* orthogonal *sind, wenn*

$$\langle v, w\rangle = 0$$

  und schreibt dafür $v \perp w$.

- *Für jeden Unterraum $U \subset V$ heißt der UR*

$$U^{\perp} := \{v \in V | v \perp U\}$$

  das orthogonale Komplement *von U in V.*

Orthogonales Komplement

Zu jedem Unterraum in einem Euklidischen Vektorraum gibt es ausgezeichnetes Komplement.

Satz

Sei β eine nicht entartete Bilinearform auf einem n-dimensionalen VR V und $U \subset V$ ein Unterraum.

(i) *Dann hat der Unterraum $U' := \{v \in V \mid \beta(u, v) = 0 \ \forall u \in U\}$ die Dimension $n - \dim U$.*

(ii) *Die Unterräume U und U' sind genau dann komplementär, d.h. $V = U \oplus U'$, wenn $U \cap U' = 0$.*

Folgerung

Sei $U \subset V$ ein Unterraum eines endlichdimensionalen Euklidischen Vektorraums. Dann ist $U^\perp$ ein Komplement zu U in V, d.h. $V = U \oplus U^\perp$.

Beweis. (der Folgerung) $U \cap U^\perp = \{0\}$ gilt, denn $v \in U \cap U^\perp$ impliziert $\langle v, v\rangle = 0$ und somit $v = 0$. □

Beweis des Satzes:
Sei $(u_1, \ldots, u_r)$ eine Basis von U. Der Unterraum U' ist genau der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$\beta(u_i, v) = \sum_{i=1}^{n} \beta(u_i, u_j) v^j = \sum_{i=1}^{n} \beta^i_j v^j = 0, \quad \text{für alle} \quad i = 1, \ldots, r.$$

Da β nicht entartet ist, ist die Abbildung $U \ni u \mapsto \beta(u, .) \in V^*$ injektiv. Somit hat die Matrix $(\beta^i_j)_{i=1,\ldots,r, j=1,\ldots,n}$ vollen Rang r. Damit ist die Dimension des Lösungsraumes U' gleich $\dim V - r$.
(ii) folgt aus (i) und der Dimensionsformel:

$$\begin{aligned} \dim(U + U') &= \dim U + \dim U' - \dim(U \cap U') \\ &\overset{(i)}{=} \dim V - \dim(U \cap U'). \end{aligned}$$

$\square$

Orthonormale Basen

In Euklidischen Vektorräumen gibt es ausgezeichnete Basen.

Definition

Sei $(V, \langle ., . \rangle)$ ein n-dimensionaler Euklidischer VR.

(i) *Eine Vektor $v \in V$ heißt Einheitsvektor, wenn $\|v\| = 1$.*

(ii) *Eine Basis $(b_1, \dots, b_n)$ von V aus n Einheitsvektoren $b_i \in V$, die orthogonal zueinander sind, heißt Orthonormalbasis (kurz: ONB).*

Beispiel

Die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$ ist orthonormal (bzgl. des kanonischen Skalarproduktes).

Die Komponenten eines Vektors $v \in V$ in einer ONB $(b_1, \dots, b_n)$ sind gegeben durch $\langle v, b_i \rangle$, d.h.

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, b_i \rangle b_i.$$

Satz

Sei V ein Euklidischer VR und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von orthogonalen Vektoren $v_i \in V$ mit $v_i \neq 0$, d.h.

$$v_i \perp v_j \quad \text{für alle} \quad i \neq j.$$

Dann ist $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig.

Insbesondere ist in einem n-dimensionalen Vektorraum jede Familie aus n orthogonalen Vektoren eine Orthonormalbasis.

Beweis.

Sei $0 = \sum_{j\in J} \lambda_j v_j$, wobei $J \subset I$ eine endliche Teilmenge ist und $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Daraus folgt für alle $i \in J$

$$0 = \langle v_i, \sum_{j\in J} \lambda_j v_j \rangle = \sum_{j\in J} \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle = \lambda_i \|v_i\|^2$$

und somit $\lambda_i = 0$. $\square$

Das Orthonormalisierungsverfahren von Gram und Schmidt

Satz (Gram-Schmidt)

Jeder endlich-dimensionale Euklidische Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis.

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Induktion nach $n = \dim V \in \mathbb{N}$.

- Falls $\dim V = 1$, so existiert $v \neq 0$ und $b_1 := \frac{v}{\|v\|}$ ist eine ONB.
- Wir nehmen an, dass jeder Euklid. VR der Dimension $< n$ eine ONB hat und zeigen, dass dann auch jeder n-dimensionale Euklid. VR eine ONB hat.
- Sei $v \in V$, $v \neq 0$. Nach Induktion besitzt der $(n-1)$-dimensionale UR $v^\perp := (\mathbb{R}v)^\perp$ eine ONB $(b_2, \ldots, b_n)$. Durch $b_1 := \frac{v}{\|v\|}$ wird diese zu einer ONB von V ergänzt.

$\square$

Hermitesche Vektorräume

Um auf $\mathbb{C}$-Vektoräumen geometrische Grössen einführen zu können, benötigt man ein Hermitesches Skalarprodukt.

Definition

Sei V ein komplexer Vektorraum. Eine Hermitesche Form auf V ist eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$, die $\mathbb{C}$-linear im ersten Argument ist, und die für alle $v, w \in V$ Folgendes erfüllt:

$$\overline{\langle v, w\rangle} = \langle w, v\rangle$$

Bemerkung

Daraus folgt, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ konjugiert-linear im zweiten Argument ist, d.h.

$$\langle u, \lambda v + \mu w\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle + \overline{\mu}\langle u, w\rangle \quad \text{für alle} \quad u, v, w \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{C},$$

denn $\langle u, \lambda v\rangle = \overline{\langle \lambda v, u\rangle} = \overline{\lambda}\,\overline{\langle v, u\rangle} = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle$.

Außerdem ist $\langle v, v\rangle$ reell, da $\overline{\langle v, v\rangle} = \langle v, v\rangle$.

Bemerkung

Die Menge der Hermiteschen Formen eines komplexen Vektorraumes ist ein reeller (kein komplexer!) Vektorraum, denn: Ist β eine Hermitesche Form und $\lambda \in \mathbb{C}$, so gilt

$$(\lambda\beta)(u, v) = \lambda\beta(u, v) = \lambda\overline{\beta(v, u)} = \overline{\overline{\lambda}\beta(v, u)},$$

d.h. $(\lambda\beta)(u, v) = \overline{(\lambda\beta)(v, u)}$, falls $\lambda = \overline{\lambda}$ reell.

Definition

Eine Hermitesche Form $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt positiv definit, wenn

$$\langle v, v\rangle > 0 \quad \textit{für alle } v \in V \setminus 0.$$

Ein (Hermitesches) Skalarprodukt auf V ist eine positiv definite Hermitesche Form $V \times V \to \mathbb{C}$. Ein Hermitescher Vektorraum ist ein komplexer VR zusammen mit einem Hermiteschen Skalarprodukt darauf. (Hermitesche Vektorräume heißen auch unitäre Vektorräume.)

Beispiel

- Das kanonische (Hermitesche) Skalarprodukt von $\mathbb{C}^n$ ist definiert durch
$$\langle z, w\rangle := \sum_{i=1}^{n} z^i \overline{w}^i,$$
wobei $z = \sum_{i=1}^n z^i e_i$ und $w = \sum_{i=1}^n w^i e_i$.
- Sei $V = \mathbb{R}^n$. Dann definiert jedes Euklidische Skalarprodukt $\langle ., .\rangle$ ein Hermitesches Skalarprodukt $\langle ., .\rangle^H$ auf $\mathbb{C}^n$ mittels komplex linearer und konjugiert linearer Erweiterung. D.h. wir definieren $\langle ., .\rangle^H$ durch
$$\langle x + \mathrm{i}y, u + \mathrm{i}v\rangle^H := \langle x, u\rangle + \langle y, v\rangle + \mathrm{i}\left(\langle y, u\rangle - \langle x, v\rangle\right)$$
für alle $x + \mathrm{i}y, u + \mathrm{i}v \in \mathbb{C}^n = \mathbb{R} \oplus \mathrm{i}\mathbb{R}^n$.
$\langle ., .\rangle^H$ ist in der Tat ein Hermitesches Skalarpodukt (ÜA)

Bemerkung

Sei V ein Hermitescher Vektorraum.

- Auf V definiert man wieder die Länge eines Vektors mittels

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}, \quad v \in V.$$

- Ist $\langle ., .\rangle$ ein Hermitesches Skalarpodukt, so definiert sein Realteil $g(u, v) := Re\langle u, v\rangle$ ein Euklidisches Skalarprodukt auf V aufgefaßt als reeller Vektorraum (ÜA).

Um Winkel zu definieren, benötigt man wider eine CSU:

Satz (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Sei $h = \langle\cdot, \cdot\rangle$ ein Hermitesches Skalarprodukt auf einem $\mathbb{C}$-VR V.

(i) *Dann gilt für alle $v, w \in V$:*

$$(*) \quad |\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

(ii) *Gleichheit in $(*)$ gilt genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.*

Beweis.

(i) Wir können annehmen, dass $\langle v, w\rangle \neq 0$ und setzen

$$\lambda := \frac{\overline{\langle v, w\rangle}}{|\langle v, w\rangle|}.$$

Wegen $|\langle v, w\rangle|^2 = \langle v, w\rangle\overline{\langle v, w\rangle}$ gilt dann

$$\langle \lambda v, w\rangle \; = \; \lambda\langle v, w\rangle \; = \; \frac{\langle v, w\rangle\overline{\langle v, w\rangle}}{|\langle v, w\rangle|} \; = \; |\langle v, w\rangle|.$$

Die CSU für das *Euklidische* Skalarprodukt $g = \mathrm{Re}(h)$ liefert weiter

$$(2) \quad \langle \lambda v, w\rangle = g(\lambda v, w) \leq \sqrt{g(\lambda v, \lambda v)}\sqrt{g(w, w)} = \|v\| \cdot \|w\|.$$

(ii) Gleichheit in (2) und somit in $(*)$ gilt genau dann, wenn λv und w linear abhängig über $\mathbb{R}$ und somit v und w linear abhängig über $\mathbb{C}$ sind.

□

Unitäre Basen

Auch für Hermitesche VR'e gibt es ausgezeichnete Basen:

Definition (Unitäre Basen)

Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ ein endlichdimensionaler Hermitescher VR. Eine unitäre Basis von V ist eine Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ mit

$$\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}.$$

(analog zum Begriff der Orthonormalbasis für Euklidische Vektorräume.)

Die Komponenten eines Vektors $v \in V$ in einer unitären Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ sind wieder gegeben durch $\langle v, b_i \rangle$, d.h. $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, b_i \rangle b_i$.

Satz

Jeder endlichdimensionale Hermitesche VR besitzt eine unitäre Basis.

Beweis. Übungsaufgabe (wie für Orthonormalbasen) $\square$

Die orthogonale Gruppe

Nun kommen wir zu Endomorphismen, die das Euklidische Skalarprodukt invariant lassen.

Definition

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer VR.
Eine surjektive lineare Abbildung $F : V \to V$ heißt orthogonal, wenn

$$\langle F(v), F(w)\rangle = \langle v, w\rangle \quad \text{für alle} \quad v, w \in V. \tag{3}$$

Bemerkung

- Aus (3) folgt, dass F injektiv ist: für $v \neq 0$ ist auch $F(v) \neq 0$. Falls $\dim V < \infty$, so folgt daraus die Surjektivität. Diese muss also bei endlich dimensionalen Vektorräumen nicht gefordert werden.
- Die orthogonalen Abbildungen bilden eine Untergruppe $\mathrm{O}(V) \subset \mathrm{Aut}(V)$, die sogenannte orthogonale Gruppe.
- Orthogonale Abbildungen erhalten Winkel, Längen und Abstände. Sie setzen sich daher aus Drehungen und Spiegelungen zusammen.

Die orthogonale Gruppe des $\mathbb{R}^n$

Beispiel

Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$. Dann definiert man

$$\mathrm{O}(n) := \mathrm{O}(\mathbb{R}^n, \langle ., . \rangle)$$

die dazugehörige orthogonale Gruppe. Dann gilt für $A \in Mat_n(\mathbb{R})$

$$A \in \mathrm{O}(n) \iff A^t A = \mathbf{1}_n,$$

denn: Sei $A = (a^i_j) \in Mat_n(\mathbb{R})$ und e_i die kanonische Basis. Dann ist $A \in \mathrm{O}(n) \quad \iff$

$$\delta^i_j = \langle e_i, e_j \rangle \overset{!}{=} \langle Ae_i, Ae_j \rangle = a^k_i a^l_j \langle e_k, e_l \rangle = a^k_i a^l_j \delta^{kl} = a^k_i a^k_j$$

für alle $i, j = 1, \dots, n$. Dies ist aber äquivalent zu $\mathbf{1}_n = A^t A$.

Die unitäre Gruppe

Definition (Unitäre Gruppe)

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein Hermitescher VR.*
Ein surjektiver[a] *Endomorphismus* $F : V \to V$ *heißt* ***unitär***, *wenn*

$$(*) \quad \langle F(v), F(w)\rangle = \langle v, w\rangle \quad \text{für alle} \quad v, w \in V.$$

Die unitären Endomorphismen bilden eine Untergruppe (ÜA !) $\mathrm{U}(V) \subset \mathrm{Aut}(V)$, *die sogenannte* ***unitäre Gruppe***.

[a] Falls $\dim V < \infty$, so folgt die Surjektivität wieder aus (*).

Beispiel

$$A \in \mathrm{U}(n) := \mathrm{U}(\mathbb{C}^n, \text{ kanon. herm. SP.}) \Longleftrightarrow \overline{A}^t A = \mathbf{1}_n.$$

Übungsaufgabe

Zeigen Sie, daß $\mathrm{U}(n)$ als eine Untergruppe von $\mathrm{O}(2n)$ aufgefaßt werden kann.

Normalformen von Endomorphismen

Für bestimmte Endomorphismen $F : V \to V$ existiert eine Normalform. Damit ist gemeint, daß man eine Basis von V findet, in der die darstellende Matrix von F eine einfache Gestalt hat, z.B. Diagonalgestalt. Sei z. B. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit der darstellenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

bzgl. der kanonischen Basis (e_1, e_2). Dann ist $b_1 = e_1 - e_2$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $1/2$, und $b_2 = e_1 + e_2$ zum Eigenwert $2/3$. D.h. in der Basis (b_1, b_2) hat F die viel einfachere Diagonalgestalt

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Wir werden insbesondere Normalformen für orthogonale und unitäre Endomorphismen finden.

Satz (Normalform unitärer Endomorphismen)

Sei V ein endlichdimensionaler Hermitescher Vektorraum und $F \in \mathrm{U}(V)$ ein unitärer Endomorphismus.

(i) *Die Eigenwerte von F sind komplexe Zahlen vom Betrag 1.*

(ii) *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.*

(iii) *Es gibt eine unitäre Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von F. D.h. F ist in einer unitären Basis diagonalisierbar.*

Beweis.

(i) Sei v ein Eigenvektor von F und $\lambda \in \mathbb{C}$ der zugehörige Eigenwert. Aus

$$0 \neq \langle v, v\rangle = \langle Fv, Fv\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle$$

ergibt sich $|\lambda| = 1$.

(ii) Seien $v, w \in V$ Eigenvektoren von F zu den Eigenwerten λ und μ. Wegen (i) ist $\lambda^{-1} = \overline{\lambda}$. Daher impliziert $\mu \neq \lambda$, daß $\lambda\overline{\mu} \neq 1$. Aus $\langle v, w\rangle = \langle Fv, Fw\rangle = \lambda\overline{\mu}\langle v, w\rangle$ folgt daher $\langle v, w\rangle = 0$.

(iii) Beweis durch Induktion nach $n = \dim V$. Der Fall $n = 1$ ist klar.

Sei $\dim V \geq 2$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat jedes nicht-konstante komplexe Polynom eine Nullstelle. Insbesondere hat das charakteristische Polynom von F eine Nullstelle und F mithin einen Eigenwert λ_1.

Wir wählen einen zugehörigen Eigenvektor $b_1 \in V$ der Länge 1 und betrachten $W := b_1^\perp$.

Es gilt $\dim W = n - 1$ und $FW \subset W$, denn aus $w \in W$ folgt

$$0 = \langle b_1, w \rangle = \langle Fb_1, Fw \rangle = \lambda_1 \langle b_1, Fw \rangle$$

und somit $Fw \in W$. (Wg. (i) ist $\lambda_1 \neq 0$.)

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine unitäre Basis $(b_2, \ldots, b_n)$ von W bestehend aus Eigenvektoren von F und $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ist die gesuchte unitäre Basis von V. $\square$

Normalform orthogonaler Endomorphismen

Folgerung (Normalform orthogonaler Endomorphismen)

Sei V ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und $F \in \mathrm{O}(V)$ ein orthogonaler Endomorphismus.

(i) *Eigenwerte von F sind reelle Zahlen vom Betrag 1, dh. $= \pm 1$.*

(ii) *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.*

(iii) *Es gibt eine Orthonormalbasis bez. der F durch eine Blockdiagonalmatrix folgender Art dargestellt wird*

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, D_{\varphi_1}, \dots, D_{\varphi_q}),$$

wobei $\lambda_i \in \{\pm 1\}$, $D_{\varphi_i} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}$ Drehungen um den Winkel $\varphi_j \in \mathbb{R}$ sind, und $p + 2q = \dim V$.

Beweis.

(i-ii) Gleicher Beweis wie für unitäre Endomorphismen.

(iii) Da die Eigenräume $V_{\pm 1}$ von $F : V \to V$ senkrecht aufeinander stehen, existiert eine ONB $(b_1, \ldots, b_p)$ von $U := V_1 \oplus V_{-1}$ bestehend aus Eigenvektoren.

Wieder bildet F das orthogonale Komplement $W := U^\perp$ in sich ab. Ausserdem entält W keine Eigenvektoren von F.

Insbesondere hat W gerade Dimension $m = 2q$, denn sonst hätte das charakteristische Polynom der Einschränkung $F|_W$ eine reelle Nullstelle.

Es genügt zu zeigen, dass W eine ONB besitzt, bez. der die darstellende Matrix von $F|_W$ die Gestalt $\mathrm{diag}(D_{\varphi_1}, \ldots, D_{\varphi_q})$ hat .

Weiter im Beweis:

Durch Wahl einer ONB von W können wir annehmen, dass $W = \mathbb{R}^m$ der Euklidische Raum ist und $F|_W = A \in \mathrm{O}(m)$.

Wir können A als komplexe Matrix, d.h. als Endomorphismus des $\mathbb{C}^m$, auffassen. Dann ist A unitär bezüglich des Hermiteschen Skalarproduktes auf $\mathbb{C}^n$, welches durch das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ induziert wird, denn $A^t A = \mathbf{1}_m$ und $\overline{A} = A$, d.h. $\overline{A}^t A = \mathbf{1}_m$.

Ist nun μ ein komplexer Eigenwert mit Eigenvektor $v = x + \mathrm{i}y$, so ist $\overline{\mu}$ auch ein Eigenwert mit Eigenvektor $\overline{v} := x - \mathrm{i}y$. Dies gilt da A reell ist:

$$Av = \mu v \implies A\overline{v} = \overline{Av} = \overline{\mu v} = \overline{\mu} \cdot \overline{v}.$$

Die Eigenwerte $\mu_j = e^{i\varphi_j}$ $(\varphi_j \in \mathbb{R})$ treten in also Paaren auf, denn die komplexe Konjugation bildet den Eigenraum zum Eigenwert μ isomorph auf den Eigenraum zum Eigenwert $\overline{\mu}$ ab.

Weiter im Beweis: Nach dem Satz gibt es eine unitäre Basis

$$(\beta_1, \ldots, \beta_q, \overline{\beta_1}, \ldots, \overline{\beta_q})$$

von $\mathbb{C}^m = \mathbb{C}^{2q}$ bestehend aus Eigenvektoren von $A \in \mathrm{U}(m)$ mit zugehörigen Eigenwerten

$$(\mu_1, \ldots, \mu_q, \overline{\mu}_1, \ldots, \overline{\mu}_q).$$

Hierbei ist $\mu_j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j}$ mit $\varphi_j \in \mathbb{R}$. Wir setzen für $i = 1, \ldots, q$:

$$\begin{aligned} \beta_j' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_j + \overline{\beta_j}) \\ \beta_j'' &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\beta_j - \overline{\beta_j}). \end{aligned}$$

$(\beta_1', \beta_1'', \ldots, \beta_q', \beta_q'')$ ist eine ONB von $\mathbb{R}^m$. (Das Euklidische SKP von $\mathbb{R}^m$ ist die Einschränkung des Hermiteschen SKP von $\mathbb{C}^m$.)

Die darstellende Matrix von A bez. dieser Basis ist $\mathrm{diag}(D_{\varphi_1}, \ldots, D_{\varphi_q})$. $\square$

Selbstadjungierte Endomorphismen

Definition (Selbstadjungierte Endomorphismen)

Sei F ein Endomorphismus eines Euklidischen oder Hermiteschen Vektorraumes $(V, \langle .,. \rangle)$.

- *Ein $F^{ad} \in \mathrm{End}(V)$ heißt zu F adjungiert, falls*

$$\langle Fv, w \rangle = \langle v, F^{ad} w \rangle \quad \text{für alle} \quad v, w \in V.$$

- *F heißt selbstadjungiert, wenn F^{ad} existiert und $F = F^{ad}$. (Selbstadjungierte Endomorphismen eines Euklidischen bzw. Hermiteschen Vektorraumes heißen auch symmetrische bzw. Hermitesche Endomorphismen.)*

Satz

Sei F ein Endomorphismus eines Euklidischen oder Hermiteschen VR's V.

- *Dann existiert höchstens ein zu F adjungierter Endomorphismus F^{ad}.*
- *Ist V endlich-dimensional so existiert F^{ad}.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt daraus, daß $\langle ., . \rangle$ nicht entartet ist:
Seien F_1 und F_2 zu F adjungiert. Dann gilt für alle $u, v \in V$, daß

$$\langle u, F_1(v) - F_2(v) \rangle = \langle F(u), v \rangle - \langle F(u), v \rangle = 0.$$

Damit muß aber gelten, daß $F_1(v) = F_2(v)$ für alle $v \in V$.
Sei nun $\dim(V) = n$, $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Orthornomal- bzw. eine hermitesche Basis und sei $A = (a^i_j)^n_{i,j=1}$ die darstellende Matrix von F bezüglich dieser Basis, d.h.

$$F(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a^i_j b_i, \quad \text{oder äquivalent dazu } \langle F(b_j), b_i \rangle = a^i_j$$

Dann ist F^{ad} gegeben durch die darstellende Matrix $\overline{A}^t$, denn

$$\langle b_j, F^{ad}(b_i) \rangle = \langle b_j, \sum_{k=1}^{n} \overline{a}^i_k b_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} a^i_k \langle b_j, b_k \rangle = a^i_j,$$

und damit $\langle F(u), v \rangle = \langle u, F(v) \rangle$. $\square$

Symmetrische und Hermitesche Matrizen

Folgerung (aus dem Satz)

Sei V ein endlichdimensionaler Euklidischer oder Hermitescher VR und A die darstellende Matrix eines Endomorphismus F von V bez. einer orthonormalen bzw. unitären Basis. Dann ist darstellende Matrix von F^{ad} gegeben durch $\overline{A}^t$ und es gilt

$$F \text{ selbstadjungiert} \iff A = \overline{A}^t.$$

Beispiel

Insbesondere gilt für den den $V = \mathbb{R}^n$ mit dem kanonischen Euklidischen SP bzw. für $V = \mathbb{C}^n$ mit dem kanonischen Hermiteschen SP daß

$$A^{ad} = A^t, \text{ bzw. } A^{ad} = \overline{A}^t.$$

Matrizen mit $A = A^t$ heißen symmetrisch, Matrizen mit $A = \overline{A}^t$ heißen Hermitesch.

Kern und Bild von Endomorphismen

Erinnerung: Sei $F : V \to V$ linear, dann war

$$\begin{aligned} Kern(F) &:= \{v \in V \mid F(v) = 0\} \\ Bild(F) &:= \{v \in V \mid \exists u \in V : F(u) = v\} \end{aligned}$$

Kern und Bild von F und F^{ad} stehen nun in folgender Relation.

Satz

Sei F ein Endomorphismus eines Euklidischen oder Hermiteschen Vektorraumes V. Dann gilt

$$\begin{aligned} Kern(F) &= (Bild(F^{ad}))^{\perp} \\ Kern(F^{ad}) &= (Bild(F))^{\perp} \end{aligned}$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der definierenden Gleichung

$$\langle Fv, w\rangle = \langle v, F^{ad}w\rangle, \quad v, w \in V.$$

□

Normalform selbstadjungierter Endomorphismen

Satz (Normalform selbstadjungierter Endomorphismen)

Sei V ein Euklidischer oder Hermitescher VR und $F \in End(V)$ selbstadjungiert.

(i) *Die Eigenwerte von F sind reell.*

(ii) *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von F stehen senkrecht aufeinander.*

(iii) *Falls* $\dim V < \infty$, *so besitzt V eine orthonormale bzw. unitäre Basis bestehend aus Eigenvektoren von F.*

Beweis.

(i) Aus $Fv = \lambda v$, $\|v\| = 1$, folgt $\lambda = \langle Fv, v\rangle = \langle v, Fv\rangle = \overline{\lambda}$.

(ii) v, w seien Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann folgt $\langle v, w\rangle = 0$ aus

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle Fv, w\rangle = \langle v, Fw\rangle = \mu\langle v, w\rangle$$

Weiter im Beweis:

(iii) Es genügt zu zeigen, dass F einen Eigenvektor v besitzt. F erhält dann das orthogonale Komplement $W := v^{\perp}$:

$$\langle v, w \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle v, Fw \rangle = \langle Fv, w \rangle = 0.$$

Somit ist ein Induktionsbeweis möglich.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat das charakteristische Polynom von F eine Nullstelle λ. Im Fall V komplex und hermitesch liefert das die Existenz eines Eigenwertes.

Im Fall V reell und Euklidisch fixieren wir eine ONB und identifizieren V mit $\mathbb{R}^n$. Wir können dann F auffassen als selbstadjungierten Endomorphismus von $\mathbb{R}^n$ aber auch von $\mathbb{C}^n$. Beide haben dasselbe charakteristische Polynom, welches nach (i) reelle Nullstellen hat und daher in reelle Linearfaktoren zerfällt.

Also hat F auch im Fall eines reellen Vektorraumes V einen Eigenvektor $v \in V$.

$\square$

Dualisierung

Bemerkung

Sei V ein Euklidischer oder ein Hermitescher Vektorraum. Dann ist die Menge der selbstadjungierten Operatoren ein reeller (kein komplexer!) VR.

Satz

Sei $(V, \langle ., . \rangle)$ ein endl. dim. Euklidischer oder Hermitescher VR.

Dann ist der Vektorraum der symmetrischen bzw. der Hermiteschen Formen ist isomorph zum Vektorraum der selbstadjungierten Operatoren.

Beweis. Der Isomorphismus ist gegeben durch die Beziehung

$$\beta(u, v) := \langle F(u), v \rangle, \quad \forall\ u, v \in V.$$

zwischen einem selbstadjungierten Endomorphismus F und einer symmetrischen/Hermiteschen Form β (Die Details sind ÜA). $\square$

Folgerung

Sei V ein $\mathbb{C}$-VR mit $dim(V) = n$ und h eine Hermitesche Form auf V.

(i) *Dann existiert eine Basis von V, bez. der die darstellende Matrix von h folgende Gestalt hat:*

$$\mathrm{diag}(\mathbf{1}_{r_+}, -\mathbf{1}_{r_-}, 0_{r_0})$$

mit $r_+ + r_- + r_0 = n$ und $0_{r_0} \in Mat_{r_0}(\mathbb{C})$ die $r_0 \times r_0$-Nullmatrix.

(ii) *Die Zahlen r_+ und r_- hängen nicht von der Wahl der Basis ab.*

Beweis. (i) Wir wählen ein Hermitesches SKP $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V.

Nach dem vorigen Satz entspricht der Hermiteschen Form h ein selbstadjungierter Endomorphismus F. Dieser kann aber in Normalform gebracht werden mit reellen Eigenwerten λ_i und einer unitären Basis $(u_1, \dots, u_n)$ aus Eigenvektoren von F. Davon sind r_+ Eigenwerte > 0, r_- Eigenwerte < 0 und $dim(Ker(F)) = n - r_+ - r_-$.

Durch Multiplikation von u_i mit $\frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}$, falls $\lambda_i \neq 0$ und Umordnung erhalten wir eine Basis mit der gewünschten Eigenschaft.

Beweis von (ii): Aus

$$V_0 = Kern\,F = Kern\,h := \{v | h(v,w) = 0 \quad \text{für alle} \quad w \in V\}$$

folgt die Unabhängigkeit von $r_0 = \dim V_0$ von allen Wahlen.

Es bleibt zu zeigen, dass auch die Zahlen $r_\pm$ unabhängig von allen Wahlen sind. Wir zeigen das z.B. für r_+, indem wir zeigen, daß

$$r_+ = \max\{\dim W \mid W \subset V, h \text{ auf } W \text{ positiv-definit}\}.$$

Dazu sei V_+ bzw. V_- die Summe der Eigenräume zu den positiven bzw. negativen Eigenwerten von H.

h ist auf V_+ positiv definit und auf dem Komplement $V_- \oplus V_0$ negativ semi-definit, d.h. $h(v,v) \leq 0$ für alle $v \in V_- \oplus V_0$.

Sei $W \subset V$ ein UR, auf dem h positiv definit ist.

Dann gilt $W \cap (V_- \oplus V_0) = 0$ und somit $\dim W \leq r_+$. $\square$

Hauptachsentransformation

Folgerung (Hauptachsentransformation)

Sei V ein endlichdimensionaler Euklidischer VR und s eine symmetrische Bilinearform auf V.

(i) *Dann existiert eine orthogonale Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ von V, bez. der die darstellende Matrix von s folgende Gestalt hat:*

$$\mathrm{diag}(\mathbf{1}_{r_+}, -\mathbf{1}_{r_-}, 0_{r_0}).$$

(Die Geraden $\mathbb{R}b_i$ heißen Hauptachsen von s.)

(ii) *Die Zahlen r_+, r_- und r_0 hängen nicht von der Wahl der Basis ab.*

Beweis. Siehe Beweis des vorhergehenden Satzes. □

Aussage (i) ist bekannt als Satz von der Hauptachsentransformation, (ii) als Trägheitssatz von Sylvester.

Beispiel

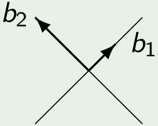
Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit kanonischen SP $\langle .,. \rangle$.
Dann ist $\{v \in \mathbb{R}^2 \mid \langle v, v \rangle = 1\}$ gleich dem Kreis vom Radius 1.
Nun betrachten wir die symmetrische Bilinearform

$$s\left(\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right), \left(\begin{array}{c} x' \\ y' \end{array}\right)\right) = 5xx' + 5yy' + 3xy' + 3yx'.$$

Für die orthogonale Basis $b_1 = \frac{1}{4}(e_1 + e_2)$, $b_2 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$ gilt $s(b_i, b_j) = \delta_{ij}$.

Insbesondere sind die Hauptachsen von s die Diagonalen $y = x$ und $y = -x$. Das sind genau die Hauptachsen der Ellipse

$$E = \left\{ v = \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) \middle| \, s(v, v) = 1 \right\} \quad =$$



Es gilt $s(v, v) = 5x^2 + 5y^2 + 6xy = 4(x + y)^2 + (x - y)^2$.

Normierte Vektorräume

Zunächst betrachten wir Vektorräume, auf die Länge, oder die *Norm*, von Vektoren definiert ist. Diese erfüllt die Eigenschaften, die auch der wohlbekannte Betrag einer Zahl erfüllt.

Definition

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

*Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung*

$$\|\cdot\| : V \to [0, \infty), \quad v \mapsto \|v\|,$$

mit folgenden Eigenschaften:

N1) *Für $v \in V$ gilt genau dann $\|v\| = 0$, wenn $v = 0$.*

N2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ *für alle $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$.*

N3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *für alle $v, w \in V$ (**Dreiecksungleichung**).*

*Ein **normierter Vektorraum** ist ein reeller oder komplexer VR zusammen mit einer Norm darauf.*

Euklidische Vektorräume sind normierte Vektorräume

Satz

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer oder Hermitescher VR. Dann definiert $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine Norm $\|\cdot\|$ auf V:

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}, \quad v \in V.$$

Beweis. N1) folgt daraus, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv definit ist.

N2) folgt aus der Bilinearität von $\langle\cdot,\cdot\rangle$:
$\|\lambda v\|^2 = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle = \lambda\overline{\lambda}\|v\|^2$.

N3) folgt aus der Bilinearität und der CSU:

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w\rangle \\ &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2. \end{aligned}$$

□

Die Euklidische Norm

Beispiel: Die Euklidische Norm

Die durch das kanonische SP auf dem $\mathbb{R}^n$ und die kanonische Hermitesche Form auf dem $\mathbb{C}^n$ definierte Norm heißt Euklidische Norm,

$$\|(x^1, \ldots, x^n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x^i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x^i \overline{x^i}}$$

Metrische Räume

Dies sind Mengen, auf denen ein Abstand zwischen je zwei Elementen definiert ist. Dieser muss nicht von einer Norm kommen.

Definition

Sei X eine Menge.
Eine Metrik (ein Abstand) auf X ist eine Abbildung

$$d : X \times X \to [0, \infty)$$

mit folgenden Eigenschaften:

M1) *Für $x, y \in X$ gilt genau dann $d(x, y) = 0$, wenn $x = y$.*

M2) $d(x, y) = d(y, x)$ *für alle $x, y \in X$.*

M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *für alle $x, y, z \in X$ (Dreiecksungleichung).*

Eine Norm definiert einen Abstand

Satz

Jede Norm $\|\cdot\|$ *auf einem reellen oder komplexen VR* V *definiert eine Metrik* $d : V \times V \to [0, \infty)$ *durch*

$$d(x, y) := \|x - y\|, \quad x, y \in V.$$

Beweis. M1, M2 sind trivial. M3 folgt aus N3:
$\|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|.$ □

Beispiel

Die durch die Euklidische Norm von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ definierte Metrik d heißt die Euklidische Metrik des $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$,

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x^i - y^i|^2}$$

Konvergenz und Stetigkeit in metrischen Räumen

Die Metrik dient dazu, Konvergenz von Folgen zu definieren.

Definition

(i) *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, heißt konvergent mit dem Grenzwert $x \in X$, wenn die Folge $d(x_n, x) \in \mathbb{R}$ eine Nullfolge ist, d.h.* $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

(ii) *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abblidung $f : X \to Y$ heißt im Punkt $x \in X$ stetig, wenn $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \in Y$ für jede gegen $x \in X$ konvergente Folge $x_n \in X$.*

f heißt stetig, wenn f in allen Punkten $x \in X$ stetig ist.

Beispiel

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter VR mit zugehöriger Metrik d.

Dann ist $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion (bezüglich der Metrik d), denn aus N3 folgt $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$.

Die Parallelogrammgleichung

Die Frage, wann eine Norm von einem Skalarprodukt kommt, kann mittels der Parallelogrammgleichung entschieden werden.

Satz (Parallelogrammgleichung)

Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem reellen VR V wird genau dann durch ein SKP auf V induziert, wenn für alle $v, w \in V$ die Parallelogrammgleichung gilt:

$$(*) \quad \|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.$$

Beweis.

($\Rightarrow$) Ist die Norm durch ein Skalarprodukt definiert, d.h.ist $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle$ für alle $u \in V$, so ergibt sich (*) durch Berechnung der linken Seite mittels der Bilinearität des SP'es.

($\Leftarrow$) (Beweisidee) Für die Umkehrung beweist man, daß

$$\langle v, w\rangle := \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right).$$

ein Skalarprodukt definiert.

Beispiele

(i) Durch

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x^i|, \quad x = \sum x^i e_i \in \mathbb{R}^n,$$

wird eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

Diese erfüllt nicht die Parallelogrammgleichung, denn z.B. ist

$$8 = \|e_1 + e_2\|^2 + \|e_1 - e_2\|^2 \quad \neq \quad 2\|e_1\|^2 + 2\|e_2\|^2 = 4.$$

(ii) Die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist die durch das kanonische SKP definierte Norm: $\|x\| := \|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2}$.

(iii) Die Maximumsnorm

$$\|x\|_{max} := \max\{|x^1|, |x^2|, \dots, |x^n|\}$$

auf $\mathbb{R}^n$ erfüllt nicht die Parallelogrammgleichung.

Äquivalente Normen

Definition

Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem VR V heißen äquivalent, wenn es positive Konstanten c und C gibt, so daß

$$c\|v\| \leq \|v\|' \leq C\|v\| \qquad \text{für alle } v \in V\,.$$

Bemerkung

- Dies definiert eine Äquivalenzrelation zwischen Normen (ÜA). Insbesondere sind zwei Normen, die beide zu einer dritten äquivalent sind, auch zueinander äquivalent (Transitivität).
- Seien d_1 und d_2 die durch zwei *äquivalente Normen auf V definierten Metriken. Dann konvergiert eine Folge $x_n \in V$ gegen x bzgl. d_1 gedau dann, wenn sie das auch bzgl d_2 tut.*
  D.h. (V, d_1) und (V, d_2) haben dieselben konvergenten Folgen.

Alle Normen auf endl. dimensionalen VR'en sind äquivalent

Satz

Je zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem endlichdimensionalen reellen oder komplexen VR V sind äquivalent.

Beweis. Sei $B := (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V.

Für $x = \sum_{i=1}^n x^i b_i \in V$ definieren wir

$$\|x\|_{max} := \max\{|x^1|, \dots, |x^n|\}.$$

Wir zeigen, dass jede Norm auf V äquivalent zu $\|\cdot\|_{max}$ ist.

Für jede Norm $\|\cdot\|$ auf V gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\|x\| \;=\; \|\sum_{i=1}^n x^i b_i\| \;\leq\; \sum_{i=1}^n |x^i| \cdot \|b_i\| \;\leq\; C\|x\|_{max},$$

wobei z. B. $C := \sum_{i=1}^n \|b_i\|$. Dies beweist die eine Ungleichung.

Weiter im Beweis:

Wir nehmen an, es gäbe kein $c > 0$ mit $c\|\cdot\|_{max} \leq \|\cdot\|$.

D.h. es gibt für jedes $c > 0$ ein $y \in V$ mit $c\|y\|_{max} > \|y\|$. Damit findet man für jedes c einen Vektor $x := \frac{y}{\|y\|_{max}}$ mit $\|x\|_{max} = 1$ und $c > \|x\|$.

M.a.W., für alle $k \in N$ gibt es einen Vektor $x_k = \sum_{i=1}^{n} x_k^i b_i \in V$ mit $|x_k^i| \leq 1$ und

$$\frac{1}{k} > \|x_k\|.$$

Nach Bolzano-Weierstraß hat jede der beschränkten Zahlenfolgen $(x_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$, $i = 1, \ldots, n$, eine konvergente Teilfolge.

Wir können daher annehmen, dass (x_k) bez. der Norm $\|\cdot\|_{max}$ gegen $x = \sum_{i=1}^{n} x^i b_i \in V$ konvergiert.

Es gilt dann

$$\|x\| \leq \|x - x_k\| + \|x_k\| \leq C\|x - x_k\|_{max} + \frac{1}{k} \overset{(k\to\infty)}{\longrightarrow} 0.$$

Also $x = 0$ und somit $0 = \|x\|_{max} = \lim_{k\to\infty} \|x_k\|_{max}$, im Widerspruch zu $\|x_k\|_{max} = 1$. □

Vollständigkeit, Banachräume, Hilberträume

Definition (Vollständigkeit von metrischen Räumen)

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

- *Eine Folge $x_n \in X$ heißt* Cauchy-Folge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq N.$$

- *(X, d) heißt* vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in X gegen einen Grenzwert $x \in X$ konvergiert.*

Definition

- *Ein* Banachraum *ist ein normierter Vektorraum, der bez. der von der Norm abgeleiteten Metrik vollständig ist.*
- *Ein reeller bzw. komplexer* Hilbertraum *ist ein Euklidischer bzw. Hermitescher Vektorraum, der bez. der vom Skalarprodukt abgeleiteten Metrik vollständig ist.*

Bemerkungen/Beispiele

1. Wieder gilt: Seien d_1 und d_2 die durch zwei *äquivalente Normen auf V definierten Metriken. Dann ist $x_n \in V$ eine Cauchyfolge bzgl. d_1 genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge bzgl. d_2 ist.*
2. *Aus der Vollständigkeit von $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ folgt, dass $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_{max})$ ein Banachraum ist: Ist $x_n \in \mathbb{K}^n$ eine Cauchyfolge, so auch alle ihre Komponenten.*
3. *Mittels Wahl einer Basis, folgt daraus: Jeder endlichdimensionale normierte reelle oder komplexe Vektorraum ist ein Banachraum.*
4. *Damit sind auch endlichdimensionale Euklidische und Hermitesche Vektorräume Hilberträume.*
   Insbesondere ist $\mathbb{R}^n$ mit dem Euklidischen und $\mathbb{C}^n$ mit dem Hermiteschen Skalarprodukt ein reeller bzw. komplexer Hilbertraum.
5. *Unendlich-dimensionale Hilberträume spielen eine wichtige Rolle in der Quantenmechanik.*

Beipiel für einen ∞-dimensionalen Hilbertraum: Quadratisch summierbare Folgen

Satz

Der Vektorraum der quadratisch summierbaren komplexen Zahlenfolgen

$$\ell^2 = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, x_n \in \mathbb{C},\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

mit dem Hermiteschen Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

ist ein Hilbertraum.

Beweis. $(\ell_2, \langle ., \rangle)$ ist ein Hermitescher Vektorraum (siehe Übungsblatt). Wir beweisen die Vollständigkeit von ℓ^2: Sei $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} = (x_1^k, x_2^k, \dots)$ eine Cauchy-Folge in ℓ^2.

Dann ist jede der Komponentenfolgen $(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und konvergiert daher gegen einen Grenzwert $x_n := \lim_{k\to\infty} x_n^k$.

Dann gilt: $x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ und $x = \lim_{k\to\infty} x^k$, denn:

Da (x^k) eine Cauchy-Folge ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=1}^{m} |x_n^p - x_n^q|^2 < \varepsilon^2$$

für alle $p, q \geq N$ und alle $m \in \mathbb{N}$.

Grenzübergang $p \to \infty$ liefert:

$$\sum_{n=1}^{m} |x_n - x_n^q|^2 \leq \varepsilon^2$$

für alle $q \geq N$ und alle $m \in \mathbb{N}$, d.h. $\|x - x^q\| \leq \varepsilon$. $\square$

Banachscher Fixpunktsatz

Den Banachschen Fixpunktsatz werden wir in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen benutzen. Wir werden ihn dann auf bestimmte Banachräume von Funktionen anwenden, um die Existenz der Lösung einer Differentialgleichung nachzuweisen.

Satz (Banachscher Fixpunktsatz)

Sei (X, d) *ein vollständiger metrischer Raum und* $F : X \to X$ *eine kontrahierende Abbildung, d.h. es existiert* $0 \leq \theta < 1$, *so dass*

$$d(F(x), F(y)) \leq \theta d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$.

Dann existiert ein Fixpunkt von F, *d.h. ein* $x \in X$ *mit* $F(x) = x$.

Ist $\theta \neq 0$, *so ist dieser Fixpunkt eindeutig bestimmt.*

Desweiteren konvergiert die rekursiv definierte Folge x_0, $x_{k+1} = F(x_k)$, *für alle Anfangswerte* $x_0 \in X$ *gegen diesen Fixpunkt.*

Beweis. Existiert ein Fixpunkt, so ist er eindeutig bestimmt, falls $\theta \neq 0$, denn für zwei Fixpunkte x und y gilt dann

$$0 \leq d(x,y) \; = \; d(F(x),F(y)) \; \leq \; \theta d(x,y)$$

Die ergibt wegen $\theta \neq 0$ daß $d(x,y) = 0$, d.hW. $x = y$.

Die Folge $x_k := F(x_k)$ ist nun für jeden Startpunkt x_0 eine Cauchyfolge, denn es gilt

$$\begin{aligned} d(x_{n+k},x_n) &= d(F(x_{n+k-1}),F(x_{n-1})) \\ &\leq \theta d(x_{n+k-1},x_{n-1}) \leq \dots \leq \theta^n d(x_k,x_0) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Da nun (X,d) vollständig ist, existiert ein Grenzwert $x \in X$.

Dieser ist aber auch der Fixpunkt, denn wegen der Dreiecksungleichung gilt

$$\begin{aligned} d(F(x),x) &\leq d(F(x),x_k) + d(x_k,x) \\ &\leq \theta d(x,x_{k-1}) + d(x_k,x) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Somit ist $d(F(x),x) = 0$, d.h. $F(x) = x$. □

Banachscher Fixpunktsatz

Beispiel aus dem 1. Semester: Berechnung von $\sqrt{2}$

Sei $X := [1, \infty)$ der mit der Euklidischen Metrik versehene vollständige metrische Raum.
Wir betrachten die Abbildung

$$F : X \ni x \quad \mapsto \quad x - \frac{1}{2x}(x^2 - 2) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \in X.$$

Diese Abbildung ist kontrahierend, denn

$$F(x) - F(y) \;=\; \frac{1}{2}(x - y) + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \;=\; \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right)(x - y)$$

impliziert wegen $xy \geq 1$ daß $\|F(x) - F(y)\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|$.
Somit hat F einen Fixpunkt, nämlich $\sqrt{2}$.

Orthogonalprojektion auf vollständige Unterräume

Satz

Sei V ein Euklidischer oder Hermitescher VR und $U \subset V$ ein vollständiger Unterraum.

(i) *Dann existiert zu jedem $x \in V$ genau ein $x_U \in U$ mit kleinstem Abstand zu x, d.h.*

$$\|x - x_U\| \leq \|x - y\| \quad \textit{für alle} \quad y \in U.$$

(ii) *Das Element $x_U \in U$ ist durch $x - x_U \in U^\perp$ charakterisiert.*

(iii) *Es gilt $V = U \oplus U^\perp$.*

(iv) *Die Zuordnung $x \mapsto x_U$ definiert eine stetige lineare Abbildung $P : V \to U$ (die sogenannte orthogonale Projektion auf U).*

Beweis. (i) Sei $y_n \in U$ eine Folge mit
$\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = d := \inf_{y\in U} \|x - y\|$.
(y_n) ist eine Cauchy-Folge, denn wg. der Parallelogrammgl. gilt

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) - (y_m - x)\|^2 \\
&= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|(y_n - x) + (y_m - x)\|^2 \\
&= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\|^2 \\
&\leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4d^2 \overset{(m,n\to\infty)}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Wg. der Vollständigkeit von U konvergiert (y_n) in U,
$x_U := \lim_{n\to\infty} y_n \in U$, und $\|x - x_U\| = d$, wg. der Stetigkeit der Norm.
Aus $x_U, x'_U \in U$ mit $\|x_U - x\| = \|x'_U - x\| = d$ folgt wie oben

$$\begin{aligned}
\|x_U - x'_U\|^2 &= 2\|x_U - x\|^2 + 2\|x'_U - x\|^2 - \|x_U + x'_U - 2x\|^2 \\
&= 4d^2 - \|x_U + x'_U - 2x\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0.
\end{aligned}$$

Das beweist die Eindeutigkeit.

Weiter im Beweis:

(ii) Für alle $y \in U$, $t \in \mathbb{R}$ gilt mit $z = x - x_U$:

$$\|z\|^2 \leq \|z + ty\|^2 = d^2 + 2t\mathrm{Re}\,\langle z, y\rangle + t^2\|y\|^2.$$

Das ist nur möglich, wenn $\mathrm{Re}\,\langle z, y\rangle = 0$ für alle $y \in U$, d.h. wenn $z \perp U$.

Umgekehrt folgt aus $u \in U$ und $z = x - u \perp U$:

$$\|z\|^2 \leq \|z + y\|^2 = \|z\|^2 + \|y\|^2 \quad \text{für alle} \quad y \in U,$$

d.h. $u = x_U$.

(iii) In (i-ii) haben wir gezeigt, dass jeder Vektor $x \in V$ eine eindeutige Darstellung $x = x_U + (x - x_U)$ besitzt mit $x_U \in U$ und $x - x_U \in U^\perp$. Das beweist $V = U \oplus U^\perp$.

(iv) Die Linearität der Abbildung $x \mapsto x_U$ folgt aus der Charakterisierung (ii). Aus der Orthogonalität der Zerlegung $V = U \oplus U^\perp$ folgt $\|x_U\| \leq \|x\|$ und somit die Stetigkeit von P. $\square$

Beschränkte Operatoren

Definition

Seien $(V_1, \|.\|_1)$ und $(V_2, \|.\|_2)$ zwei normierte Räume.
Eine lineare Abbildung $F : V_1 \to V_2$ heißt ***beschränkt****, falls es eine Konstante C gibt, so daß*

$$\|F(u)\|_2 \leq C\|u\|_1 \quad \forall \quad u \in V_1.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\sup_{0 \neq u \in V_1} \frac{\|Fu\|_2}{\|u\|_1} < \infty.$$

Die Zahl

$$\|F\| := \sup_{0 \neq x \in V_1} \frac{\|Fx\|_2}{\|x\|_1}$$

heißt ***Operatornorm*** *von F.*

Bemerkungen/ÜA

- Durch die Operatornorm wird der VR

$$L_b(V_1, V_2) := \{F \in L(V_1, V_2) | \quad \|F\| < \infty\}$$

  der beschränkten Operatoren zu einem normierten VR.
- Insbesondere ist $V' := L_b(V, \mathbb{K})$ ein normierter VR für jeden normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Hierbei ist $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) durch den Betrag normiert.
- Lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen sind beschränkt.
- Ist V_1 unendlich-dimensional, so gilt dies nicht. Z.B. sei $V_1 = V_2 = C^\infty([0,1])$ mit der Norm $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} f(x)$, und sei $F = (.)'$ der Ableitungsoperator. Dann gilt für $f_n(x) := x^n$ daß $\|f_n\|_\infty = 1$ und $\|F(f)\|_\infty = n$.

Satz

Eine lineare Abbildung $F : V_1 \to V_2$ zwischen normierten Vektorräumen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ und $(V_2, \|\cdot\|_2)$ ist genau dann stetig, wenn sie beschränkt ist.

Beweis. Ist F stetig, so ist F auch in $0 \in V_1$ stetig. D.h., zu $\varepsilon = 1$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\|Tv\|_2 < 1, \text{ falls } \|v\|_1 < \delta.$$

Sei nun $u \in V_1$. Für $v := \frac{\delta}{2\|u\|_1} u$ gilt dann, daß $\|v\|_1 < \delta$, und somit

$$\|F(u)\|_2 = \frac{2\|u\|_1}{\delta}\|F(v)\|_2 < \frac{2\|u\|_1}{\delta}.$$

Damit ist F beschränkt.

Ist andererseits F beschränkt, d.h. $\|F(u)\|_2 \le C\|u\|_1 \ \forall u \in V_1$, so gilt

$$\|F(u) - F(u_n)\|_2 = \|F(u - u_n)\|_2 \le C\|u - u_n\|_1.$$

Somit konvergiert $F(u_n)$ gegen $F(u)$, falls $u_n \to u$. $\square$

Satz (Darstellungssatz von Riesz)

Sei V ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und V' der Vektorraum aller stetigen linearen Abbildungen $V \to \mathbb{K}$.

Dann ist durch

$$\phi(x) := \langle \cdot, x \rangle, \quad x \in V,$$

ein konjugiert-linearer Isomorphismus normierter Vektorräume $\phi : V \to V'$ gegeben.

Beweis.
Die Stetigkeit der Linearform $\phi(x) : V \to \mathbb{K}$ ergibt sich aus der CSU:

$$|\phi(x)(y)| = |\langle y, x \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{für alle} \quad y \in V.$$

Weiter im Beweis:

Die CSU liefert zunächst $\|\phi(x)\| \leq \|x\|$.

Für $y = x$ erhalten wir Gleichheit in der CSU und somit $\|\phi(x)\| = \|x\|$.

Daraus folgt die Injektivität von ϕ.

Es ist klar, dass ϕ konjugiert-linear ist, denn das SKP ist konjugiert-linear im zweiten Argument.

Es bleibt noch die Surjektivität von ϕ zu zeigen.

Sei dazu $\alpha \in V'$ und $v \in V$ mit $\alpha(v) = 1$.

Wg. der Stetigkeit von α ist $U = \mathit{Kern}\,\alpha \subset V$ vollständig und $V = U \oplus U^\perp$.

Wir setzen $x_0 := v - v_U \in U^\perp$, wobei $v_U \in U$ die Orthogonalprojektion von v in U ist.

Dann gilt $\alpha(x_0) = 1$ und für alle $y \in V$ ist daher

$$y = (y - \alpha(y)x_0) + \alpha(y)x_0 \in U \oplus U^\perp.$$

Somit $\langle y, x_0\rangle = \alpha(y)\|x_0\|^2$ und $\alpha = \phi(\frac{x_0}{\|x_0\|^2})$. $\square$

Offene und abgeschlossene Mengen

Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

- *Die Teilmenge $B_r(x) := \{y \in X | d(y, x) < r\}$ heißt Kugel (oder Ball) vom Radius r und Mittelpunkt x.*
- *Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt offen, wenn es zu jedem $x \in U$ ein $r > 0$ gibt, so dass $B_r(x) \subset U$.*
- *Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt abgeschlossen, wenn $X \setminus A$ offen ist.*

Bemerkung/ÜA

- Beliebige Vereinigungen von offenen Mengen sind wieder offen.
- Beliebige Durchschnitte von abgeschlossenen Mengen sind wieder abgeschlossen.
- Endliche Durchschnitte von offenen Mengen sind wieder offen.
- Endliche Vereinigingen von abgeschlossenen Mengen sind wieder abgeschlossen.

Inneres, Abschluss und Rand

Definition

Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$.

(i) *Das Innere von A ist definiert als die offene Teilmenge*

$$\mathring{A} := \bigcup_{B \subset A \text{ offen}} B$$

(ii) *Der Abschluss von A is definiert als die abgeschlossene Teilmenge*

$$\overline{A} := \bigcap_{B \supset A \text{ abgeschl.}} B$$

(iii) $\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A}$ *heißt Rand von A.*

Beispiel/ ÜA:

Der Abschluss der offenen Kugel $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ im Euklidischen Raum ist die abgeschlossene Kugel

$$\overline{B}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n | d(y,x) \leq r\}.$$

Der Rand der Kugel ist die Sphäre:
$\partial B_r(x) = S_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n | d(y,x) = r\}.$

Stetige Abbildungen

Satz

Sei $F : X \to Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann gilt

F *ist stetig*

$\Leftrightarrow$ *Urbilder $F^{-1}(U)$ von offenen Mengen $U \subset Y$ sind offen.*

$\Leftrightarrow$ *Urbilder $F^{-1}(A)$ von abgeschlossenen Mengen A sind abgeschlossen.*

Beweis. Wir beweisen nur die erste Äquivalenz:

($\Leftarrow$) Zu $\varepsilon > 0$ betrachten wir die Kugel $B_\varepsilon(f(x)) \subset Y$, welche nach Vorraussetzung ein offenes Urbild hat. D.h. wir finden ein $\delta > 0$ so daß $B_\delta(x) \subset F^{-1}(B_\varepsilon(F(x)))$. Da $x_n \to x \in X$, finden wir ein N mit $x_n \in B_\delta(x)\ \forall\ n > N$. Damit ist aber

$$F(x_n) \in F(F^{-1}(B_\varepsilon(F(x))) \subset B_\varepsilon(F(x)),$$

d.h. $F(x_n) \to F(x)$.

Weiter im Beweis:

($\Rightarrow$) Angenommen, es existiert eine offene Menge $V \subset Y$, so daß $F^{-1}(V)$ nicht offen ist.
D.h. $\exists x \in F^{-1}(V)$, so daß $B_{\frac{1}{n}}(x) \not\subset F^{-1}(V)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sein nun x_n eine Folge mit $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \setminus F^{-1}(V)$.
Insbesondere gilt dann $x_n \to x$ und wegen der Stetigkeit gilt auch $F(x_n) \to F(x)$.
Da V offen war, gibt daher es ein δ mit $B_\delta(F(x)) \subset V$ und

$$F(x_n) \in B_\delta(F(x)) \subset V \quad \forall n > N.$$

Das steht aber im Widerspruch zu $x_n \notin F^{-1}(V)$. $\square$

Satz (Abgeschlossene Teilmengen von metrischen Räumen)

Für eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes X gilt:

A ist abgeschlossen

$\Leftrightarrow$ *Für alle $x \in X$ gilt: Wenn $x \in X$ Grenzwert einer konvergenten Folge von Elementen von A ist, so gilt $x \in A$.*

Beweis.

($\Rightarrow$) Sei $x_k \in A$ eine Folge mit Grenzwert $x \in X$.
Wenn $x \notin A$, so wäre $U = X \setminus A$ offen und $x \in U$

Das widerspricht aber der Konvergenz der Folge $x_k \in A$ gegen x.

($\Leftarrow$) Sei $x \in X \setminus A$. Wir zeigen, dass es $r > 0$ gibt mit $B_r(x) \subset X \setminus A$.
Sonst gibt es eine Folge $x_k \in B_{1/k}(x) \cap A$.
Da diese Folge gegen x konvergiert, folgt $x \in A$, im Widerspruch zu $x \in X \setminus A$.

□

Folgerung

(i) *Jede (bez. der induzierten Metrik) vollständige Teilmenge A eines metrischen X Raumes ist abgeschlossen.*

(ii) *Jede abgeschlossene Teilmenge A eines vollständigen metrischen Raumes X ist vollständig.*

Beweis.

(i) Sei $x_k \in A$ konvergent mit Grenzwert $x \in X$.

Dann ist (x_k) eine Cauchy-Folge und somit $x \in A$ (A ist vollständig).

(ii) Sei $x_k \in A$ eine Cauchy-Folge.

Dann konvergiert (x_k) gegen $x \in X$ (X ist vollständig) und somit $x \in A$ (A ist abgeschlossen).

□

Kompakte Mengen

Definition (Kompaktheit)

Sei X ein metrischer Raum.

- *Eine (offene) Überdeckung einer Teilmenge $A \subset X$ ist eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ von (offenen) Teilmengen $U_i \subset X$ mit $A \subset \cup_{i \in I} U_i$.*
- *Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt kompakt, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von A eine endliche Teilüberdeckung $(U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_k})$, $i_1, \ldots, i_k \in I$, gibt.*

Satz

Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Dann hat jede Folge in A eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A.

Beweis.

Sei $x_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge.

Wenn $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A hat, dann gibt es zu jedem $a \in A$ eine offene Umg. U_a, die nur endlich viele Glieder der Folge x_k enthält.

$(U_a)_{a\in A}$ ist eine offene Überdeckung der kompakten Menge A und besitzt daher eine endliche Teilüberdeckung $U_{a_1}, U_{a_2}, \ldots, U_{a_r}$.

Nach Konstruktion enthält $\cup_{i=1}^r U_{a_i} \supset A$ nur endlich viele Glieder der Folge, im Widerspruch zu $x_k \in A$. $\square$

Folgerung

Jede kompakte Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes X ist abgeschlossen, vollständig und beschränkt.

Beweis. Die Vollständigkeit und damit die Abgeschlossenheit folgt sofort: Sei $x_k \in A$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $x \in X$. Nach dem vorigen Satz hat x_k eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A. Daraus folgt $x \in A$.

Die Beschränktheit bedeutet, dass es $x \in X$ und $R > 0$ gibt, so dass $A \subset B_R(x)$.
Für alle $x \in X$ ist $(B_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von X und somit von A.
Also existiert eine endliche Teilüberdeckung $B_{k_1}(x), \ldots, B_{k_r}(x)$ und mit $R = \max\{k_1, \ldots, k_r\}$ erhalten wir $A \subset B_R(x)$. $\square$

Satz

X kompakt, $A \subset X$ abgeschlossen $\Longrightarrow$ A kompakt.

Beweis. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A.
Dann ist $(X \setminus A, (U_i)_{i \in I})$ eine offene Überdeckung des Kompaktums X.
Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(X \setminus A, U_{i_1}, \ldots, U_{i_k})$ von X.
$(U_{i_1}, \ldots, U_{i_k})$ ist eine endliche Teilüberdeckung von A. $\square$

Folgerung

Sei X ein metrischer Raum, in dem die abgeschlossenen Kugeln $\overline{B}_r(x)$ kompakt sind.

Die kompakten Teilmengen von X sind dann genau die abgeschlossenen beschränkten Teilmengen.

Satz (Satz von Heine-Borel)

Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Beweis. Wg. der Folgerung genügt es zu zeigen, dass die abgeschlossenen Kugeln $\overline{B}_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ kompakt sind.

Da alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, können wir z.B. die Maximumsnorm zu Grunde legen.

Außerdem können wir $x = 0$ (Translationsinvarianz des Abstands) und $r = 1$ (Homogenität) annehmen, d.h. $\overline{B}_r(x) = \overline{B}_1(0) = [-1, 1]^n =: W$.

Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung des Würfels $W = W_0$.

Wir nehmen an, es gibt keine endliche Teilüberdeckung und führen diese Annahme zum Widerspruch.

Weiter im Beweis:
Wir konstruieren durch sukzessive Halbierung der Kantenlängen eine Folge von Würfeln W_k der Kantenlänge 2^{1-k}, so dass keiner der W_k durch endlich viele der U_i überdeckt wird.

Halbierung der Kanten führt zu einer Zerlegung des Würfels W_k in 2^n Teilwürfel, von denen mindestens einer nicht durch endlich viele U_i überdeckt werden kann (sonst könnte man W_k durch endlich viele U_i überdecken).

Sei $x_k \in W_k$. Dann ist x_k eine Cauchy-Folge.

Wg. der Abgeschlossenheit von W_i gilt $x = \lim_{k\to\infty} x_k \in W_i$, denn $x_k \in W_i$ für alle $k \geq i$.

Daraus folgt $x \in \cap_i W_i \subset W$.

Also existiert ein i_0 mit $x \in U_{i_o}$ und somit $B_\varepsilon(x) \subset U_{i_o}$, wenn $\varepsilon > 0$ klein genug ist.

Daraus ergibt sich $W_k \subset B_\varepsilon(x) \subset U_{i_o}$, wenn $2^{1-k} < \varepsilon$. Ein Widerspruch! (Hierbei haben wir benutzt, dass $\|x - y\|_{max} \leq 2^{1-k}$ für alle $y \in W_k$.) $\square$

Satz

Sei $F : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen und $A \subset X$ sei kompakt. Dann ist $F(A) \subset Y$ kompakt

Beweis. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $F(A)$. Dann bilden die $V_i := F^{-1}(U_i)$ eine offene Überdeckung des Kompaktums A. Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(V_{i_1}, \ldots, V_{i_k})$ und $(U_{i_1}, \ldots, U_{i_k})$ überdeckt dann $F(A)$. □

Folgerung

Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und X kompakt.

Dann ist f beschränkt und nimmt ihr Minimum und Maximum in X an.

Beweis. Nach dem vorigen Satz ist $f(X)$ kompakt und somit beschränkt und abgeschlossen. □

Gleichmäßige Stetigkeit

Satz

Jede stetige Abbildung $F : X \to Y$ von einem kompakten metrischen Raum X in einen metrischen Raum Y ist gleichmäßig stetig,

d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass für alle $x, x' \in X$ gilt

$$d(F(x), F(x')) < \varepsilon \quad \textit{falls} \quad d(x, x') < \delta$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der Stetigkeit von F existiert für alle $x \in X$ ein $\delta(x) > 0$, so dass

$$d(F(x), F(x')) < \frac{\varepsilon}{2},$$

wann immer $d(x, x') < \delta(x)$.

Weiter im Beweis:

Da die offenen Kugeln $U_x := B_{\delta(x)/2}(x)$ das Kompaktum X überdecken, gibt es $x_1, \ldots, x_k \in X$ mit $X = \cup_{i=1}^k U_{x_i}$.
Seien nun $x, x' \in X$ mit

$$d(x, x') < \delta := \min_{i=1,\ldots,k} \delta(x_i)/2.$$

Dann gibt es x_i mit $x \in U_{x_i}$, d.h. $d(x, x_i) < \delta(x_i)/2$, und somit $d(x', x_i) < \delta(x_i)$.
Daraus ergibt sich

$$d(F(x), F(x_i)) < \varepsilon/2 \quad \text{und} \quad d(F(x'), F(x_i)) < \varepsilon/2$$

und somit $d(F(x), F(x')) < \varepsilon$. $\square$

Zum Abschluß noch einige Fakten über Hilberträume

Für diejenigen, die in ihren Physikvorlesungen schon mit Hilberträumen konfrontiert wurden, wollen wir hier noch einige Fakten zusammentragen.

Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

- *Eine Teilmenge $Y \subset X$ heitßt dicht in Y, falls ihr Abschluß gleich X ist, d.h. $\overline{Y} = X$.*
  Äquivalent dazu ist: $\forall\ x \in X, \forall\ \varepsilon > 0\ \exists y \in Y$, so daß $y \in B_\varepsilon(x)$.
- *(X, d) heißt separabel, falls es eine abzählbare dichte Teilmenge in X gibt.*

Beispiel

Die rationalen Zahlen sind dicht in den reellen.
Ebenso ist $\mathbb{Q}^n$ dicht in $\mathbb{R}^n$.
Damit ist $\mathbb{R}^n$ und jeder endlich dimensionale Vektorraum separabel.

Bemerkung

ℓ^2 ist separabel, denn:
Die Folgen $x \in \ell^2$ mit $x_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n = 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ bilden eine abzählbare dichte Teilmenge S, d.h. jedes Element $x \in \ell^2$ ist Grenzwert einer Folge $x_k \in S$.

Weiterhin gilt:
Jeder unendlichdimensionale separable komplexe Hilbertraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ isomorph zu ℓ^2 ist,
d.h. es gibt einen Isomorphismus von Vektorräumen $\phi : V \to \ell^2$, der

$$\langle \phi(x), \phi(y) \rangle_{\ell^2} = \langle x, y \rangle_V$$

für alle $x, y \in V$ erfüllt.
Damit ist ℓ^2 für die komplexen separablen Hilberträume, was der $\mathbb{C}^n$ für die endlich dimensionalen komplexen Vektorräume ist.

Für den Beweis dieser Isomorphie benutzt man Hilbertbasen.

Orthonormale Familien

Eine orthonormale Familie in einem Euklidischen oder Hermiteschen Vektorraum V ist eine Teilmenge $U \subset V$ für die gilt, daß $\langle u, u \rangle = 1$ und $\langle u, v \rangle = 0$ für alle $u, v \in V$ mit $u \neq v$.

Satz

Sei V ein Euklidischer oder Hermitescher VR.

- *Ist V separabel, so ist jede orthonormale Familie $(v_i)_{i \in I}$ abzählbar.*
- *Ist $(v_1, v_2, \ldots)$ eine (endliche oder unendliche) orthonormale Familie, dann gilt für alle $x \in V$:*

$$\sum_k |\langle x, v_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \textit{Besselsche Ungleichung}.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $x = \sum_k \langle x, v_k \rangle v_k$.

Hilbertbasen

Definition

Sei V ein Euklidischer oder Hermitescher VR.
Eine orthonormale Familie $(v_1, v_2, \dots)$ heißt Hilbertbasis, wenn jeder Vektor $x \in V$ eine Darstellung $x = \sum_k \langle x, v_k \rangle v_k$ besitzt.

Beispiele

(i) $\dim V < \infty \;\Rightarrow$ Hilbertbasen = orthonormale/unitäre Basen.

(ii) Sei $V = \ell^2$ der Hilbertraum der quadratisch summierbaren Folgen. Die Folgen $e^j = (e^j_1, e^j_2, \dots) \in \ell^2$ mit $e^j_k = \delta^j_k$ $(j, k \in \mathbb{N})$ bilden eine Hilbertbasis $(e^j)_{j\in\mathbb{N}}$, die sogenannte kanonische Hilbertbasis von ℓ^2. $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist aber keine Vektorraumbasis, denn die lineare Hülle der e_j ist

$$\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid x_i \in \mathbb{C},\ x_i = 0 \text{ für fast alle } i \in \mathbb{N}\} \subsetneq \ell^2.$$

Dies ist so, da bei der linearen Hülle nur endliche Linearkombinationen zugelassen sind.

Satz

Für eine orthonormale Familie $B = (b_1, b_2, \ldots)$ von Vektoren eines Euklidischen oder Hermiteschen VR V sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\mathrm{span}\{b_1, b_2, \ldots\}$ *ist dicht in V.*

(ii) *B ist eine Hilbertbasis.*

(iii) *Für alle $x, y \in V$ gilt $\langle x, y\rangle = \sum_k \langle x, b_k\rangle \overline{\langle y, b_k\rangle}$.*

(iv) *Für alle $x \in V$ gilt die Parsevalsche Gleichung $\|x\|^2 = \sum_k |\langle x, b_k\rangle|^2$.*

Satz (Hilbertbasen)

Jeder unendlichdimensionale separable Hilbertraum V besitzt eine abzählbare unendliche Hilbertbasis $B = (b_1, b_2, \ldots)$.

Folgerung

Jeder unendlichdimensionale separable Hilbertraum V ist isomorph zum Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{K})$ der quadratisch summierbaren Folgen mit Werten in $\mathbb{K}$.

Teil 2:

Differentialrechung mehrerer Veränderlicher

Richtungsableitung

Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor.

(i) *Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x \in U$ in Richtung v differenzierbar, wenn die Funktion*

$$\tilde{f} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(t) := f(x + tv),$$

bei $t = 0$ differenzierbar ist.

(Hierbei ist $\varepsilon > 0$ so klein, dass $x + tv \in U$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.)

(ii) *Die Zahl*

$$(\partial_v f)(x) := \tilde{f}'(0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(x + tv)$$

heißt Ableitung von f an der Stelle x in Richtung v oder auch Richtungsableitung.

Wir erinnern uns:

$\tilde{f}$ ist differenzierbar in 0, wenn $\lim_{t\to 0} \frac{\tilde{f}(t)-\tilde{f}(0)}{t}$ existiert.

Die Ableitung $\tilde{f}'(0)$ an der Stelle 0 ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{f}'(0) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \tilde{f}(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x+tv) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\tilde{f}(t)-\tilde{f}(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}. \end{aligned}$$

Rechenregeln für die Richtungsableitung

Satz

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die beide in $x \in \mathbb{R}^n$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar sind. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \partial_v(f+g)(x) &= \partial_v(f)(x) + \partial_v(g)(x) \\ \partial_v(\lambda f)(x) &= \lambda \partial_v(f)(x) \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}, \\ \partial_v(f \cdot g)(x) &= \partial_v(f)(x) g(x) + f(x) \partial_v(g)(x). \end{aligned}$$

Ist $g(x) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ in x in Richtung v differenzierbar, und es gilt:

$$\partial_v \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\partial_v(f)(x) g(x) - f(x) \partial_v(g)(x)}{g(x)^2}.$$

Der **Beweis** folgt aus den Rechenregeln für die differenzierbaren reellen Funktionen $\tilde{f}$ und $\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\tilde{f}(t) := f(x + tv)$, $\tilde{g}(t) = g(x + tv)$. $\square$

Partielle Ableitungen

Definition

Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ *die kanonische Basis des* $\mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $f : U \to \mathbb{R}$.

- *Die Funktion* f *heißt an der Stelle* $x \in U$ *partiell differenzierbar, wenn* f *an der Stelle* x *in alle Koordinatenrichtungen* e_i *differenzierbar ist.*
- *Die Zahl*
  $$(\partial_i f)(x) := (\partial_{e_i} f)(x), \quad i = 1, 2, \ldots n,$$
  heißt i*-te partielle Ableitung von* f *an der Stelle* x.
- f *heißt partiell differenzierbar, wenn* f *in allen Punkten* $x \in U$ *partiell differenzierbar ist.*
- *Die Funktion* $\partial_i f : U \to \mathbb{R}$ *heißt* i*-te partielle Ableitung von* f.
  Man schreibt dafür auch
  $$\frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Bemerkung

Die i-te partielle Ableitung $(\partial_i f)(x)$ an der Stelle $x = \sum_{j=1}^n x^j e_j$ ist genau die Ableitung der Funktion $h(t) := f(x^1, \ldots, x^{i-1}, t, x^{i+1}, \ldots, x^n)$ an der Stelle $t = x^i$:

$$(\partial_i f)(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^i + t, x^{i+1}, \ldots, x^n) = h'(x^i).$$

Beim Berechnen der i-ten partiellen Ableitung sind also die Variablen x^j für $j \neq i$ als Konstanten zu behandeln. Differenziert wird nach der Variablen x^i.

Beispiel

Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2 = \sum_{j=1}^n (x^j)^2$, ist partiell differenzierbar und

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = 2x^i.$$

Beispiel

Partielle Differenzierbarkeit impliziert im Allgemeinen nicht die Stetigkeit!

Sei

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f ist nicht stetig in $(0,0)$, aber alle Richtungsableitungen existieren:
Sei $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. In $p_0 = (0,0)$ gilt dann

$$\frac{f(p_0+tv) - f(p_0)}{t} = \frac{f(tv)}{t} = \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t(t^2 v_1^2 + t^4 v_2^4)} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t v_2^4}$$

$$\overset{t \to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{v_2^2}{v_1}, & v_1 \neq 0 \\ 0, & v_1 = 0 \end{cases}$$

D.h. $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$.

Höhere partielle Ableitungen

Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$.

(i) *Für $k \geq 2$ definiert man rekursiv:*
f heißt k-mal partiell differenzierbar, wenn f partiell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen $\partial_i f$ (k-1)-mal partiell differenzierbar sind.

(f heißt einmal partiell differenzierbar, wenn f partiell differenzierbar ist.)

(ii) *f heißt k-mal stetig differenzierbar, wenn f k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \cdots \partial x^{i_k}} := \partial_{i_1} \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k} f$$

der Ordnung k stetig sind.

Lemma von Schwarz

Satz (Hermann Amandus Schwarz)

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen) zweimal stetig differenzierbar.

Dann gilt für alle $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f .$$

Beweis. Da es nur um zwei Koordinatenrichtungen e_i und e_j geht, können wir annehmen, dass $n = 2$.

Wir berechnen die zweiten partiellen Ableitungen an der Stelle $(x_0, y_0) \in U$.

Wir können annehmen, dass $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und dass U ein Quadrat $Q = \{(x, y)| \, |x| < \varepsilon \text{ und } |y| < \varepsilon\}$ enthält ($\varepsilon > 0$).

Weiter im Beweis:

Nach dem Mittelwertsatz angewendet auf die Funktion $g(x) = f(x, y) - f(x, 0)$ gibt es zu $(x, y) \in Q$ ein $\xi \in (-|x|, |x|)$ mit

$$(1) \quad g(x) - g(0) = xg'(\xi) = x(\partial_1 f(\xi, y) - \partial_1 f(\xi, 0)).$$

Anwendung des MWS auf $y \mapsto \partial_1 f(\xi, y)$ liefert $\eta \in (-|y|, |y|)$ mit

$$(2) \quad \partial_1 f(\xi, y) - \partial_1 f(\xi, 0) = y\partial_2\partial_1 f(\xi, \eta).$$

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$(3) \quad g(x) - g(0) = xy\partial_2\partial_1 f(\xi, \eta).$$

Analog ergibt sich mit $h(y) = f(x, y) - f(0, y)$

$$(3') \qquad h(y) - h(0) = xy\partial_1\partial_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}),$$

wobei $|\tilde{\xi}| < |x|$ und $|\tilde{\eta}| < |y|$.

Weiter im Beweis:
Aus (3) und (3') erhalten wir wg. $g(x) - g(0) = h(y) - h(0)$:

$$(4) \quad \partial_2\partial_1 f(\xi,\eta) = \partial_1\partial_2 f(\tilde{\xi},\tilde{\eta}).$$

Die Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen erlaubt nun den Grenzübergang $(x,y) \to (0,0)$ in (4), woraus sich $\partial_2\partial_1 f(0,0) = \partial_1\partial_2 f(0,0)$ ergibt. $\square$

Der Gradient einer Funktion

Definition (Gradient)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x \in U$ partiell differenzierbar. Der Spaltenvektor

$$\operatorname{grad} f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \partial_2 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix}$$

heißt Gradient von f an der Stelle x.

Bemerkung

Aus den Rechenregeln für die Richtungsableitungen erhält man auch Rechenregeln für den Gradienten. Z. B. ist grad additiv und für zwei in x partiell differenzierbare Funktionen gilt:

$$\operatorname{grad}(f \cdot g)(x) \;=\; f(x) \cdot (\operatorname{grad} g)(x) + g(x) \cdot (\operatorname{grad} f)(x).$$

Beispiel

Sei $r = r(x) = \|x\|$ die Euklidische Norm von $x \in \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

Dann ist die rotationssymmetrische Funktion $F(x) = f(r) = f(r(x))$ auf $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ partiell differenzierbar.

Die partiellen Ableitungen erhält man mittels der Kettenregel:

$$\partial_i F(r) = f'(r)\partial_i r$$
$$\partial_i r = \partial_i \sqrt{r^2} = \frac{\partial_i r^2}{2r} = \frac{x^i}{r}.$$

Der Gradient ist daher $\mathrm{grad} r(x) = \frac{x}{r}$ und somit

$$\mathrm{grad}\, F(x) = f'(r) \mathrm{grad}\, r(x) = f'(r)\frac{x}{r},$$

Divergenz eines Vektorfeldes

Definition (Divergenz)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(i) *Eine Abbildung $f = \sum_{i=1}^m f^i e_i : U \to \mathbb{R}^m$ heißt (in x) partiell differenzierbar, wenn Ihre Komponentenfunktionen f^i, $i = 1, 2, \dots m$, (in x) partiell differenzierbar sind.*

(ii) *Ein Vektorfeld auf $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $v : U \to \mathbb{R}^n$.*

(iii) *Die Divergenz eines in $x \in U$ partiell differenzierbaren Vektorfeldes $v = \sum_{i=1} v^i e_i : U \to \mathbb{R}^n$ ist die Zahl*

$$\mathrm{div}\, v(x) := \sum_{i=1}^n \partial_i v^i(x).$$

Leibnizregel für die Divergenz

Satz

Sei v ein in x partiell differenzierbares Vektorfeld und f eine in x partiell differenzierbare Funktion. Dann ist $f \cdot v$ ein in x partiell differenzierbares Vektorfeld und es gilt

$$\operatorname{div}(fv)(x) \;=\; \langle \operatorname{grad} f(x), v(x) \rangle + f(x) \cdot \operatorname{div} v(x)$$

Beweis. Der Beweis ergibt sich aus der Leibnizregel für Richtungsableitungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f \cdot v)(x) &= \sum_{i=1}^{n} \partial_i (f \cdot v^i)(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\partial_i f(x) \cdot v^i(x) + f(x) \cdot \partial_i v^i(x) \right) \\ &= \langle \operatorname{grad} f(x), v(x) \rangle + f(x) \cdot \operatorname{div} v(x). \end{aligned}$$

□

Der Laplace Operator

Definition (Laplace Operator)

Der Gradient einer zweimal partiell differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ *ist ein partiell differenzierbares Vektorfeld* $\operatorname{grad} f : U \to \mathbb{R}^n$.

Somit definiert

$$\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f$$

eine Funktion $U \to \mathbb{R}$.

- *Der Differentialoperator* Δ *heißt Laplace-Operator.*
- *Die partielle Differentialgleichung*

$$\Delta f = 0$$

  heißt Potentialgleichung oder Laplace-Gleichung.
- *Die Lösungen dieser Gleichung heißen harmonische Funktionen.*

Leibnizregel für den Laplace Operator

Aus der Leibnizregel für div und grad erhalten wir eine Leibnizregel für den Laplace-Operator.

Satz

Seien f und g zwei zweimal partiell differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\Delta(f \cdot g) \;=\; f \cdot \Delta g + g \cdot \Delta f + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle.$$

Beispiel: Rotationssymmetrische Potentiale

Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion, $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ die Norm von x, d.h. $r(x) := \sqrt{\sum_{i=1}^n x^2}$ und $F(x) = f(r(x))$ die zugehörige rotationssymmetrische zweimal partiell differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Dann gilt $\partial_i F(x) = f'(r)\frac{x^i}{r}$ und

$$\partial_j \partial_i F(x) \; = \; f''(r)\frac{x^j x^i}{r^2} + f'(r)\frac{\delta^{ij} r - \frac{x^i x^j}{r}}{r^2} \; = \; f''(r)\frac{x^j x^i}{r^2} + f'(r)\left(\frac{\delta^{ij}}{r} - \frac{x^i x^j}{r^3}\right)$$

Daraus folgt

$$\Delta F(x) = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r).$$

Jede Lösung der Differentialgleichung $f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = 0$ definiert somit eine rotationssymmetrische harmonische Funktion.

Für $n = 1$ erhalten wir $f(r) = ar + b$ als Lösung.

Für $n \geq 2$ setzten wir $h(r) := f'(r)$ und erhalten die Gleichung

$$h'(r) = -\frac{n-1}{r}h(r).$$

Unter der Voraussetzung, dass $h(r) := f'(r)$ keine Nullstellen hat, können wir die DGL an f für $n \geq 2$ wie folgt umformen:

$$\frac{n-1}{r} \;=\; -\frac{h'(r)}{h(r)} \;=\; -(\ln|h(r)|)'$$

Dies impliziert $\ln|h(r)| = -(n-1)\ln r + c$ und exponieren ergibt als Lösung

$$|h(r)| \;=\; \frac{e^c}{r^{n-1}}.$$

Somit ist $f(r) = \frac{a}{r^{n-2}} + b$ falls $n > 2$ und $f(r) = a\ln r + b$ für $n = 2$.

Für $n = 3$ erhalten wir mit $b = 0$ das Newtonsche Gravitationspotential $-\frac{GM}{r}$ einer im Nullpunkt konzentrierten Masse M. (Hierbei ist $G > 0$ die Gravitationskonstante.)

Das elektrische Potential einer Punktladung Q ist ebenfalls von der Form $\frac{a}{r}$, wobei $a = kQ$ und $k > 0$ eine Naturkonstante ist.

Das Newtonsche Gravitationsfeld

Jede partiell differenzierbare Funktion $V : U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ definiert ein Vektorfeld $-\operatorname{grad} V$.

Für das Newtonpotential $V(r) = -\frac{GM}{r}$ erhalten wir

$$-\operatorname{grad} V = -\frac{GM}{r^2}\frac{x}{r}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

das Newtonsche Gravitationsfeld.

Die auf eine Probemasse m im Punkt x wirkende Kraft ist

$$F = -m \operatorname{grad} V = -\frac{GmM}{r^2}\frac{x}{r}.$$

Nach dem Newtonschen Gesetz $F = m\ddot{x}$ genügt die Bewegung der Probemasse $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^3$ der
(von $m \neq 0$ unabhängigen!) Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -GM\frac{x}{r^3}.$$

Das elektrostatische Feld

Für das elektrische Potential $V(r) = \frac{kQ}{r}$ ergibt sich entsprechend

$$E = -\mathrm{grad}\, V = \frac{kQ}{r^2}\frac{x}{r}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

als elektrisches Feld.

Die auf eine Probeladung q im Punkt x wirkende Kraft ist

$$F = qE = \frac{kqQ}{r^2}\frac{x}{r}.$$

Die elektrische Kraft ist also abstoßend, wenn $qQ > 0$ und anziehend wenn $qQ < 0$.

Die Bewegung einer Probeladung $t \mapsto x(t)$ der Masse m genügt der Differentialgleichung $F = m\ddot{x}$, d.h. $\ddot{x} = \frac{kqQx}{mr^3}$ $(m \neq 0)$.

Das Vektorprodukt

Definition (Vektorprodukt/Kreuzprodukt)

Das Vektorprodukt (oder Kreuzprodukt) von $x = \sum_{i=1}^{3} x^i e_i \in \mathbb{R}^3$ *und* $y = \sum_{i=1}^{3} y^i e_i \in \mathbb{R}^3$ *ist der Vektor*

$$\begin{aligned} x \times y \;&:=\; \begin{pmatrix} x^2y^3 - x^3y^2 \\ x^3y^1 - x^1y^3 \\ x^1y^2 - x^2y^1 \end{pmatrix} \\ &= \;(x^2y^3 - x^3y^2)e_1 + (x^3y^1 - x^1y^3)e_2 + (x^1y^2 - x^2y^1)e_3. \end{aligned}$$

Es gilt

Die durch das Kreuzprodukt definierte Abbildung

$$\times \;:\; \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \;\to\; \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \;\mapsto\; x \times y$$

ist bilinear und schiefsymmetrisch.

Satz (Eigenschaften des Vektorprodukts)

Sei der $\mathbb{R}^3$ versehen mit der durch die Basis (e_1, e_2, e_3) gegebenen Orientierung. Für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt dann:

(i) $x \times y = -y \times x$.

(ii) $x \times y$ *ist senkrecht zu* x *und* y.

(iii) $\|x \times y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2$.

(iv) $\|x \times y\| = \|x\| \cdot \|y\| \sin \varphi$, *wenn* $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ *und* $\varphi = \angle(x, y) \in [0, \pi]$.

(v) $x \times y = 0 \Longleftrightarrow x$ *und* y *linear abhängig.*

(vi) *Sind* x *und* y *linear unabhängig, so ist* $(x, y, x \times y)$ *eine positiv orientierte Basis.*

(vii) *Sind* x *und* y *orthonormal, so ist* $(x, y, x \times y)$ *eine positiv orientierte Orthonormalbasis.*

Beweis. Übungsaufgabe □

Spatprodukt

Satz

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ *gilt:* $\langle x \times y, z\rangle = \det(xyz)$.

Beweis. Wegen der Trilinearität von $\langle x \times y, z\rangle$ und *det* genügt es, die Gleichung für $x, y, z \in \{e_1, e_2, e_3\}$ zu überprüfen.

Offenbar ist $\langle e_i \times e_j, e_k\rangle = 0 = \det(e_i e_j e_k)$, wenn zwei der drei Indizes übereinstimmen.

Sei (i, j, k) eine Permutation von $(1, 2, 3)$. Da (e_i, e_j) orthonormal ist, gilt $e_i \times e_j = \varepsilon_{ijk} e_k$, wobei ε_{ijk} das Vorzeichen der Permutation ist.

Also $\langle e_i \times e_j, e_k\rangle = \varepsilon_{ijk} = \det(e_i e_j e_k)$ für jede Permutation. □

Bemerkung

Die alternierende Trilinearform $(x, y, z) \mapsto \langle x \times y, z\rangle$ heißt Spatprodukt.

$|\langle x \times y, z\rangle|$ ist das Volumen[a] des durch x, y, z aufgespannten Parallelepipeds oder Spats $P = \{ax + by + cz | a, b, c \in [0, 1]\}$.

[a] Berechnung von Volumina wird in der Vorlesung Mathem. für Phys. III behandelt

Definition

Sei $v = \sum_{i=1}^{3} v^i e_i$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$.

Das Vektorfeld

$$\mathrm{rot}\, v := \begin{pmatrix} \partial_2 v^3 - \partial_3 v^2 \\ \partial_3 v^1 - \partial_1 v^3 \\ \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1 \end{pmatrix}$$

heißt Rotation von v.

Bemerkung

Wir können den Gradienten als vektorwertigen Differentialoperator auffassen:

$$\operatorname{grad} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} : \{ f : U \to \mathbb{R} \mid \text{ part. diffb. } \} \;\; \to \;\; \textit{Vektorfelder}$$

$$f \;\; \mapsto \;\; \operatorname{grad}(f) = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich formal ($\operatorname{grad} \notin \mathbb{R}^3$!):

$$\operatorname{div} v = \langle \operatorname{grad}, v \rangle, \quad \operatorname{rot} v = \operatorname{grad} \times v.$$

Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$, $v : U \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0 \quad \textit{und} \quad \operatorname{div}\operatorname{rot} v = 0.$$

Beweis. Folgt formal aus

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\operatorname{grad} f &= \operatorname{grad} \times \operatorname{grad} f = 0 \\
\operatorname{div}\operatorname{rot} v &= \langle \operatorname{grad}, \operatorname{grad} \times v \rangle = 0,
\end{aligned}$$

und ist ansonsten eine direkte Rechnung, die das Lemma von Schwarz benutzt (Übungsaufgabe). □

Differenzierbarkeit

Definition (Differenzierbarkeit)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^m$.

(i) *F heißt im Punkt $x \in U$ (total) differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass*

$$\lim_{\xi \in \mathbb{R}^n,\ \xi \to 0} \frac{\|F(x+\xi) - F(x) - A(\xi)\|}{\|\xi\|} = 0 \tag{4}$$

(iii) *$F : U \to \mathbb{R}^m$ heißt differenzierbar, wenn F in allen Punkten $x \in U$ differenzierbar ist.*

Satz (Differential)

Sei $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in x. Dann ist die durch (4) bestimmte lineare Abbildung eindeutig bestimmt.
Die lineare Abbildung $dF_x := A$ heißt dann Differential (oder Ableitung) von F im Punkt x.

Beweis der Eindeutigkeit von A:
Seien A und B zwei lineare Abbildungen, die (4) erfüllen.
Mit der Dreiecksungleichung der Norm erhält man

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\xi\to 0} \frac{\|A(\xi)-B(\xi)\|}{\|\xi\|} \\ &\leq \lim_{\xi\to 0} \frac{\|F(x+h)-F(x)-A(\xi)\|}{\|\xi\|} + \lim_{\xi\to 0} \frac{\|-F(x+h)+F(x)+B(\xi)\|}{\|\xi\|} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Setzt man nun $\xi = t\eta$ mit $\|\eta\| = 1$ so erhält man daraus wegen der Linearität von A und B, daß

$$0 = \lim_{\xi\to 0} \frac{A(\xi)-B(\xi)}{\|\xi\|} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{|t|}(A(\eta)-B(\eta)) = A(\eta)-B(\eta),$$

und damit $A = B$. □

Beispiel

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2$, ist überall differenzierbar, denn wegen

$$f(x+\xi) = \; f(x) + 2\langle x, \xi\rangle + f(\xi) \; = \; \|x\|^2 + 2\langle x, \xi\rangle + \|\xi\|^2$$

gilt

$$\frac{f(x+\xi) - f(x) - 2\langle x, \xi\rangle}{\|\xi\|} = \frac{\|\xi\|^2}{\|\xi\|} = \|\xi\| \to_{\xi \to 0} 0.$$

Das ist das Differential $df_x \in (\mathbb{R}^n)^*$ gegeben durch:

$$df_x(\xi) = 2\langle x, \xi\rangle = 2x^t\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Also $df_x = 2x^t$ (Zeilenvektor).

Jacobi-Matrix (Matrix der Ableitungen)

Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F = \sum_{j=1}^m F^j e_j : U \to \mathbb{R}^m$ in x differenzierbar. Dann existiert für alle F^j die Richtungsableitung $\partial_v F^j(x)$ in jede Richtung v und es gilt

$$\partial_v F^j(x) = dF^j_x(v).$$

Insbesondere sind alle F^j in x partiell differenzierbar, d.h. F ist in x partiell differenzierbar. Weiterhin gilt:

$$dF_x = \begin{pmatrix} \partial_1 F^1(x) & \cdots & \partial_n F^1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 F^m(x) & \cdots & \partial_n F^m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathrm{grad} F^1(x))^t \\ \vdots \\ (\mathrm{grad} F^m(x))^t \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix heißt auch Jacobi-Matrix

Beweis: Sei $v \in \mathbb{R}^n$ und $F = \sum_{j=1}^n F^j e_j$.
Da F differenzierbar ist, sind alle Komponentenfunktionen F^j differenzierbar. D.h. es gilt für jede Komponente F^j

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t\to 0} \frac{|F^j(x+tv) - F^j(x) - dF^j_x(tv)|}{|t|\|v\|} \\ &= \lim_{t\to 0} \left| \frac{F^j(x+tv) - F^j(x)}{t} - dF^j_x(v) \right|, \end{aligned}$$

d.h. $dF^j_x(v) = \frac{d}{dt}|_{t=0} F^j(x+tv) = \partial_v F^j(x)$.
Damit erhält man für $v = e_i$ die i-te partielle Ableitung $\partial_i F^j(x) = dF^j(e_i)$.
Dies gilt für jede Komponente F^j und somit

$$dF_x(e_i) = \begin{pmatrix} \partial_i F^1(x) \\ \vdots \\ \partial_i F^m(x) \end{pmatrix} = i\text{-te Spalte von } dF_x.$$

Dies beweist die Formel für die Ableitungsmatrix. $\square$

Folgerung

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann existiert für alle $v \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung $\partial_v f(x)$ und es gilt

$$\partial_v f(x) = df_x v = \langle \mathrm{grad}\, f(x), v \rangle.$$

Die Jacobimatrix von f ist gegeben durch

$$df = (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f) = (\mathrm{grad}\, f)^t \quad : \quad \begin{aligned} U &\to (\mathbb{R}^n)^*, \\ x &\mapsto df_x. \end{aligned}$$

Beispiel

Für die Koordinatenfunktionen $f(x) = x^j$ haben wir $\mathrm{grad}(x^j) = e_j$ und somit $dx^j = e^j = e_j^t$. Man schreibt daher für jede differenzierbare Funktion f auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ auch

$$df = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f \; dx^i.$$

Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit

Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F = \sum_{j=1}^m F^j e_j : U \to \mathbb{R}^m$ in x differenzierbar. Dann ist F ist in x stetig.

Beweis. Sei $x_n := x + \xi_n$ mit $\xi_n \to 0$ eine Folge, die gegen x konvergiert. Dann ist wegen der Dreiecksungleichung

$$\|F(x_n) - F(x)\| \leq \underbrace{\frac{\|F(x_n) - F(x) - dF_x(\xi_n)\|}{\|\xi_n\|}}_{\to 0,\text{ wg. } f \text{ diffb.}} \underbrace{\|\xi_n\|}_{\to 0} + \|dF_x(\xi_n)\|.$$

Nun ist aber $dF_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linear und damit stetig, d.h. auch $\|dF_x(\xi_n)\| \to_{\xi_n \to 0} 0$. Also $\|F(x_n) - F(x)\| \to 0$. □

Hinreichendes Kriterium für Differenzierbarkeit

Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F = \sum_{j=1}^m F^j e_j : U \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar und alle partiellen Ableitungen $\partial_i F^j$ seien an der Stelle $x \in U$ stetig.
Dann ist F in x differenzierbar.

Beweis. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $m = 1$.
Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon(x) \subset U$ und $\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i \in B_\varepsilon(0)$.
Für $i = 1, \ldots, n$ betrachten wir die Funktionen

$$\begin{aligned} g_1(t) &:= F(x^1 + t, x^2, \ldots, x^n) \\ &\vdots \\ g_i(t) &:= F(x^1 + \xi^1, \ldots, x^{i-1} + \xi^{i-1}, x^i + t, x^{i+1}, \ldots x^n) \\ &\vdots \\ g_n(t) &:= F(x^1 + \xi^1, \ldots, x^{n-1} + \xi^{n-1}, x^n + t) \end{aligned}$$

Dann gilt

$$g_i'(0) = \partial_i F(x^1 + \xi^1, \ldots, x^{i-1} + \xi^{i-1}, x^i, \ldots, x^n)$$

Weiter im Beweis:
Auf diese Funktionen wenden wir nun den MWS an und erhalten für $i = 1 \dots n$ Zahlen $\theta^i \in (-|\xi^i|, \xi^i)$ mit

$$F(x^1+\xi^1,\dots,x^i+\xi^i,x^{i+1},\dots x^n) - F(x^1+\xi^1,\dots,x^{i-1}+\xi^{i-1},x^i,\dots x^n)$$
$$= \xi^i \partial_i F(x^1+\xi^1,\dots,x^{i-1}+\xi^{i-1},\theta^i,x^{i+1}\dots x^n)$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} y_i &:= (x^1+\xi^1,\dots,x^i+\xi^i,x^{i+1},\dots x^n) \\ z_i &:= (x^1+\xi^1,\dots,x^{i-1}+\xi^{i-1},\theta^i,x^{i+1}\dots x^n), \end{aligned}$$

so erhält man daraus

$$F(x+\xi) - F(x) = \sum_{k=1}^{n} F(y_k) - F(y_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \partial_k F(z_k).$$

Ende des Beweises: Mit Hilfe der CSU ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\frac{|F(x+\xi)-f(\xi)-\sum_{i=1}^n \partial_i F(x)\xi^i|}{\|\xi\|} &= \frac{|\sum_{i=1}^n (\partial_i F(z_i)-\partial_i F(x))\xi^i|}{\|\xi\|} \\ &\leq \|\sum_{i=1}^n (\partial_i F(z_i)-\partial_i F(x))e_i\|\end{aligned}$$

Für $\xi \to 0$ gilt auch $z_i \to x$.
Da nun alle partiellen Ableitungen stetig sind, bekommen wir

$$\partial_i F(z_i) \to_{\xi \to 0} \partial_i F(x),$$

und somit

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{|F(x+\xi)-f(\xi)-\sum_{i=1}^n \partial_i F(x)\xi^i|}{\|\xi\|} = 0.$$

Damit ist F differenzierbar. □

Satz

Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, die in x differenzierbar ist. Dann gilt:

- *Ist $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in x differenzierbar, so auch $F + G$ und es gilt*

$$d(F+G)_x = dF_x + dG_x$$

- *Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist λF in x differenzierbar und es gilt*

$$d(\lambda F)_x = \lambda dF_x$$

- *Ist $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar, so auch $h \cdot F$ und es gilt*

$$d(h \cdot F)_x = F(x) \cdot dh_x + h(x) dF_x .$$

- *Ist $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar und $g(x) \neq 0$, so ist $\frac{1}{g}F$ in x differenzierbar, und es gilt:*

$$d\left(\frac{1}{g}F\right)_x = \frac{1}{g(x)^2}\left(g(x)dF_x - F(x) \cdot dg_x\right).$$

Satz (Kettenregel)

Seien $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^m$, $F(U) \subset V$ und $G : V \to \mathbb{R}^k$. Wenn F in x und G in $y = F(x)$ differenzierbar sind, dann ist $G \circ F : U \to \mathbb{R}^k$ in x differenzierbar und

$$d(G \circ F)_x = dG_y \circ dF_x.$$

Beweis. Für $x \in U$, $y = F(x) \in V$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $\eta \in \mathbb{R}^M$ definieren wir

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &:= F(x+\xi) - F(x) - A\xi, \quad \text{wobei } A = dF_x, \\ \psi(\eta) &:= G(y+\eta) - G(y) - B\eta, \quad \text{wobei } B = dG_y, \end{aligned}$$

Dann gilt wegen der Differenzierbarkeit von F und G, daß

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = \lim_{\eta \to 0} \frac{\psi(\eta)}{\|\eta\|} = 0.$$

Weiter im Beweis:

Für das spezielle $\eta = F(x+\xi) - y = A\xi + \varphi(\xi)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} (G \circ F)(x+\xi) - (G \circ F)(x) &= G(y+\eta) - G(y) \\ &= B\eta + \psi(\eta) \\ &= BA\xi + B\varphi(\xi) + \psi(\eta) \end{aligned}$$

D.h.

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\|(G \circ F)(x+\xi) - (G \circ F)(x) - BA\xi\|}{\|\xi\|} \leq \lim_{\xi \to 0} \frac{\|B\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|} + \lim_{\xi \to 0} \frac{\|\psi(\eta)\|}{\|\xi\|},$$

Nun ist aber wegen der Linearität von B

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\|B\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|} = \lim_{\xi \to 0} \|B\Big(\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|}\Big)\| \leq \|B\|_{Op.-Norm} \lim_{\xi \to 0} \frac{\|\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|} = 0.$$

Also genügt es, zu zeigen, dass $\lim_{\xi \to 0} \frac{\psi(\eta)}{\|\xi\|} = 0$.

Ende des Beweises: Dazu bemerkt man, daß $\eta \to 0$ falls $\xi \to 0$, denn wegen der Dreiecksungleichung ist

$$\|\eta\| \;=\; \|A\xi + \varphi(\xi)\| \;\leq\; \|A\xi\| + \|\varphi(\xi)\| \;\to_{\xi\to 0}\; 0.$$

Somit ist $\frac{\|\psi(\eta)\|}{\|\eta\|} \to_{\xi\to 0} 0$. Aus der der Differenzierbarkeit von G und der Dreiecksungleichung folgt dann:

$$\begin{aligned}\frac{\|\psi(\eta)\|}{\|\xi\|} \;&=\; \frac{\|\psi(\eta)\|}{\|\eta\|}\frac{\|\eta\|}{\|\xi\|} \;=\; \frac{\|\psi(\eta)\|}{\|\eta\|}\frac{\|A\xi + \varphi(\xi)\|}{\|\xi\|} \\ &\leq\; \underbrace{\frac{\|\psi(\eta)\|}{\|\eta\|}}_{\to_{\xi\to 0}0}\left(\frac{\|A\xi\|}{\|\xi\|} + \underbrace{\frac{\|\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|}}_{\to_{\xi\to 0}0}\right) \;\to_{\xi\to 0}\; 0,\end{aligned}$$

denn wieder gilt, diesmal wegen der Linearität von A, daß $\frac{\|A\xi\|}{\|\xi\|} \to_{\xi\to 0} 0$. $\square$

Folgerung (Kettenregel in Komponenten)

Seien $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^m$, $F(U) \subset V$ und $G : V \to \mathbb{R}$. Desweitern sei F in x und G in $y = F(x)$ differenzierbar. Dann ist $G \circ F : U \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar und

$$\partial_i (G \circ F)(x) = \sum_{k=1}^{m} \partial_k G(y) \partial_i F^k(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

bzw. in Komponenten

$$\partial_i \left((G \circ F)^j \right)(x) = \sum_{k=1}^{m} \partial_k G^j(y) \partial_i F^k(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

Beispiele

In den folgenden Beispielen betrachten wir Abbildungen des Vektorraumes der $n \times n$-Matrizen $Mat_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$.

(i) Sei $F : Mat_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(A) = \det(A)$. Dann gilt für das Differential in $\mathbf{1}_n$

$$dF_{\mathbf{1}_n}(A) = d\ \det_{\mathbf{1}_n}(A) = spur(A).$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} dF_{\mathbf{1}_n}(A) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left[\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)(\delta_1^{\sigma(1)} + ta_1^{\sigma(1)}) \cdot \ldots \cdot (\delta_n^{\sigma(n)} + ta_n^{\sigma(n)})\right] \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left[(1 + ta_1^1) \cdot \ldots \cdot (1 + ta_n^n)\right] \\ &= a_1^1 + \ldots + a_n^n \end{aligned}$$

Beispiele

(ii) Nun sei $F : Mat_n(\mathbb{R}) \to Mat_n(\mathbb{R})$ gegeben durch $F(A) = A^2$ und $G : Mat_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch $G(A) = \mathrm{spur} A$.
F und G sind auf $Mat_n(\mathbb{R})$ differenzierbar mit

$$dF_A B = \frac{d}{dt}|_{t=0} \left[(A + tB)^2\right] = AB + BA,$$

und

$$dG_A B = \frac{d}{dt}|_{t=0} \left[\mathrm{spur}(A + tB)\right] = \mathrm{spur} B,$$

für $A, B \in Mat_n, (\mathbb{R})$.
Somit ist $G \circ F : A \mapsto \mathrm{spur}(A^2)$ differenzierbar und

$$d(G \circ F)_A B = dG_{F(A)} \circ dF_A B = \mathrm{spur}(AB + BA) = 2\mathrm{spur}(AB).$$

Beispiel

Sei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ ($\varepsilon > 0$) eine im Nullpunkt differenzierbare Kurve, $c(0) = x$, $c'(0) = v \in \mathbb{R}^n$.
Ferner sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine in einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von x definierte und in x differenzierbare Funktion.
Dann gilt für die Ableitung der Funktion $f \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$:

$$(f \circ c)'(0) = df_{c(0)}(c'(0)) = df_x(v) = \partial_v f(x).$$

D.h.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f(c(t))) \;=\; \partial_v f(x) \;=\; \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f(x+tv)).$$

Mittelwertsatz

Satz (Mittelwertsatz für Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.
Seien weiterhin $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$, so daß $x + t\xi \in U$, für alle $t \in [0,1]$.
Dann existiert ein $x_0 = x + t_0\xi \in U$ mit $t_0 \in (0,1)$, so daß

$$F(x+\xi) - F(x) = dF_{x_0}(\xi).$$

Beweis. Der Beweis beruht auf dem MMS für Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.
Sei $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto x + t\xi$ und $f = F \circ \varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$.
Nach dem MWS für f erhalten wir ein $t_0 \in (0,1)$ mit $f(1) - f(0) = f'(t_0)$.
Aus der Kettenregel ergibt sich dann

$$f(1) - f(0) = f'(t_0) \;=\; (F \circ \varphi)'(t_0) \;=\; dF_{x+t_0\xi}(\varphi'(t_0))$$

Für $\varphi(t) = x + t\xi$ ist $\varphi' \equiv \xi$ und damit $F(x+\xi) - F(x) = dF_{x_0}(\xi)$. $\square$

Ist eine Abbildung $F : U \to \mathbb{R}^m$ konstant, so ist $dF_x = 0$ für alle $x \in U$. Für bestimmte U erhält man aus dem MWS auch die Umkehrung.

Folgerung

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend, d.h. für zwei beliebige Punkte $x, y \in U$ gibt es eine stetige Kurve $c : [0,1] \to U$ mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$.
Sei $F : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar mit $dF_x = 0\ \forall\ x \in U$. Dann ist F konstant.

Beweis. Sei $x \in U$ und $\varepsilon > 0$ so daß $K_x := \overline{B_\varepsilon(x)} \subset U$. Nach dem MWS ist F auf K_x konstant, d.h. $F|_{K_x} \equiv d$.
Sei nun $y \in U$ und c eine stetige Kurve von x nach y. Deren Bild wird überdeckt durch das Mengensystem $\{B_\varepsilon(c(t))\}_{t\in[0,1]}$.
Da nun $[0,1]$ kompakt ist und c stetig, ist auch $c([0,1])$ kompakt. Daher finden wir eine endliche Teilüberdeckung durch offene Bälle $B_\varepsilon(c(t_i))$ für $i = 1, \ldots k$ und $t_1 = 0$, $t_k = 1$. Damit ist aber $F|_{B_\varepsilon(x)} \equiv d \equiv F|_{B_\varepsilon(c(t_i))}$, d.h. $F(y) = F(c(t_k)) = \ldots = F(c(t_1)) = F(x)$. $\square$

Niveaumengen und Gradient

Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.
Dann steht $\operatorname{grad} f$ senkrecht auf den Niveaumengen

$$N_f(k) := \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = k\},$$

d.h. für jede in $N_f(k)$ verlaufende differenzierbare Kurve $c : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ gilt

$$\operatorname{grad} f|_{c(t)} \perp c'(t) \quad \text{für alle} \quad t \in (a,b).$$

Beweis. Das folgt durch Ableiten der Gleichung $f \circ c = k$:

$$0 = df_c \circ c' = \langle \operatorname{grad} f, c' \rangle.$$

□

Beispiel

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Norm, $f(x) = \|x\|$. Die Niveaumengen sind dann Kugeln vom Radius k und der Gradient ist $\mathrm{grad} f(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

Bemerkung

Wenn $\mathrm{grad}\, f(x) \neq 0$ ist, so gibt der Gradient die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion f im Punkt $x \in U$ an, denn für jeden Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^n$ gilt wegen der CSU

$$\partial_v f(x) = \langle \mathrm{grad}\, f(x), v \rangle \leq \|\mathrm{grad}\, f(x)\|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $v = \frac{\mathrm{grad}\, f(x)}{\|\mathrm{grad}\, f(x)\|}$.

Lokale Extrema

Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ *eine Funktion und* $x \in U$.

Man sagt, dass f *in* x *ein lokales Maximum (bzw. ein lokales Minimum) annimmt, falls es* $\varepsilon > 0$ *gibt, derart dass*

$$f(x) \geq f(\xi) \quad (\text{bzw.} \quad f(x) \leq f(\xi))$$

für alle $\xi \in U$ *mit* $\|x - \xi\| < \varepsilon$.

Lokale Minima und Maxima heißen auch lokale Extrema.

Man spricht von einem isolierten lokalen Extremum, falls zusätzlich $f(\xi) \neq f(x)$ *für alle* $\xi \in U \setminus \{x\}$ *mit* $\|x - \xi\| < \varepsilon$.

Lokale Extrema und Gradient

Satz

$f : U \to \mathbb{R}$ sei an der Stelle $x \in U$ partiell differenzierbar ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen).
Wenn f an der Stelle $x \in U$ ein lokales Extremum annimmt, dann gilt $\operatorname{grad} f(x) = 0$.

Beweis. Für alle $i = 1, \dots, n$ ist die Funktion $t \mapsto g(t) := f(x + te_i)$ im Nullpunkt differenzierbar und hat dort ein lokales Extremum.

Demnach gilt

$$0 = g'(0) = \partial_i f(x).$$

$\square$

Taylorentwicklung

Satz (Taylorentwicklung für Funktionen einer Variablen)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(m+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f(x+\xi) = f(x) + f'(x)\xi + \frac{1}{2}f''(x)\xi^2 + \cdots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(x)\xi^m + R_{m+1}(x,\xi),$$

$$\text{wobei} \qquad R_{m+1}(x,\xi) = \frac{\xi^{m+1}}{m!}\int_0^1 (1-t)^m f^{(m+1)}(x+t\xi)dt,$$

für alle $x, \xi \in \mathbb{R}$, so dass $\{x+t\xi | t \in [0,1]\} \subset I$.

Beweis (durch Induktion nach m)

Der Fall $m = 0$ ist der Fundamentalsatz der Differenzial- und Integralrechnung:

$$f(x+\xi) - f(x) = \int_x^{x+\xi} f'(s)ds = \xi \int_0^1 f'(x+t\xi)dt = R_1(x,\xi).$$

Weiter im Beweis: Induktionschritt

Wir gehen aus von:

$$R_m(x,\xi) = \frac{\xi^m}{(m-1)!}\int_0^1 (1-t)^{m-1} f^{(m)}(x+t\xi)dt.$$

Partielle Integration ergibt

$$\int_0^1 (1-t)^{m-1} f^{(m)}(x+t\xi)dt =$$

$$-\frac{1}{m}(1-t)^m f^{(m)}(x+t\xi)\Big|_0^1 + \frac{\xi}{m}\int_0^1 (1-t)^m f^{(m+1)}(x+t\xi)\xi dt.$$

und somit

$$R_m(x,\xi) = \frac{\xi^m}{m!} f^{(m)}(x) + \frac{\xi^{m+1}}{m!}\int_0^1 (1-t)^m f^{(m+1)}(x+t\xi)dt.$$

□

Restglied der Taylorentwicklung

Satz (Restglied)

Unter den Voraussetzungen des letzten Satzes existiert $\tau \in [0,1]$ mit

$$R_{m+1}(x,\xi) = \frac{\xi^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x+\tau\xi).$$

Beweis. Sei k bzw. K das Minimum bzw. Maximum der stetigen Funktion $t \mapsto f^{(m+1)}(x+t\xi)$ auf dem Intervall $[0,1]$.

Dann gilt mit $\mathcal{I} := \int_0^1 (1-t)^m dt$:

$$k\mathcal{I} \leq \int_0^1 (1-t)^m f^{(m+1)}(x+t\xi)dt \leq K\mathcal{I}.$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert daher $\tau \in [0,1]$ mit

$$\int_0^1 (1-t)^m f^{(m+1)}(x+t\xi)dt = f^{(m+1)}(x+\tau\xi)\mathcal{I}.$$

Weiter im Beweis:

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} R_{m+1}(x,\xi) &= \frac{\xi^{m+1}}{m!}\int_0^1 (1-t)^m f^{(m+1)}(x+t\xi)dt \\ &= \frac{\xi^{m+1}}{m!} f^{(m+1)}(x+\tau\xi)\mathcal{I} \\ &= \frac{\xi^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x+\tau\xi), \end{aligned}$$

denn

$$\mathcal{I} = \int_0^1 (1-t)^m dt = -\frac{(1-t)^{m+1}}{m+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{m+1}.$$

□

Notation: Multiindizes

Um die Taylorentwicklung für Funktionen von mehreren Veränderlichen kompakt schreiben zu können, führen wir die folgenden Abkürzungen ein.

Für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ und $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$\begin{aligned}
\alpha &:= (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \\
|\alpha| &:= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \\
\alpha! &:= \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n! \\
x^\alpha &:= (x^1)^{\alpha_1} (x^2)^{\alpha_2} \cdots (x^n)^{\alpha_n} \\
\partial^\alpha &:= \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n}
\end{aligned}$$

Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

$$C^k(U) := \{ f : U \to \mathbb{R} \mid f \textit{ ist k-mal stetig partiell diff.bar } \}$$

heißt Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen.

Taylorentwicklung für Funktionen von n Variablen

Satz (Taylorentwicklung)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine $(m+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$, so dass $\{x + t\xi | t \in [0,1]\} \subset U$.

Dann existiert $\tau \in [0,1]$, so dass

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) \xi^\alpha + \sum_{|\alpha| = m+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x + \tau\xi) \xi^\alpha.$$

Beweis. Wir führen den Satz auf den Fall $n = 1$ zurück.

Dazu betrachten wir die $(m+1)$-mal stetig differenzierbare Hilfsfunktion $t \mapsto g(t) := f(x + t\xi)$.

Nun benutzen wir den folgenden Hilfssatz:

Lemma

Für die partiellen Ableitung der Ordnung $k \leq m+1$ der Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(x + t\xi)$, gilt

$$g^{(k)}(t) = k! \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x + t\xi)\xi^\alpha.$$

Beweis des Satzes: Der Satz folgt nun mit Hilfe des Lemmas aus der Taylorentwicklung von g im Nullpunkt:

$$\begin{aligned} f(x+\xi) = g(1) &= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \frac{1}{(m+1)!} g^{(m+1)}(\tau) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x)\xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x + \tau\xi)\xi^\alpha. \end{aligned}$$

□

Beweis des Lemmas: Wir beweisen das Lemma durch Induktion nach k. Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen. Wir berechnen $g^{(k+1)}(t)$ aus

$$g^{(k)}(t) = k! \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x + t\xi)\xi^\alpha.$$

Mit der Kettenregel erhalten wir:

$$\frac{d}{dt} \partial^\alpha f(x + t\xi) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \partial^\alpha f(x + t\xi)\xi^i$$

und somit

$$g^{(k+1)}(t) = k! \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial_i \partial^\alpha f(x + t\xi)\xi^\alpha \xi^i.$$

Weiter im Beweis: Daraus ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} g^{(k+1)}(t) &= k! \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial_i \partial^\alpha f(x+t\xi)\xi^\alpha \xi^i \\ &= k! \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\beta|=k+1} \frac{\beta_i}{\beta!} \partial^\beta f(x+t\xi)\xi^\beta \\ &= (k+1)! \sum_{|\beta|=k+1} \frac{1}{\beta!} \partial^\beta f(x+t\xi)\xi^\beta, \end{aligned}$$

denn $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = |\beta| = k+1$. □

Damit haben wir das Lemma und somit auch den Satz bewiesen.

Approximation durch das Taylorpolynom

Folgerung

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine m-mal stetig differenzierbare Funktion und $x \in U$.

Dann existiert $\delta > 0$ und $\varphi : B_\delta(x) \to \mathbb{R}$, so dass $B_\delta(x) \subset U$ und

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) \xi^\alpha + \varphi(\xi)$$

für alle $\xi \in B_\delta(0)$, wobei

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^m} = 0.$$

Definition

$\sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) \xi^\alpha$ *ist ein Polynom vom Grad m in den Variablen $\xi^1, \dots, \xi^n$ und heißt m-tes Taylorpolynom.*

Beweis (der Folgerung).

Da U offen ist, existiert $B_\delta(x) \subset U$. Aus der Taylorentwicklung der Ordnung $m-1$ folgt für $\xi \in B_\delta(0)$:

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \le m-1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) \xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x+\tau\xi) \xi^\alpha,$$

mit $\tau \in [0,1]$.

Wir setzen

$$\varphi(\xi) := \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} (\partial^\alpha f(x+\tau\xi) - \partial^\alpha f(x)) \xi^\alpha.$$

Dann gilt $f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \le m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) \xi^\alpha + \varphi(\xi)$ und

$$\lim_{\xi \to 0} \varphi(\xi)/\|\xi\|^m = 0,$$

denn die m-ten partiellen Ableitungen von f sind stetig. $\square$

Beispiel

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $\{x + t\xi | t \in [0,1]\} \subset U$.

Dann gilt

$$f(x+\xi) = \underbrace{f(x) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x)\xi^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i\partial_j f(x)\xi^i\xi^j}_{quadratisches\ \ Taylorpolynom} + \varphi(\xi),$$

wobei $\lim_{\xi\to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^2} = 0$.

Hessematrix

Definition

Die symmetrische Matrix

$$\operatorname{Hess} f(x) := (\partial_i \partial_j f(x))_{i,j=1,\dots,n}$$

heißt *Hessematrix* *von f im Punkt x.*

Nachtrag zum letzen Beispiel:

Mit der Hessematrix lässt sich die obige Gleichung nun indexfrei schreiben:

$$f(x+\xi) = f(x) + \langle \operatorname{grad} f(x), \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \operatorname{Hess} f(x) \xi, \xi \rangle + \varphi(\xi).$$

Definition

(i) *Eine symmetrische Bilinearform α auf einem reellen VR heißt positiv semi-definit, wenn*

$$\alpha(v, v) \geq 0 \quad \text{für alle} \quad v \in V.$$

(ii) *α heißt negativ definit (bzw. negativ semi-definit), wenn $-\alpha$ positiv definit (bzw. positiv semi-definit) ist.*

(iii) *α heißt indefinit, wenn α weder positiv noch negativ semi-definit ist.*

(iv) *Ein symmetrischer Endomorphismus A eines Euklidischen VR heißt positiv definit (bzw. positiv semi-definit, indefinit etc.), wenn die zugehörige symmetrische Bilinearform*

$$\alpha(v, w) = \langle v, Aw \rangle, \quad v, w \in V,$$

positiv definit (bzw. positiv semi-definit, indefinit etc.) ist.

Hessematrix und lokale Extrema

Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $f : U \to \mathbb{R}$ *zweimal stetig differenzierbar.*

(i) *Wenn* f *an der Stelle* $x \in U$ *ein lokales Minimum (bzw. Maximum) hat, dann ist* $\operatorname{grad} f(x) = 0$ *und* $\operatorname{Hess} f(x)$ *ist positiv (bzw. negativ) semi-definit.*

(ii) *Wenn der Gradient von* f *an der Stelle* $x \in U$ *verschwindet und* $\operatorname{Hess} f(x)$ *positiv (bzw. negativ) definit ist, dann hat* f *in* x *ein isoliertes lokales Minimum (bzw. Maximum).*

Beweis.

(i) f habe in x z.B. ein lokales Minimum. Wir wissen bereits, dass $\operatorname{grad} f(x) = 0$ und mit $h(\xi) := \frac{1}{2}\langle \operatorname{Hess} f(x)\xi, \xi\rangle$ gilt

$$f(x) \leq f(x+\xi) = f(x) + h(\xi) + \varphi(\xi).$$

Daraus folgt $0 \leq h(\xi) + \varphi(\xi).$, d.h. $h(\xi) \geq -\varphi(\xi)$ und somit mit $t \in \mathbb{R}^*$:

$$h\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right) = \frac{h(\xi)}{\|\xi\|^2} = \frac{h(t\xi)}{\|t\xi\|^2} \geq -\frac{\varphi(t\xi)}{\|t\xi\|^2} \xrightarrow{t\to 0} 0.$$

Das impliziert $h(y) \geq 0$ für alle Einheitsvektoren y, d.h. $h \geq 0$.

(ii) Sei nun umgekehrt $\operatorname{grad} f(x) = 0$ und $h(\xi) > 0$ für alle $\xi \neq 0$.
Dann ist $m = \min_{\|y\|=1} h(y) > 0$.
Weiterhin findet man zu $0 < \varepsilon < m$ ein $\delta > 0$, so dass $|\varphi(\xi)| < \varepsilon\|\xi\|^2$ für alle $0 \neq \xi \in B_\delta(0)$.
Aus der Taylorentwicklung folgt dann
$f(x+\xi) = f(x) + h(\xi) + \varphi(\xi) > f(x) + m\|\xi\|^2 - \varepsilon\|\xi\|^2 > f(x)$.

□

Umkehrsatz

Definition (Diffeomorphismen)

Seien U und V offene Mengen im $\mathbb{R}^n$. Eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung $f : U \to V$ deren Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar heißt ***Diffeomorphismus*** *zwischen U und V.*

Satz

Sei $f : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Dann ist für alle $x \in U$ die Ableitung df_x invertierbar und es gilt

$$(df^{-1})_{f(x)} \;=\; (df_x)^{-1}.$$

Beweis. Dies folgt aus der Kettenregel:

$$Id_{\mathbb{R}^n} \;=\; d\ Id_x \;=\; d\left(f^{-1} \circ f\right)_x \;=\; df^{-1}_{f(x)} \circ df_x$$

und damit $df^{-1}_{f(x)} = (df_x)^{-1}$. □

Umkehrsatz

Der Umkehrsatz besagt nun, daß lokal auch die Umkehrung gilt, d.h. daß in einer Umgebung von x ein Umkehrabb. existiert, falls df_x invertierbar ist.

Satz (Umkehrsatz)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $p \in U$ so daß die Ableitungsmatrix df_p invertierbar ist. Dann existieren offene Umgebungen $V \subset U$ von p und W von $q := f(p)$, so daß $f|_V : V \to W$ ein Diffeomorphismus ist.

Beispiele

- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ mit $f'(x) \neq 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist: $x > 0 \Longrightarrow W = \mathbb{R}_+$, $V = \mathbb{R}_+$ und $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, und $x < 0 \Longrightarrow W = \mathbb{R}_+$, $V = \mathbb{R}_-$ und $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ besitzt eine stetige Umkehrabbildung (da streng monoton wachsend). Diese ist aber nicht differenzierbar in $y = 0 = f(0)$ da $f'(0) = 0$.

Der Beweis des Umkehrsatzes beruht auf dem Banachschen Fixpunktsatz und den folgenden beiden Sätzen.

Satz (Schrankensatz)

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Sei $K \subset U$ eine kompakte Menge, die konvex ist, d.h. für alle $x, y \in K$ liegt auch die Strecke $\{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\}$ in K. Dann ist f auf K Lipschitzstetig, d.h. es existiert eine Zahl $L \geq 0$, die Lipschitzkonstante, so daß

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

für alle $x, y \in K$. L ist dabei gegeben durch $L = \max_{x\in K} \|df_x\|_{Operatornorm}$.

Beweis. Da K kompakt ist und $x \mapsto df_x$ stetig, existiert

$$L = \max_{x\in K} \|df_x\|_{Op.-norm} = \max_{x\in K} \max_{\xi\in\mathbb{R}^n, \|\xi\|=1} \|df_x(\xi)\|$$

Nach dem MWS existiert dann für $x, y \in K$ ein $t_0 \in [0,1]$, so daß

$$\|f(x) - f(y)\| = \|df_{t_0 x+(1-t_0)y}(y - x)\| \leq L\|y - x\|. \qquad \square$$

Satz

Seien U und V offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to V$ stetig differenzierbar und bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung $f^{-1} : V \to U$. Wenn für jedes $x \in U$ das Differential df_x invertierbar ist, so ist f ein Diffeomorphismus, d.h. f^{-1} ist auch stetig differenzierbar und $df^{-1}_{f(x)} = (df_x)^{-1}$.

Wir erinnern uns:

$f(x) = x^3$ hat eine stetige aber in $x = 0$ nicht stetig differenzierbare Umkehrabbildung.

Beweis. Wir zeigen die stetige Differenzierbarkeit von f^{-1} in $y = f(x)$.
O.B.d.A. können wir annehmen, daß $x = y = 0$ und $df_x = \mathrm{Id}$, denn:
Sind $L_1, L_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertierbare lineare Abbildungen, so gilt der Satz für f genau dann, wenn er für $L_1 \circ f \circ L_2$ gilt.
Mittels einer Translation verschiebt man dann x und y nach 0, und mittels $L := (df_x)^{-1}$ erhält man nach der Kettenregel

$$d(L \circ f)_x = dL_{f(x)} \circ df_x = L \circ df_x = \mathrm{Id}.$$

Weiter im Beweis des Satzes: Sei $y \in V$ und $x := f^{-1}(y) \in U$. Wieder definieren wir

$$\begin{aligned} \varphi(x) &:= f(x) - f(0) - df_0(x) = f(x) - x \\ \psi(y) &:= f^{-1}(y) - y = x - f(x) = -\varphi(x) = -\varphi(f^{-1}(y)). \end{aligned}$$

Wir müssen zeigen, daß $\frac{\psi(y)}{\|y\|} \to_{y \to 0} 0$.

Da f stetig differenzierbar ist, gilt $\frac{\varphi(x)}{\|x\|} \to_{x \to 0} 0$.

D.h. wir finden ein $\varepsilon > 0$, so daß $\frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} \leq \frac{1}{2}$ für alle $\|x\| < \varepsilon$.

Da f^{-1} stetig ist, finden wir zu diesem ε ein $\delta > 0$, so daß $\|f^{-1}(y)\| \leq \varepsilon$ für alle $\|y\| < \delta$. Somit gilt für alle y mit $\|y\| < \delta$, daß

$$\|\psi(y)\| = \|\varphi(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x\| = \|f^{-1}(y)\|, \qquad (*)$$

und daher wegen der Dreiecksungleichung

$$\|f^{-1}(y)\| \leq \|f^{-1}(y) - y\| + \|y\| = \|\psi(y)\| + \|y\| \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{2}\|f^{-1}(y)\| + \|y\|.$$

Ende des Beweises: Also haben wir für alle y mit $\|y\| < \delta$, daß

$$\|f^{-1}(y)\| \ \leq 2\|y\|$$

und somit

$$\frac{\|\psi(y)\|}{\|y\|} = \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}\frac{\|x\|}{\|y\|} = \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}\frac{\|f^{-1}(y)\|}{\|y\|} \leq 2 \cdot \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}.$$

Aus $y \to 0$ folgt nun, wegen der Stetigkeit von f^{-1}, daß auch $x = f^{-1}(y) \to 0$ und somit

$$\frac{\|\psi(y)\|}{\|y\|} \ \leq \ 2 \cdot \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} \to_{y \to 0} 0.$$

Damit ist f^{-1} stetig diff.-bar in x und wir erhalten $df_y^{-1} = (df_x)^{-1}$. $\square$

Jetzt beweisen wir den Umkehrsatz:

Satz (Umkehrsatz)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $p \in U$ so, daß die Ableitungsmatrix df_p invertierbar ist. Dann existieren offene Umgebungen $V \subset U$ von p und W von $q := f(p)$, so daß $f|_V : V \to W$ ein Diffeomorphismus ist,
d.h. $f|_V$ ist bijektiv und $(f|_V)^{-1} : W \to V$ stetig differenzierbar.

Beweis. Wir können wieder o.B.d.A. annehmen, daß $p = q = 0$ und $df_p = \mathrm{Id}$. Der Beweis des Umkehrsatzes erfolgt nun in mehreren Schritten:

1) Definition von W: Sei $\delta > 0$, so daß $\overline{B_{2\delta}(0)} \subset U$ und so, daß

$$\|Id - df_x\|_{Op.-Norm} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{für alle } x \in \overline{B_{2\delta}(0)}. \qquad (*)$$

Wir setzen dann $W := B_\delta(0)$.

2) Definition von V:

$$V := f^{-1}(W) \cap B_{2\delta}(0).$$

Da W offen ist und f stetig ist auch das Urbild $f^{-1}(W)$ offen.Damit ist V als Durchschnitt zweier offener Mengen offen.

Weiter im Beweis: 3) $f|_V : V \to W$ ist bijektiv:
Zu $y \in W = B_\delta(0)$ definieren wir die differenzierbare Abbildung

$$\varphi_y : U \to \mathbb{R}^n, \qquad \varphi_y(x) := y + x - f(x).$$

Ein Fixpunkt x von φ_y ist eine Lösung von $f(x) = y$. Wegen $(d\varphi_y)_x = Id - df_x$ liefert der Schrankensatz auf $\overline{B_{2\delta(0)}} \subset U$ daß

$$\|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|. \qquad (**)$$

Da $\|y\| < \delta$ gilt für alle $x \in \overline{B_{2\delta}(0)}$, daß

$$\|\varphi_y(x)\| \leq \|\varphi_y(x) - \varphi_y(0)\| + \|y\| < 2\delta,$$

D.h. $\varphi_y : \overline{B_{2\delta}(0)} \to B_{2\delta}(0)$. Wegen $(**)$ ist φ_y also eine kontrahierende Abbildung auf dem vollständigen metrischen Raum $\overline{B_{2\delta}(0)}$.
Nach dem Banachschen Fixpunktsatz finden wir also zu jedem $y \in W = B_\delta(0)$ genau ein $x \in \overline{B_{2\delta}(0)}$ mit $\varphi_y(x) = x$.
Wegen $\|x\| = \|\varphi_y(x)\| < 2\delta$, gilt sogar $x \in B_{2\delta}(0)$. D.h aber, daß $f(x) = y$ und $x \in f^{-1}(W) \cap B_{2\delta}(0) = V$. Somit ist $f : V \to W$ bijektiv und wir können die Umkehrabbildung mittels $f^{-1}(y) := x$ definieren.

Weiter im Beweis:

4) f^{-1} ist stetig:
Wegen (**) und der Dreiecksungleichung erhalten wir für $x_1, x_2 \in V$

$$\begin{aligned} \|x_2 - x_1\| &= \|\varphi_0(x_2) - \varphi_0(x_1)\| + \|f(x_2) - f(x_1)\| \\ &\overset{(**)}{\leq} \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\| + \|f(x_2) - f(x_1)\|. \end{aligned}$$

Damit ist für $x_1 = f^{-1}(y_1)$ und $x_2 = f^{-1}(y_2)$

$$\|f^{-1}(x_2) - f^{-1}(x_1)\| \leq 2\|y_2 - y_1\|,$$

und somit ist f^{-1} stetig.

5) Für alle $x \in V$ ist df_x ein Isomorphismus:
Für $x \in V \subset B_{2\delta}(0)$ und der Wahl von δ in (*) gilt für $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\|(Id - df_x)(\xi)\| \leq \frac{1}{2}\|\xi\|.$$

Für $\xi \in Ker(df_x)$ ist dann $\|\xi\| \leq \frac{1}{2}\|\xi\|$, d.h. $\xi = 0$. Also ist df_x invertierbar.

Aus dem vorigen Satz folgt somit die Behauptung des Umkehrsatzes. □

Bemerkung:

f^{-1} ist sogar k-mal stetig differenzierbar, wenn f k-mal stetig differenzierbar ist ($k \in \mathbb{N}$). Die Gleichung $df_y^{-1} = df_{g(y)}^{-1}$ zeigt nämlich, dass f^{-1} k-mal stetig differenzierbar ist, wenn f k-mal und f^{-1} $(k-1)$-mal stetig differenzierbar ist.

Folgerung

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit df_x invertierbar für alle $x \in U$. Dann gilt

- *$f(U) \subset \mathbb{R}^n$ ist offen.* [Offenheitssatz]
- *Ist f injektiv, so ist f ein Diffeomorphismus.* [Diffeomorphiesatz]

Beweis. ÜA $\square$

Beispiel (ebene Polarkoordinaten)

Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix},$$

ist unendlich oft differenzierbar. Ihr Differential ist

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Da $\det df = r$, gibt es zu jedem Punkt $p = (r_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, so dass f U bijektiv auf eine offene Menge $V = f(U) \subset \mathbb{R}^2$ abbildet mit unendlich oft differenzierbarer Umkehrabbildung $(f|_U)^{-1} : V \to U$.

Z.B. $U = \mathbb{R}_+ \times (\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi)$.

Satz über implizite Funktionen

Motivation

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir betrachten die Gleichung

$$f(x^1, \ldots, x^n) = 0,$$

bzw. die Lösungsmenge $N_f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$.

- Ist f linear, so ist die Lösungsmenge $N_f(0)$ ein $(n-1)$-dimensionaler Unterraum. D.h. eine Variable, z.B. x_n, ist durch die anderen durch eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ bestimmt: $f(x^1, \ldots, x^n) = 0 \iff x_n = g(x^1, \ldots, x^{n-1})$ mit g linear. D.h. wir lösen nach der Koordinate x^n auf.
- Was passiert, wenn f nicht linear ist? Unter welchen Bedingungen kann man nun die Gleichung nach einer Koordinate auflösen, d.h. wann existiert eine Funktion $g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, so daß

  $$f(x^1, \ldots x^{n-1}, g(x^1, \ldots, x^{n-1})) = 0,$$

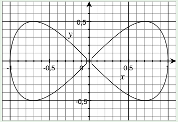
  d.h. $N_f(0) = graph(g)$? Ist g differenzierbar, falls f differenzierbar ist?

Beispiele

- Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2 + y^2 - 1$. Es ist $N_f(0) = S^1$ der Kreis. Hier benötigen wir zwei Funktionen, um $N_f(0)$ als Graphen darzustellen:

$$\begin{array}{ccccc} S^1 & = & \{(x,y) \in S^1 \mid y \geq 0\} & \cup & \{(x,y) \in S^1 \mid y \leq 0\} \\ & & graph(g_+) & \cup & graph(g_-) \end{array}$$

  mit $g_\pm : [-1,1] \to \mathbb{R}_\pm$, $g_\pm(x) := \pm\sqrt{1-x^2}$. $g_\pm$ sind differenzierbar nur auf dem offenen Intervall $(-1,1)$.
- $f(x,y,z) = x^2 + y^2$, d.h. $N_f = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Hier gibt es kein g mit $graph(g) = N_f$.
- $f(x,y) := x - y^3$. Hier ist $g(x) = \sqrt[3]{x}$ nicht differenzierbar in 0.
- $f(x,y) = y^2 - x^2(1-x^2)$. $N_f(0) \setminus \{(-1,0),(0,0),(1,0)\}$ ist Vereinigung von Graphen von 4 stetig differenzierbaren Funktionen.

$N_f(0) =$ 

Satz über implizite Funktionen

Satz (Satz über implizite Funktionen)

Sei $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ k-mal stetig differenzierbar ($k \geq 1$) und $(p, q) \in U$, so dass $f(p, q) = 0$. Weiterhin sei das Differential der Abbildung $y \to f(p, y)$ sei im Punkt $y = q$ invertierbar.
Dann gibt es eine offene Umgebungen $V \subset \mathbb{R}^m$ von p und $W \subset \mathbb{R}^n$ von q und eine k-mal stetig differenzierbare Abbildung $g : V \to W$ so daß für alle $(x, y) \in V \times W$ gilt: $f(x, y) = 0 \iff y = g(x)$.
D.h. $N_f(0) \cap V \times W = graph(g)$.

Beweis. Wir betrachten $F : U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $F(x, y) := (x, f(x, y))$.

Das Differential von F an (p, q) berechnet sich wie folgt aus dem Differential der Abbildung $y \mapsto f(x, y) = \sum_{i=1}^n f^i(x, y) e_i$:

$$dF = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_m & 0 \\ * & \left(\frac{\partial f^j}{\partial y_i}\right)_{i,j=1}^n (p, q) \end{pmatrix}$$

Weiter im Beweis: Da $\left(\frac{\partial f^j}{\partial y_i}\right)_{i,j=1}^n (p,q)$ im Punkt (p,q) invertierbar ist, ist auch $dF_{(p,q)}$ im Punkt (p,q) invertierbar.

Nach dem Umkehrsatz gibt es offene Umgebungen $V_1 \subset \mathbb{R}^m$ von p und $V_2 \subset \mathbb{R}^n$ von q, so dass $V_1 \times V_2 \subset U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ durch F bijektiv auf eine offene Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ von $F(p,q) = (p, f(p,q)) = (p,0)$ abgebildet wird, und zwar so, dass die Umkehrabbildung

$$G = (G_1, G_2) : \Omega \to V_1 \times V_2$$

k-mal stetig differenzierbar ist.

Dann ist $V := \{x \in V_1 | (x,0) \in \Omega\}$ eine offene Umgebung $V \subset V_1$ von p.

Wir setzen dann $W := V_2$ und

$$g : V \to W, \quad g(x) := G_2(x,0).$$

Da G k-mal stetig differenzierbar ist, ist es auch g.

Weiter im Beweis: Aus

$$\Omega \ni (x,y) = F(G(x,y)) = (G_1(x,y), f(G_1(x,y), G_2(x,y))) \qquad (*)$$

folgt dann $G_1(x,y) = x$ und $f(x, G_2(x,y)) = y$.
Wir überprüfen die nun Äquivalenz $f(x,y) = 0 \iff y = g(x)$ für alle $(x,y) \in V \times W$:

($\Leftarrow$) Da $g(x) = G_2(x,0)$ folgt aus (*), daß $f(x,g(x)) = 0$ für alle $x \in V$.

($\Rightarrow$) Umgekehrt folgt aus $(x,y) \in V \times W$ mit $f(x,y) = 0$, daß $F(x,y) = (x, f(x,y)) = (x,0)$und somit

$$(x,y) = G(F(x,y)) = G(x,0) = (G_1(x,0), G_2(x,0)) = (x, g(x)),$$

d.h. $y = g(x)$.

Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Beispiel (zweischaliges Hyperboloid)

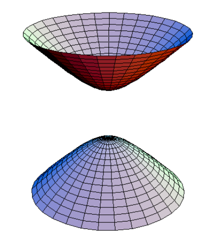
Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2 + 1,$$

erfüllt $\frac{\partial f}{\partial z} = -2z \neq 0$ für alle $(x, y, z) \in H := f^{-1}(0)$.

Nach dem Satz über implizite Funktionen definiert die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ also lokal eine unendlich oft differenzierbare Funktion $(x, y) \mapsto z = g(x, y)$. Diese kann man durch Auflösen der Gleichung $f(x, y, z) = 0$ nach z berechnen:

$$g_\pm(x, y) = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + 1}.$$



Der Graph von $g_+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$, bzw. $g_- : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_-$ ist die obere, bzw. untere, Schale des Hyperboloids H.

Bemerkung

Unter den Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen läßt sich das Differential der durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ implizit definierten Abbildung $x \mapsto g(x)$ wie folgt berechnen.

Bezeichnet $d_x f$ das Differential der Abbildung $x \to f(x, y)$ und $d_y f$ das Differential der Abbildung $y \to f(x, y)$, dann liefert Ableiten der Gleichung $f(x, g(x)) = 0$ nach der Kettenregel:

$$0 = d_x f + d_y f dg \Longrightarrow dg = -(d_y f)^{-1} d_x f.$$

Hierbei ist dg an der Stelle x und $d_x f, d_y f$ an der Stelle $(x, g(x))$ auszuwerten:

$$dg|_x = -\left(d_y f|_{(x,g(x))}\right)^{-1} d_x f|_{(x,g(x))}.$$

In Komponenten, $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$:

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x, g(x)) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial y^k}(x, g(x)) \cdot \frac{\partial g^k}{\partial x^j}(x) \;=\; 0.$$

Abbildungen von konstantem Rang

Definition (Rang einer differenzierbaren Abbildung)

$U \subset \mathbb{R}^m$ sei offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar.

(i) *Der Rang von f im Punkt $p \in U$ ist definiert als*

$$\mathrm{rg}(f)_p := \mathrm{rg}\, df_p \leq \min\{m, n\}.$$

Das definiert eine Funktion $\mathrm{rg}(f) : U \to \{0, 1, 2, \ldots, \min\{m, n\}\}$.

(ii) *f heißt Immersion, wenn $\mathrm{rg}(f) \equiv m$.*

(iii) *f heißt Submersion, wenn $\mathrm{rg}(f) \equiv n$.*

(iv) *k-mal stetig differenzierbare Abbildungen heißen auch von der Klasse C^k oder C^k-Abbildungen, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

(v) *$U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ seien offen. Eine C^k-Abbildung $f : U \to V$ heißt C^k-Diffeomorphismus, wenn f bijektiv ist und f^{-1} von der Klasse C^k ist.*

Beispiele

(i) Sei $m \leq n$.

$$\mathbb{R}^m \ni (x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} = \mathbb{R}^n$$

ist eine Immersion. Diese nennt man auch kanonische Immersion ι.

(ii) Sei $m \geq n$.

$$\mathbb{R}^m \ni (x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$$

ist eine Submersion. Das ist die kanonische Submersion (Projektion) π.

(iii) Sei $r \leq \min\{m, n\}$.

$$\mathbb{R}^m \ni (x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r} = \mathbb{R}^n$$

hat konstan ten Rang r.

Beispiele

(iv) Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $F(x) = (x, f(x))$ eine Immersion, denn $rg(dF_x) \equiv n$. Das Bild von F ist der Graph von f.

(v) Der Rang eines Diffeomorphismus $f : U \to V$ ($U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen) ist konstant gleich $m = n$.

Durch Ableiten der Gleichungen $f^{-1} \circ f = \ Id_U$ und $f \circ f^{-1} = \ Id_V$ folgt nämlich, dass df_p für alle $p \in U$ invertierbar ist, d.h. $m = n = rg(f)$.

Umgekehrt besagt der Umkehrsatz, dass jede C^k-Abbildung $f : U \to V$ vom Rang n zwischen offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ lokal ein C^k-Diffeomorphismus ist.

Immersionen

Satz (Immersionen)

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $p \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Abbildung mit $\mathrm{rg}(f)_p = m \leq n$.

Dann existiert eine offene Umgebung V von $f(p)$ und ein C^k-Diffeomorphismus $\varphi : V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$, so dass

$$(\varphi \circ f)(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0)$$

in einer Umg. von p.

Schematisch sieht die Situation bei einer Immersion so aus

$$\begin{tikzcd} & V \subset \mathbb{R}^n \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{R}^m \supset U \arrow[ur, "f"] \arrow[r, hook, "\iota"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "\circlearrowright"] & \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

wobei $\varphi \circ f = \iota$. Dies ist durch das Symbol $\circlearrowright$ angedeutet. Man spricht auch von einem *kommutativen Diagramm*.

Beweis. Nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten im $\mathbb{R}^n$ können wir annehmen, dass die ersten m Zeilen der $(n \times m)$-Matrix df_p linear unabhängig sind.
Betrachte $F : U \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$, $F(x, y) = f(x) + (0, y)$.
F ist von der Klasse C^k und

$$dF_{(p,y)} = \left(\begin{array}{c|c} df_p & \begin{matrix} 0 \\ 1_{n-m} \end{matrix} \end{array} \right) \in Mat_n(\mathbb{R}).$$

Da insbesondere $dF_{(p,0)}$ invertierbar ist, existiert nach dem Umkehrsatz eine offene Umgebung W von $(p, 0) \in \mathbb{R}^n$, so dass $F|_W : W \to F(W)$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung $V = F(W)$ von $F(p, 0) = f(p)$ ist.
Der Diffeomorphismus $\varphi := (F|_W)^{-1} : V \to W$ erfüllt dann, wie gewünscht, $(x, 0) = \varphi(F(x, 0)) = \varphi(f(x))$. □

Submersionen

Satz (Submersionen)

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $p \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Abbildung mit $\mathrm{rg}(f)_p = n \leq m$.

Dann existiert eine offene Umgebung $V \subset U$ von p und ein C^k-Diffeomorphismus $\varphi : V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^m$, so dass

$$(f \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^n)$$

auf $\varphi(V)$.

Hier bekommen wir folgendes Bild:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \supset U \supset V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\circlearrowright"] & \varphi(V) \subset \mathbb{R}^m \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

wobei $f \circ \varphi^{-1} = \pi$.

Beweis. Nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten im $\mathbb{R}^m$ können wir annehmen, dass die ersten n Spalten der $(n \times m)$-Matrix df_p linear unabhängig sind.

Betrachte $F : U \to \mathbb{R}^m$, $F(x', x'') = (f(x', x''), x'')$, wobei $(x', x'') \in U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, $x' = (x^1, \ldots, x^n)$, $x'' = (x^{n+1}, \ldots, x^m)$.

F ist von der Klasse C^k und

$$dF_p = \left(\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{df_p} \\ \hline 0 & 1_{m-n} \end{array} \right).$$

Da dF_p invertierbar ist, existiert nach dem Umkehrsatz eine offene Umgebung $V \subset U$ von $p \in \mathbb{R}^m$, so dass $\varphi := F|_V : V \to F(V)$ ein Diffeomorphismus ist.

φ erfüllt dann für alle $(x', x'') \in \varphi(V)$: $(x', x'') = F(\varphi^{-1}(x', x''))$ und somit, wie gewünscht, $f(\varphi^{-1}(x', x'')) = x'$. $\square$

Allgemeine Abbildungen von konstantem Rang

Satz (Allgemeine Abbildungen von konstantem Rang)

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $p \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Abbildung mit $\mathrm{rg}(f) = r$ auf U.

Dann existieren offene Umgebungen $V \subset U$ von p und $W \subset \mathbb{R}^n$ von $f(p)$ und C^k-Diffeomorphismen $\varphi : V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^m$, $\psi : W \to \psi(W) \subset \mathbb{R}^n$, so dass

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^r, 0, \ldots, 0)$$

auf $\varphi(V)$.

Beweis. Nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten im $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ können wir annehmen, dass die Matrix

$$A = \left(\frac{\partial f^i(p)}{\partial x^j} \right)_{i,j=1,\ldots,r} \qquad \text{invertierbar ist.}$$

Weiter im Beweis:

Betrachte $F(x) = (f^1(x), \dots, f^r(x), x^{r+1}, \dots, x^m)$.

Da

$$dF_p = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & \mathbf{1}_{m-r} \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, existiert eine offene Umgebung $V \subset U$ von p, so dass $\varphi := F|_V : V \to \varphi(V)$ ein Diffeomorphismus ist.

Aus $F \circ \varphi^{-1}(x) = x$ folgt dann $f^i(\varphi^{-1}(x)) = x^i$ für alle $i \leq r$ und $x \in \varphi(V)$.

Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass $f^i(x) = x^i$ für alle $i \leq r$.

Somit ist

$$df_p = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ * & B \end{pmatrix}, \quad B = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_{i,j \geq r+1}.$$

und aus $\mathrm{rg}(f) = r$ folgt nun $B = 0$, d.h. f hängt nur von $(x^1, \dots, x^r)$ ab.

Weiter im Beweis:

Wir haben gezeigt, dass f von der Form $f(x) = (x', f''(x'))$ ist, wobei

$$x' = (x^1, \dots, x^r) \quad \text{und} \quad f'' = (f^{r+1}, \dots, f^n).$$

Sei nun $U' \subset \mathbb{R}^r$ die Projektion von $U \subset \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$.

$W := U' \times \mathbb{R}^{n-r}$ ist eine offene Umgebung von $f(p) = (p', f''(p'))$, wobei $p' \in \mathbb{R}^r$ die Projektion von $p = (p', p'') \in U \subset \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$ ist.

Es genügt nun, folgenden Diffeomorphismus $\psi : W \to \psi(W) \subset \mathbb{R}^n$ zu verwenden:

$$\psi(x) = (x', x'' - f''(x')), \quad x = (x', x'') \in W = U' \times \mathbb{R}^{n-r}.$$

In der Tat gilt, wie gewünscht,
$\psi(f(x)) = \psi(x', f''(x')) = (x', f''(x') - f''(x')) = (x', 0).$ □

Beispiel

Die Abbildung $f : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$, $A \mapsto f(A) = A^t A$, hat auf der offenen Teilmenge $\mathrm{GL}(n) \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ konstanten Rang $r = \frac{n(n+1)}{2}$, wie im Folgenden gezeigt wird.

Wir können f als Abbildung $f : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ in den Unterraum $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ der symmetrischen Matrizen auffassen.

Das Differential $df_A : B \mapsto B^t A + A^t B$, $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$, ist für $A \in \mathrm{GL}(n)$ surjektiv:

Sei $C \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$. df_A bildet $B = \frac{1}{2}(A^{-1})^t C$ auf $\frac{1}{2}(C^t + C) = C$ ab.

Daraus folgt $\mathrm{rg}(f)_A = \dim \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Somit ist $f : Mat(n, \mathbb{R}) \to Sym(n, \mathbb{R})$ eine Submersion.

Untermannigfaltigkeiten im Euklidischen Raum

Wir wollen nun Teilmengen des Euklidischen Raumes betrachten, die lokal durch eine Immersion oder eine Subersion gegeben sind.

Bemerkung: Die auf Teilmengen induzierte Metrik

Sei $Y \subset (X, d)$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d).

Dann definiert die Einschränkung von d auf Y eine Metrik d_Y auf Y, so daß (Y, d_y) ein metrischer Raum ist. d_Y heißt induzierte Metrik.

Beispiel

Die zweidimensionale Einheitssphäre
$S^2 = S_1(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge im Euklidischen Raum und bzgl der induzierten Metrik ein vollständiger metrischer Raum.
Die obere Halbsphäre $\{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0\}$ ist eine offene Teilmenge der Sphäre S^2 und nicht vollständig.

Definition

*Eine bijektive stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen X und Y heißt **Homöomorphismus**, wenn $f^{-1} : Y \to X$ stetig ist*

Beispiel

Die Abbildung

$$f : [0, 2\pi) \to S^1 = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}, \quad f(\varphi) = e^{i\varphi},$$

ist stetig und bijektiv, aber kein Homöomorphismus. Denn
$z_n = f(2\pi - \frac{1}{n}) \in S^1$ konvergergiert gegen 1 aber
$f^{-1}(z_n) = 2\pi - \frac{1}{n} \in [0, 2\pi)$ konvergiert nicht gegen $f^{-1}(1) = 0$.
Die Einschränkung von f auf das offene Intervall $(0, 2\pi)$ definiert jedoch einen Homöomorphismus von $(0, 2\pi)$ auf die offene Teilmenge $S^1 \setminus \{1\}$ der Einheitskreislinie S^1.

Untermannigfaltigkeiten

Definition (Untermannigfaltigkeiten)

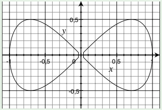
Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$, eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^m$ und eine C^k-Immersion $F : U \to \mathbb{R}^n$ gibt, die U homöomorph auf $F(U) = V \cap M$ abbildet.

F heißt lokale Parametrisierung von M.

Zweidimensionale Untermannigfaltigkeit heißen Flächen.

$(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ heißen Hyperflächen.

Beispiel

Die Menge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2(1-x^2) - y^2 = 0\} =$ 

$\subset \mathbb{R}^2$

ist keine Untermannigfaltigkeit. $M \setminus \{(0, 0)\}$ ist eine Untermannigfaltigkeit.

Beispiel

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^r$ eine C^k-Abbildung.

Dann ist der Graph von f

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in U \times \mathbb{R}^r | y = f(x)\}$$

eine m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, wobei $n = m + r$.

Die C^k-Immersion $F : U \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = (x, f(x))$, bildet U homöomorph auf $F(U) = \Gamma_f$ ab.

Beispiel

Die Sphäre S^2 ist eine C^∞-Fläche.

Sie besitzt nämlich eine Überdeckung durch 6 Halbsphären

$$H_i^\pm := \{x = (x^1, x^2, x^3) \in S^2 | \pm x^i > 0\}$$

und jede der Halbsphären ist ein Graph. Z.B. ist $H_1^+ = \{(f(u), u) | u \in U\}$ mit $f : U = \{u \in \mathbb{R}^2 | \|u\| < 1\} \to \mathbb{R}$, $f(u) = \sqrt{1 - \|u\|^2}$.

Beispiel: Die stereographische Projektion der Sphäre

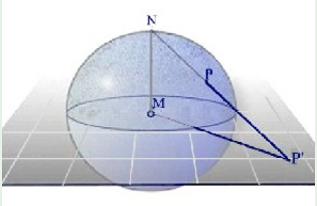
Wir betrachten die beiden Abbildungen $\varphi_\pm : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi_\pm(x,y) \;:=\; \frac{1}{1+\|(x,y)\|^2}\left(2x, 2y, \pm(\|(x,y)\|^2 - 1)\right).$$

Beides sind Immersionen mit $Im(\varphi_\pm) \subset S^2$ (ÜA).
Seien $N^\pm = (0,0,\pm 1)$ der Nord- und Südpol der Sphäre. Dann sind $\varphi_\pm : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{N^+\}$ Homöomorphismen mit der Umkehrabbildung (ÜA)

$$\varphi_\pm^{-1} \;:\; S^2 \setminus \{N^\pm\} \;\to\; \mathbb{R}^2\,, \quad \varphi_\pm^{-1}(x,y,z) := \left(\frac{x}{1\mp z}, \frac{y}{1\mp z}\right)$$

$\varphi_\pm^{-1}$ heißt stereographische Projektion aus dem Nord/Südpol. Sie ordnet jedem Punkt $P \in S^2 \setminus \{N^\pm\}$ den Schittpunkt P' der Gerade durch P und $N^\pm$ mit dem $\mathbb{R}^2 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3\}$ zu.



Untermannigfaltigkeiten und Abbildungen von konstantem Rang

Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Abbildung von konstantem Rang r und $q \in f(U)$. Dann ist

$$M = f^{-1}(q) \subset U$$

eine C^k-Untermannigfaltigkeit der Dimension $m - r$.

Beweis. Sei $p = (p^1, \ldots, p^m) \in M$. Wg. der Normalform von Abbildungen von konstantem Rang, können wir annehmen, dass

$$f : (x^1, \ldots, x^m) \mapsto (x^1, \ldots, x^r, 0, \ldots, 0)$$

auf einer offenen Umg. $V = V_1 \times V_2 \subset U \subset \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$ von p.
Dann ist aber $V_2 \ni y \mapsto (p^1, \ldots, p^r, y) \in V = V_1 \times V_2$ eine Immersion, die V_2 homöomorph auf $M \cap V = f^{-1}(p^1, \ldots, p^r, 0, \ldots, 0)$ abbildet. □

Beispiele

(i) Die Abbildung $f : \mathrm{GL}(n) \to \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$, $A \mapsto A^t A$, hat überall den Rang $n(n+1)/2$. Somit ist $\mathrm{O}(n) = f^{-1}(\mathbf{1}_n) \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ eine (kompakte) C^∞-Untermannigfaltigkeit der Dimension $n(n-1)/2$.

(ii) Zeigen Sie auf ähnliche Weise, dass $\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ eine kompakte C^∞-Untermannigfaltigkeit der Dimension n^2 ist.

(iii) Sei $p \in \mathbb{R}^{n+1}$. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x - p\|^2$, definiert eine Submersion von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{p\}$ auf $\mathbb{R}_+$. Die n-dimensionalen Sphären $S^n_r(p) = f^{-1}(r) \subset \mathbb{R}^n$ $(r > 0)$ sind also C^∞-Hyperflächen.

(iv) Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^r$ eine C^k-Abbildung und $\Gamma_f = \{(x, F(x)) \in U \times \mathbb{R}^r\}$ der Graph von F.
Dann gilt: die Abbildung $f : \mathbb{R}^{m+r} \to \mathbb{R}^r$ definiert durch $f(x, y) := y - F(x)$ ist eine Submersion und

$$\Gamma_F = f^{-1}(0).$$

Untermannigfaltigkeiten und Submersionen

Satz

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem $p \in M$ eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ gibt und eine C^k-Submersion $f : V \to \mathbb{R}^{n-m}$, so daß $M \cap V = f^{-1}(0)$.

Beweis. "$\Longrightarrow$"Sei $F : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung, wobei $U \subset \mathbb{R}^m$ und $p \in F(U) = M \cap V$.

Wg. der Normalform von Immersionen können wir annehmen, dass $F : (x^1, \ldots, x^m) \mapsto (x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0)$.

$f : V \to \mathbb{R}^r$, $f(x^1, \ldots, x^n) = (x^{m+1}, \ldots, x^n)$, ist dann die gesuchte Submersion.

Die Umkehrung folgt aus dem vorherigen Satz. $\square$

Tangentialraum

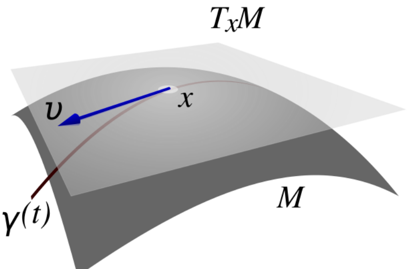
Definition (Tangentialvektoren)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit und $x \in M$.

Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M in x, wenn es ein $\varepsilon > 0$ und eine C^1-Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$\gamma(0) = x \quad \textit{und} \quad v = \gamma'(0).$$

Die Menge aller Tangentialvektoren an M in x heißt Tangentialraum und wird mit $T_x M$ bezeichnet..



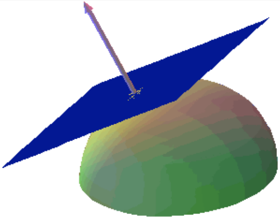
Beispiel: Tangentialraum an die Sphäre

Sei $S_r^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die n-dimensionale Sphäre vom Radius r. Dann gilt für alle $p \in S_r^n$, daß

$$T_p S_r^n \;=\; p^\perp.$$

Es gilt $v \in T_p M \iff \exists$ eine Kurve $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^{n+1}) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_r^n$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$.
Dann gilt $r^2 \equiv \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} (\gamma^i(t))^2$ und somit

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \gamma^i(0)(\gamma^i)'(0) = \langle p, v \rangle.$$



Satz (Eigenschaften des Tangentialraumes)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit und T_pM der Tangentialraum an M in $p \in M$. Dann gilt:

(i) *T_pM ist ein Vektorraum der Dimension $m = \dim M$.*

(ii) *Sei $F : U \subset \mathbb{R}^m \to V$ eine lok. Parametrisierung von M, $u \in U$ mit $p = F(u)$.*
Dann bilden die Vektoren $\partial_1 F(u), \dots, \partial_m F(u)$ eine Basis von T_pM.

(iii) *Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von p und $f = (f^1, \dots, f^{n-m}) : V \to \mathbb{R}^{n-m}$ eine C^1-Submersion, so daß $M \cap V = f^{-1}(q)$, wobei $q = f(p)$. Dann ist*
$T_pM = \mathrm{Kern}(df_p) = \cap_{j=1}^{n-m} (\mathrm{grad}\, f^j(p))^\perp$.

(iv) *Insbesondere gilt $T_pM^\perp = \mathrm{span}\{\mathrm{grad}\, f^1(p), \dots, \mathrm{grad}\, f^{n-m}(p)\}$.*

Beweis. Da $\mathrm{Rang}(F) = m$ und $\mathrm{Rang}(f) = n - m$, genügt es zu zeigen, daß

$$\mathrm{span}\{\partial_1 F(u), \dots, \partial_m F(u)\} \subset T_p M \qquad (*)$$

$$\text{und} \quad \mathrm{grad}\, f^j(p) \perp T_p M \ \text{ für alle } j = 1, \dots, n-m, \qquad (**)$$

denn $(*)$ impliziert $\dim(T_x M) \geq m$ und $(**)$ impliziert $\dim(T_x M) \leq n - (n-m) = m$.

Sei nun $v = \sum_{i=1}^m v^i e_i \in \mathbb{R}^m$. Dann definiert $c(t) := F(u + tv)$ eine C^1-Kurve $(-\varepsilon, \varepsilon) \to F(U) \subset M$ mit

$$c'(0) = dF_p v = \sum_{i=1}^m v^i \partial_i F(u).$$

Das beweist $(*)$.

Für jede C^1-Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to F(U) \subset M$ mit $c(0) = p$ gilt $f(c(t)) = q$ und somit $0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(c(t)) = df_p c'(0)$.

Das zeigt $T_p M \subset \mathrm{Kern}(df_p) = \cap_{j=1}^{n-m} (\mathrm{grad}\, f^j(p))^\perp$ und damit $(**)$. $\square$

Beispiele:

- Tangentialraum an die Sphäre:
  Es ist $S^n = f^{-1}(0)$ wobei $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ die Submersion ist, die durch $f(x) = \|x\|^2 - 1$ gegeben ist. Damit ist
  $T_pM = (\operatorname{grad} f)^\perp = 2p^\perp$.
- Tangentialraum an einen Graphen:
  Sei $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine C^k-Abb. und $\Gamma_\varphi = \{(x, \varphi(x)) \in U \times \mathbb{R}\}$ der Graph von φ.
  Dann ist $F : U \to \mathbb{R}^{m+1}$, $F(x) = (x, \varphi(x))$ eine Parametrisierung und

  $$T_p\Gamma_\varphi = \operatorname{span}\left((e_i, \partial_i\varphi(p))^t\right)_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$$

  Ist $f : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^r$, $f(x, y) = \varphi(x) - y$ die durch den Graphen definierte Submersion, dann gilt auch

  $$T_p\Gamma_\varphi \;=\; (\operatorname{grad} f(p, \varphi(p))^\perp \;=\; (\operatorname{grad}\, \varphi(p), 1)^\perp.$$

  Beachte, daß $\langle(\operatorname{grad}\, \varphi(p), 1), (e_i, \partial_i\varphi(p))\rangle = 0$.
  Dies gilt natürlich auch für $\varphi : U \to \mathbb{R}^r$ mit $r > 1$.

Extrema mit Nebenbedingungen

Satz (Extrema mit Nebenbedingungen)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ im Punkt $p \in M \cap U$ differenzierbar

(i) *Wenn $F = f|_{U \cap M}$ im Punkt p ein lokales Extremum annimmt, so ist*

$$(*) \qquad T_pM \subset \mathrm{Kern}\, df_p = (\mathrm{grad}\, f(p))^{\perp}.$$

(ii) *$(*)$ gilt genau dann, wenn es Konstanten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ (sogenannte Lagrangemultiplikatoren) gibt mit*

$$\mathrm{grad}\, f(p) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \mathrm{grad}\, h^j(p),$$

wobei $r = m - n$ und $h = (h^1, \ldots, h^r) : U \to \mathbb{R}^r$ eine C^1-Submersion ist, so daß $M \cap U = h^{-1}(0)$.

Beweis. Sei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \cap U \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve mit $c(0) = p$. $f \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ hat ein lokales Extremum in 0 und somit

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(c(t)) = df_p c'(0) = \langle \operatorname{grad} f(p), c'(0) \rangle.$$

Das beweist (i), d.h. $T_pM \subset (\operatorname{grad}\ f)^\perp$. Das impliziert aber $\operatorname{grad}\ f \subset (T_pM)^\perp$. Damit folgt (ii) aus

$$T_pM^\perp = \operatorname{span}\{\operatorname{grad} h^1(p), \ldots, \operatorname{grad} h^r(p)\}.$$

$\square$

Beispiel

Wir beweisen (die bereits bekannte Tatsache), daß jeder symmetrische Endomorphismus A eines endlichdimensionalen Euklidischen Vektorraums V einen Eigenvektor hat.

Da die Einheitssphäre $S = S_1(0) \subset V$ kompakt ist, nimmt die stetige Funktion (genauer quadratische Form) $x \mapsto f(x) := \langle x, Ax \rangle$ in einem Punkt $p \in S$ ihr Minimum an.

Nach dem vorigen Satz gilt also

$$\operatorname{grad} f(p) = 2Ap \in (T_pS)^\perp = \mathbb{R}p,$$

d.h. p ist ein Eigenvektor von A.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine gewöhnliche Differentialgleichung (DG) besteht aus einer oder mehreren Gleichungen an eine der mehrere Funktionen *einer Variablen* und deren Ableitungen . Eine Lösung dieser Gleichung ist durch Anfangsbedingungen (AB) bestimmt.

Wir kennen schon einige Differentialgleichungen:

- Erfülle die differenzierbare Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die DG $x'(t) \equiv 0$. Eine Lösung ist $x(t) \equiv c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. D.h. wir müssen noch eine Anfangsbedingung stellen: $x(t_0) = c$.
- Die DG zweiter Ordnung $x''(t) \equiv 0$ hat die Lösungen $x(t) = at + b$ wobei $a, b \in \mathbb{R}$ Konstanten sind. Diesmal müssen wir zwei AB's stellen: $x(t_0) = b_0$ und $x'(t_0) = a_0$. Dann ist $x(t) = a_0(t - t_0) + b_0$ eine Lösung.
- Die DG $x'(t) = t^2$ mit der AB $x(0) = c$ hat die Lösung $x(t) = \frac{1}{3}t^3 + c$.
- Die DG $x'(t) = x(t)$ mit der AB $x(0) = c$ hat die Lösung $x(t) = ce^t$.

Warum interessieren wir uns für DG'en:

Die Bewegung eines Punktes im Raum wird beschrieben durch eine Kurve im $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto x(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t)) \end{aligned}$$

$x'(t)$ gibt dann die Geschwindigkeit und $x''(t)$ die Beschleunigung zum Zeitpunkt t an. Auf den Punkt wirke eine Kraft F, die vom Ort x, der Zeit t und der Geschwindigkeit $x'(t)$ des Punktes abhängt, d.h. $F = F(x, x', t)$. Das Newtonsche Bewegungsgesetz der Mechanik hat dann folgende Form

$$m \cdot x''(t) = F(x(t), x'(t), t).$$

Unter der Annahme, daß F, $x(t_0)$ und $x'(t_0)$ bekannt sind, versucht man, die Bewegungskurve des Punktes zu bestimmen.
Dies ist ein Anfangswertproblem der Form

$$x''(t) = \frac{1}{m} F(x, x', t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = v_0.$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

Definition (Gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

- *Dann heißt die Gleichung*

$$x'(t) \;=\; f(x,t) \tag{5}$$

  Differentialgleichung erster Ordnung in x. (Meist schreiben wir auch nur $x' = f(x,t)$.)

- *Unter einer Lösung der DG (5) versteht man eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$, so daß*
  (i) *der Graph $\Gamma_\varphi \subset \Omega$ und*
  (ii) *$\varphi'(t) = f(\varphi(t), t)$ für alle $t \in I$.*

- *Sei $t_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$. Eine Lösung φ der DG (5) mit $\varphi(t_0) = c$ heißt Lösung des Anfangswertproblems zu (5) mit Anfangsbedingung*

$$x(t_0) \;=\; c. \tag{6}$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung

Definition (Gewöhnliche DG höherer Ordnung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig.

$$x^{(k)} = f(x, x', \dots, x^{(k-1)}, t) \tag{7}$$

heißt gewöhnliche DG k-ter Ordung.

- *Unter einer Lösung versteht man eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte k-mal diffb. Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$, so daß*
  (i) *der Graph $\Gamma_\Phi \subset \Omega$, wobei $\Phi = (\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(k-1)}) : I \to \mathbb{R}^n$ und*
  (ii) $\varphi^{(k)}(t) = f(\varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t), t)$ *für alle $t \in I$.*
- *Sei $t_0 \in I$ und $(c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{R}^k$. Das Anfangswertproblem (AWP) ist gegeben durch (7) und*

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t_0) & = & c_1 \\ x'(t_0) & = & c_2 \\ & \vdots & \\ x^{(k-1)}(t_0) & = & c_k \end{array}\right\} \tag{8}$$

Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

Definition (Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen (höherer Ordnung))

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n \cdot k} \times \mathbb{R}$ *und* $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *stetig.*

$$x^{(k)} = F(x, x', \ldots, x^{(k-1)}, t) \tag{9}$$

heißt System gewöhnlicher DG'en k-ter Ordung an $x = (x^1, \ldots x^n)$.

- *Unter einer Lösung versteht man eine diffb. Kurve* $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ *mit*
  (i) *der Graph* $\Gamma_\Phi \subset \Omega$, *wobei* $\Phi = (\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(k-1)}) : I \to \mathbb{R}^n$ *und*
  (ii) $\varphi^{(k)}(t) = F(\varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(k-1)}(t), t)$ *für alle* $t \in I$.
- *Sei* $t_0 \in I$ *und* $c_1, \ldots, c_k$ *Vektoren in* $\in \mathbb{R}^n$. *Das Anfangswertproblem (AWP) ist gegeben durch* (9) *und*

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t_0) & = & c_1 \\ x'(t_0) & = & c_2 \\ & \vdots & \\ x^{(k-1)}(t_0) & = & c_k \end{array}\right\} \tag{10}$$

Reduktion von Systemen höherer Ordnung

Satz

Sei $F : \Omega \subset \mathbb{R}^{n \cdot k} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *stetig und* $F^* : \mathbb{R}^{n \cdot k} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \cdot k}$ *definiert durch,* $F^*(y_0, \dots, y_{k-1}, t) := (y_1, \dots, y_{k-1}, F(y_0, \dots, y_{k-1}, t))$*, wobei* $y_j \in \mathbb{R}^n$ *für alle* $j \in \{0, \dots, k-1\}$*. Dann gilt:*

(1) *Ist* $x : I \to \mathbb{R}^n$ *eine Lösung des AWP's k-ter Ordnung*

$$x^{(k)} = F(x, \dots, x^{(k-1)}, t) \text{ mit AB'en} \left\{ \begin{array}{rcl} x(t_0) & = & a_1 \\ & \vdots & \\ x^{(k-1)}(t_0) & = & a_k, \end{array} \right\} \tag{11}$$

so ist $y := \left(x, x', \dots, x^{(k-1)}\right) : I \to \mathbb{R}^{n \cdot k}$ *eine Lösung des AWP's*

$$y' = F^*(y, t), \qquad y(t_0) = (a_1, \dots, a_k) \tag{12}$$

(2) *Ist* $y = (y_0, \dots, y_{k-1}) : I \to \mathbb{R}^{nk}$ *eine Lsg. des AWP's* (12) *erster Ordnung, so ist* $y_0 : I \to \mathbb{R}$ *eine Lsg. des AWP's* (11) *k-ter Ordnung.*

Beweis: Nach Definition von F^* ist $y'(t) = F^*(y(t), t)$ äquivalent zu

$$y_0'(t) = y_1(t),\ \ldots,\ y_{k-2}'(t) = y_{k-1}(t),\ y_{k-1}'(t) = F(y_0, \ldots, y_{k-1}, t).$$

Die Behauptung folgt dann sofort durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} x(t) \text{ löst } (11) &\implies y(t) = (x(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)) \text{ löst } (12) \\ y(t) \text{ löst } (12) &\implies x(t) = y_0(t) \text{ löst } (11). \end{aligned} \qquad \square$$

Beispiel: Schwingungsgleichung ohne Reibung

Die Bewegung einer Masse m, die reibungsfrei an einer Feder auf der x-Achse um 0 gleitet, wird beschrieben durch die DG 2. Ordnung

$$x''(t) = -\frac{k^2}{m}x = F(x, x', t) \quad \text{mit } F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ F(x, t) = -\frac{k^2}{m}x. \tag{13}$$

Wir führen nun (13) auf das System erster Ordnung zurück

$$(y_0'(t), y_1'(t)) = (y_1(t), -\frac{k^2}{m}y_0(t)) = F^*(y_0, y_1, t),$$

wobei $F^* : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $F^*(y_0, y_1, t) = (y_1, F(y_0, y_1, t)) = (y_1, -\frac{k^2}{m}y_0)$. Das heißt, $x(t)$ löst genau dann (13), wenn $(y_0(t), y_1(t)) := (x(t), x'(t))$ folgendes Differentialgleichungssystem erster Ordnung löst

$$\begin{pmatrix} y_0'(t) \\ y_1'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ -\frac{k^2}{m}y_0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k^2}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix},$$

d.h. $y'(t) = A \cdot y(t)$, mit einer konstanten Matrix A. Solche DG'en nennt man lineare DG-Systeme mit konstanten Koeffizienten.

Autonome Differentialgleichungen und Vektorfelder

Definition

- *Ein DG-System der Form* $x^{(k)} = F(x, \dots, x^{(k-1)})$, *bzw.* $x' = F(x)$ *falls* $k = 1$, *heißt autonom (d.h., F hängt nicht von t selbst ab).*
- *Ein Vektorfeld auf einer offenen Menge* $U \subset \mathbb{R}^n$ *ist eine stetige Abbildung* $V : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. *U heißt Phasenraum des Vektorfeldes* V.
- *Eine* C^1*–Kurve* $\gamma_{x_0} : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \longrightarrow U$ *heißt Integralkurve des Vektorfeldes V durch* $x_0 \in U$, *falls gilt*

$$V(\gamma_{x_0}(t)) = \gamma'_{x_0}(t)\ \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad und \quad \gamma_{x_0}(0) = x_0.$$

D.h. $V(\gamma_{x_0}(t))$ ist gleich dem Tangentialvektor der Kurve γ_{x_0} in t. Die Integralkurven eines Vektorfeldes $V : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sind also Lösungen der autonomen Differentialgleichung

$$\gamma'(t) = V(\gamma(t)) \quad \text{mit der Anfangsbedingung } \gamma(0) = x_0.$$

Beispiel: Lineare Vektorfelder auf dem $\mathbb{R}^2$

- Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld definiert durch $U(x, y) = \lambda(x, y)$. Eine Integralkurve von U durch $p := (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ist dann gegeben durch
$$\gamma_p = e^{\lambda t} p,$$
denn $\gamma_p'(t) = \lambda e^{\lambda t} p = \lambda \gamma_p(t) = U(\gamma_p(t))$.
- Sei V das Vektorfeld $V(x, y) = (-y, x)$. Eine Integralkurve durch $p = (r^2, 0)$ ist dann gegeben durch
$$\gamma_p(t) = r^2(\cos t, \sin t),$$
denn $\gamma_p'(t) = r^2(-\sin t, \cos t) = V(\gamma_p(t))$.
- Sei W das Vektorfeld $W(x, y) = (y, x)$. Eine Integralkurve durch $p = (r^2, 0)$ ist dann gegeben durch
$$\gamma_p(t) = r^2(\cosh t, \sinh t),$$
denn $\gamma_p'(t) = r^2(\sinh t, \cosh t) = W(\gamma_p(t))$.

Elementare Lösungsmethoden für DG'en 1. Ordnung

In diesem Abschnitt betrachten wir Differentialgleichungen der Form

$$x' = F(x, t)$$

wobei $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist. D.h., eine Lösung ist eine differenzierbare Funktion $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Wir geben elementare Lösungsmethoden an, für Fälle, in denen F eine einfache Gestalt hat. Diese Verfahren basieren meist auf der Möglichkeit der Trennung der Variablen: Hierbei ist $F(x, t) = f(t) \cdot g(x)$, d.h. $x' = f(t) \cdot g(x)$.
Formal ist also $\frac{dx}{dt} = f(t)g(x)$ und deshalb $\frac{dx}{g(x)} = f(t)dt$. Integration liefert dann die Lösung.

Trennung der Variablen

Definition

Eine DG mit getrennten Variablen ist eine DG folgenden Typs

$$x'(t) = f(t) \cdot g(x(t)) \quad \text{mit AB } x(t_0) = x_0, \tag{14}$$

wobei $f : I_1 \to \mathbb{R}$ und $g : I_2 \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig sind, $(t_0, x_0) \in I_1 \times I_2$ und I_1, I_2 offene Intervalle.

Satz (DG mit getrennten Variablen)

Das AWP (14) besitzt auf einem Intervall $J \subset I_1$ um t_0 die eindeutige Lösung

$$x(t) = G^{-1}\left(G(x_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds\right),$$

wobei G eine Stammfkt. von $\frac{1}{g}$ auf I_2 und G^{-1} die Umkehrfkt. von G ist.

J ist gegeben durch $J = \left\{t \in \mathbb{R} \mid G(x_0) + \int\limits_{t_0}^{t} f(s) ds \in Im(G)\right\}$.

Beweis.

Existenz: Da $\frac{1}{g}$ stetig ist und ohne Nullstellen ist die Stammfkt. G streng monoton und somit umkehrbar mit $G^{-1} : Im(G) \to I_2$. Dann erfüllt

$$x(t) = G^{-1}\left(G(x_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds\right).$$

die DG (14), denn nach der Kettenregel ist

$$x'(t) = \frac{1}{G'(x(t))}(G(x_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds)' = g(x(t)) \cdot f(t).$$

$x(T)$ ist definiert für diejenigen T, für die $G(x_0 + \int_{t_0}^{T} f(t)\,dt) \in Im(G)$.

Weiter im Beweis.

Eindeutigkeit: Sei x eine Lösung von (14)

Wir integrieren die Gleichung $\frac{x'(t)}{g(x(t))} = f(t)$ von t_0 bis T nahe t_0:

$$\int_{t_0}^{T} \frac{x'(t)}{g(x(t))}\, dt = \int_{t_0}^{T} f(t)\, dt.$$

Die Substitution $x = x(t)$ ergibt $dx = x'(t)\, dt$ und

$$\int_{t_0}^{T} f(t)\, dt = \int_{x_0}^{x(T)} \frac{dx}{g(x)} = G(x(T)) - G(x_0)$$

für G die Stammfunktion von $\frac{1}{g}$. D.h. x ist eindeutig bestimmt. $\square$

Beispiele

- Eine autonome DG $x' = g(x)$, $x(t_0) = 0$ ist eine DG mit getrennten Variablen und $f \equiv 1$. Ist G eine Stammfunktion von $1/g$, so ist $x(t) := G^{-1}(t + G(x_0) - t_0)$ eine Lösung.
  Sei z.B. $x' = x$ mit $x(0) = c > 0$. Dann ist $G(x) = \ln x$ die Stammfunktion von $1/x$ mit Umkehrfunktion $G^{-1}(x) = \mathrm{e}^x$. Somit ist die Lösung gegeben durch
  $$x(t) = \mathrm{e}^{t+\ln c} = c \cdot \mathrm{e}^t.$$
- Sei $x' = t \cdot x^2$ mit AB $x(0) = c \neq 0$. Dann ist $G(x) = -\frac{1}{x}$ die Stammfunktion von $1/x^2$ mit Umkehrfunktion $G^{-1}(x) = -\frac{1}{x}$. Andererseits ist $\int_0^t s\,ds = \frac{1}{2}t^2$. Somit ist die Lösung gegeben durch
  $$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{c} - \frac{t^2}{2}}$$

Euler–homogene Differentialgleichungen

Definition

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Eine (Euler)–homogene DG ist eine DG vom Typ

$$x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right), \tag{15}$$

Lösungsmethode: Die Substitution $u(t) = \frac{x(t)}{t}$ ergibt

$$u' = \frac{x' \cdot t - x}{t^2} = \frac{1}{t}\left(x'(t) - \frac{x}{t}\right) \overset{(15)}{=} \frac{1}{t}\left(f(u) - u\right),$$

D.h., löst $x(t)$ die DG (15), so löst $u(t) = \frac{x(t)}{t}$ die DG mit getr. Variablen

$$u'(t) = \frac{1}{t}(f(u) - u). \tag{16}$$

Wir bestimmen also $u(t)$ mit der Methode der Trennung der Variablen aus (16). Dann löst $x(t) = t \cdot u(t)$ die Euler–homogene DGL (15), denn

$$x' = tu' + u \overset{(16)}{=} f(u) - u + u = f\left(\frac{x}{t}\right).$$

Beispiel

Wir betrachten die DGL $x' = 1 + \frac{x}{t}$ mit der Anfangsbedingung $x(1) = x_0$, und wir suchen Lösungen auf $(0, \infty)$. Dann gilt

$$u(t) := \frac{x(t)}{t} \implies u' = \frac{x' \cdot t - x}{t^2} = \frac{1}{t^2}(t + x - x) = \frac{1}{t}.$$

Somit ist $u'(t) := \frac{1}{t},\ u(1) = x_0$ zu lösen. Die Lösung ist aber offensichtlich gegeben durch $u(t) = \ln(t) + x_0$. Folglich erhalten wir als Lösung für $x' = 1 + \frac{x}{t},\ x(1) = x_0$:

$$x(t) = t(\ln(t) + x_0) \quad \forall t \in (0, \infty).$$

Lineare Differentialgleichungen

Definition

Eine lineare DG ist eine DG der Form

$$x'(t) = p(t)x(t) + q(t), \tag{17}$$

wobei $p, q : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind. Ist $q(t) \equiv 0$ so heißt (17) homogene lineare DG. (17) heißt inhomogene lineare DG, falls $q \neq 0$.

Satz (Homogene lineare DG)

Jede Lösung einer homogenen, linearen DG $x' = p(t)x$ ist gegeben durch

$$x(t) = c \cdot e^{\int p(t)dt},$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ konstant und $\int p(t)dt$ eine Stammfunktion von p ist. Das AWP $x' = p(t)x$ mit der AB $x(t_0) = x_0$ hat genau eine Lösung $x : I \to \mathbb{R}$

$$x(t) = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}.$$

Beweis. $x' = p(t)x$ ist eine DGL mit getrennten Variablen.
Somit ist die Lösung des AWP's eindeutig gestimmt.
In der Tat erfüllt $x(t) = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^t p(s)\,ds}$ das AWP, denn

$$x'(t) \;=\; x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^t p(s)ds} \cdot \Big(\int_{t_0}^t p(s)ds\Big)' \;=\; x(t)p(t) \quad \text{und } x(t_0) = x_0.$$

D.h. aber, daß die allgemeine Lösung von $x'(t) = p(t)x(t)$ von der Gestalt $x(t) = c \cdot e^{\int p(t)\,dt}$ ist. □

Satz

Sei $x_s : I \to \mathbb{R}$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Linearen DG $x' = p(t)x + q$ mit $q \neq 0$. Dann erhält man alle Lösungen x der inhomogenen Gleichung mittels $x = x_s + x_c$ mit einer allgemeinen Lösung

$$x_c(t) := ce^{\int p(t)dt}$$

der homogenen Gleichung $x' = p(t)x$.

Beweis. $x - x_s$ löst die homogene lineare Gleichung. D.h. $x - x_s = x_c$. □

Wie findet man nun eine spezielle Lösung x_s der inhomogenen Gleichung $x' = p(t)x + q(t)$?

1. Methode: Variation der Konstanten

Wir betrachten eine Lösung $x(t) = c \cdot \mathrm{e}^{\int p(t)\,dt}$ der homogenen, linearen DG $x' = p(t)x$ und machen den folgenden Ansatz: Angenommen,

$$x_s(t) := c(t)\mathrm{e}^{\int p(t)\,dt}$$

löse die inhomogene, lineare DG $x' = p(t)x + q(t)$.
Man bestimmt daraus $c(t)$. Es gilt

$$\begin{aligned} p(t)x_s + q(t) \quad = \quad x_s' \quad &= \quad c'(t) \cdot \mathrm{e}^{\int p(t)\,dt} + c(t) \cdot p(t) \cdot \mathrm{e}^{\int p(t)\,dt} \\ &= \quad c'(t) \cdot \mathrm{e}^{\int p(t)\,dt} + p(t) \cdot x_s(t). \end{aligned}$$

Folglich ist $c'(t) = q(t) \cdot \mathrm{e}^{-\int p(t)\,dt}$ und somit $c(t) = \int q(t) \cdot \mathrm{e}^{-\int p(t)\,dt}\,dt$.
Mit diesem $c(t)$ ist $x_s(t) = c(t)\mathrm{e}^{\int p(t)\,dt}$ eine Lösung der inhomogenen, linearen DGL $x' = p(t)x + q(t)$.

Beispiel zur Variation der Konstanten

Wir betrachten die inhomogene, lineare DG und das AWP

$$x' = tx + te^{t^2} \quad \text{mit AB } x(0) = x_0. \tag{18}$$

Die allgemeine Lsg. der homogenen DG $x' = tx$ ist $x(t) = ce^{\int t dt} = ce^{\frac{1}{2}t^2}$.
Variation der Konstanten: Sei $x_s(t) = c(t)e^{\frac{1}{2}t^2}$ eine spezielle Lösung. Dann

$$x_s'(t) \;=\; c'(t)e^{\frac{t^2}{2}} + c(t)te^{\frac{t^2}{2}} \;=\; c'(t)e^{\frac{t^2}{2}} + tx_s(t) \;\overset{(18)}{\Longrightarrow}\; c'(t)e^{\frac{t^2}{2}} = te^{t^2}$$

Folglich ist $c' = te^{\frac{t^2}{2}} = (e^{\frac{t^2}{2}})'$. Also ist $c(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ eine Lösung für $c(t)$ und $x_s(t) = e^{t^2}$ ist eine spezielle Lösung der inhom., lin. DG. Damit ist $x(t) = e^{t^2} + ce^{\frac{t^2}{2}}$ allgemeine Lösung der inhomogenen DGL. Wir bestimmen die Konstante c aus der AB $x(0) = x_0$. Wegen $x_0 = 1 + c$ ist

$$x(t) = e^{\frac{t^2}{2}}\left(e^{\frac{t^2}{2}} + x_0 - 1\right).$$

die einzige Lösung des Anfangswertproblems (18).

2. Methode: Ansätze für x_s bei $p(t) \equiv p \neq 0$ konstant

Wir betrachten die inhomogene lineare DG $x'(t) = px(t) + q(t)$ mit $p \neq 0$ konstant.

(1) Ist die Störfunktion $q(t)$ ein Polynom $h(t)$ vom Grad m mit reellen Koeffizienten, so setze für $x_s(t)$ ein Polynom Q vom Grad m an.

(2) Ist $q(t)$ von der Form $h(t) \cdot e^{at},\ h \in \mathbb{R}[t]$, so setze für $x_s(t)$ die Funktion $Q(t) \cdot e^{at}$ $(p \neq a)$ bzw. $t \cdot Q(t) \cdot e^{at}$ $(p = a)$ an.

(3) Ist $q(t)$ von der Form $h(t) \cdot \cos(bt)$ oder $h(t) \cdot \sin(bt),\ h \in \mathbb{R}[t],\ b \neq 0$, so setze für $x_s(t)$ die Funktion $Q_1(t) \cdot \cos(bt) + Q_2(t) \cdot \sin(bt)$ an.

(4) Ist $q(t)$ von der Form $h(t) \cdot \cos(bt) \cdot e^{at}$ oder $h(t) \cdot \sin(bt) \cdot e^{at},\ h \in \mathbb{R}[t],\ b \neq 0$, so setze für $x_s(t)$ die Funktion $Q_1(t)e^{at} \cdot \cos(bt) + Q_2(t)e^{at} \cdot \sin(bt)$ an.

Dann setzt man den Ansatz in die inhomogene, lineare DGL ein und berechnet die Koeffizienten des Polynoms $Q(t)$ durch Koeffizientenvergleich.

Die Bernoullische Differentialgleichung

Definition

Eine Bernoullische DGL ist eine DGL des folgenden Types

$$x'(t) = p(t)x(t) + q(t)x(t)^{\alpha}, \tag{19}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup \{1\})$ und $p, q : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind.

Eine Bernoullische DGL wird durch die Substitution $u(t) := x(t)^{1-\alpha}$ behandelt. Man erhält

$$\begin{aligned} u' = (1-\alpha)x^{-\alpha} \cdot x' &= (1-\alpha)x^{-\alpha}(p(t)x + q(t)x^{\alpha}) \\ &= (1-\alpha)p(t)x^{1-\alpha} + (1-\alpha)q(t). \end{aligned}$$

Für $u(t)$ erhält man also eine lineare DGL

$$u' = (1-\alpha)p(t)u + (1-\alpha)q(t).$$

Diese wird gelöst mit $u(t)$. Dann erhält ist $x(t) = u(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ als Lösung der Bernoullischen DGL.

Beispiel zur Bernoullischen DG

Wir betrachten eine Bernoullische DG

$$x' = -x + t\sqrt{x}\,, \quad \text{d.h. } \alpha = 1/2. \tag{20}$$

Wir setzen $u(t) := x(t)^{\frac{1}{2}}$ und erhalten

$$u' = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}x' \;=\; \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(-x + t\sqrt{x}) \;=\; -\tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}t = -\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}t. \tag{21}$$

Für die homogene lineare DGL $u' = -\frac{1}{2}u$ erhält man als allgemeine Lösung $u(t) = c \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$. Um nun eine spezielle Lösung u_s der inhomogenen, linearen DGL (21) $u' = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}t$ zu finden, machen wir den folgenden Ansatz mit einem Polynom ersten Grades als Lösung: $u_s = at + b$ (siehe *2. Methode (1)*). Daraus ergibt sich

$$a \;= u_s' \;=\; -\frac{1}{2}u_s + \frac{1}{2}t \;=\; -\frac{1}{2}(at + b) + \frac{1}{2}t.$$

Dies hat zur Folge, daß $a = 1$ und $b = -2$ ist.

Weiter im Beispiel zur Bernoullischen DG

Damit haben wir mit $u_s(t) = t - 2$ eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL (21) gefunden. Somit ist $u(t) = t - 2 + c\ e^{-\frac{1}{2}t}$ eine allgemeine Lösung der inhomogenen, linearen DGL (20), und wir erhalten

$$x(t) = \left(t - 2 + c\ e^{-\frac{1}{2}t}\right)^2$$

als allgemeine Lösung der Bernoullischen DG (20) $x' = -x + t\sqrt{x}$.

Exakte Differentialgleichung

Sei $V = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein differenzierbares Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$.
Falls es eine differenzierbare Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\mathrm{grad} F(x^1, x^2) = V(x^1, x^2) = \left(P(x^1, x^2), Q(x^1, x^2)\right),$$

so gilt wegen des Lemmas von Schwarz

$$\frac{\partial P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2 \partial x^1} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^1 \partial x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x^1}. \tag{22}$$

Bemerkung

Ist die offene Menge U sternförmig, so findet man zu jedem diff.-baren Vektorfeld $V = (P, Q) : U \to \mathbb{R}^2$, welches $\frac{\partial P}{\partial x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x^1}$ erfüllt, auch eine Funktion $F \in C^2(U, \mathbb{R})$ mit $V = \mathrm{grad} F$.
F heißt dann Potentialfunktion von V.

Exakte Differentialgleichung

Definition

Seien $P, Q \in C^1(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, zusammenhängend und gelte auf U

$$\frac{\partial P}{\partial x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x^1}, \quad \text{und} \quad Q \neq 0. \tag{23}$$

Dann heißt die DGL

$$x'(t) = -\frac{P(t, x(t))}{Q(t, x(t))} \tag{24}$$

exakte Differentialgleichung. (23) ist die Integrabilitätsbedingung.

Satz

Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R})$ mit $\frac{\partial F}{\partial x^1} = P$ und $\frac{\partial F}{\partial x^2} = Q$. Dann erhält man eine Lösung der exakten DG (24) mit der AB $x(t_0) = x_0$ durch Auflösen der Gleichung

$$F(t, x) - F(t_0, x_0) = 0$$

nach x.

Beweis. Wegen des Lemmas von Schwarz ist die Integrabilitätsbedingung (23) erfüllt, d.h. es liegt eine exakte DG vor
Da $\frac{\partial F}{\partial x^2}(t_0, x_0) = Q(t_0, x_0) \neq 0$, folgt nach dem Satz über implizite Funktionen die eindeutige Auflösbarkeit von $F(t,x) - F(t_0, x_0) = 0$ nach x in $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Das heißt, es existiert eine C^1–Funktion $x : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $x(t_0) = x_0$ und $F(t, x(t)) - F(t_0, x_0) = 0$.
Differenzieren nach t ergibt

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x^1}(t, x(t))}_{=P(t,x(t))} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x^2}(t, x(t))}_{=Q(t,x(t))} \cdot x'(t) = 0$$

und wir erhalten $x'(t) = -\frac{P(t,x(t))}{Q(t,x(t))}$. Somit erfüllt die Auflösung nach $x(t)$ die exakte DG. $\square$

Beispiel zur exakten DG

Wir betrachten die DGL $x' = -\dfrac{x+t+1}{x+t}$ mit AB $x(t_0) = x_0$ und $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+y) > 0\}$. Diese ist exakt:

$$P(x_1,x_2) = x_1 + x_2 + 1, \quad Q(x_1,x_2) = x_1 + x_2, \text{ also } \tfrac{\partial P}{\partial x_2} = 1 = \tfrac{\partial Q}{\partial x_1}.$$

Eine bis auf eine Konst. c eindeutige Potentialfkt. F von (P,Q) ist:

$$F(x_1,x_2) \; = \; \tfrac{1}{2}(x_1+x_2)^2 + x_1 + c$$

Wir lösen $0 = F(t,x) - F(t_0,x_0) = \frac{1}{2}(t+x)^2 + t - \frac{1}{2}(t_0+x_0)^2 - t_0$ nach x auf und erhalten $(t+x)^2 = 2(t-t_0) + (t_0+x_0)^2$ und somit

$$x(t) = \sqrt{(t_0+x_0)^2 + 2(t_0-t)} - t,$$

da $x + t > 0$. $x(t)$ ist Lösung der gegebenen DGL und der Definitionsbereich von x ist $\{t \in \mathbb{R} \mid t_0 + \frac{(t_0+x_0)^2}{2} \geq t\}$.

Exakte Differentialgleichung: Integrierender Faktor

Ist die Bedingung $\frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_1}$ für die DG $x' = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$ nicht erfüllt, so kann die Exaktheit durch die Multiplikation mit $\lambda \in C^1(U)$ erreicht werden.

Definition

$\lambda \in C^1(U)$, $\lambda \neq 0$ heißt integrierender Faktor (Eulerscher Multiplikator) der DG $x' = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$, falls $\frac{\partial(\lambda P)}{\partial x_2} = \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x_1}$.

Existiert ein solcher Faktor, so löst man die exakte DG $x' = -\frac{\lambda P(t,x)}{\lambda Q(t,x)}$.

Beispiel

Sei $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1,\ x_2 > 0\}$. Wir betrachten die DGL

$$x' = -\frac{5t^4 + 2x^3}{3tx^2}. \tag{25}$$

Hier ist $\frac{\partial P}{\partial x_2} = 6x_2^2 \neq \frac{\partial Q}{\partial x_1} = 3x_2^2$, das heißt (25) ist nicht exakt. Aber die Funktion $\lambda(x_1, x_2) = x_1$ ist ein integrierender Faktor für die DGL (25). Somit können wir die exakte DGL $x' = -\frac{5t^5 + 2tx^3}{3t^2x^2}$ lösen.

Existenz und Eindeutigkeitssätze für gewöhnliche DG'en

Wir haben gesehen, wie sich bestimmte gewöhnliche DG'en (eindeutig) lösen lassen. Im folgenden Abschnitt wollen wir allgemeine Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen machen.
Dazu muss die "rechte Seite" f eine Bedingung erfüllen, die etwas stärker ist als die der Stetigkeit, und die wir schon vom Schrankensatz kennen.

Definition

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ *und* $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$.

f *heißt auf einer Teilmenge* $K \subset \Omega$ *bez.* x *Lipschitz-stetig mit der Lipschitzkonstanten* $L_K \geq 0$, *wenn*

$$\|f(x_1,t) - f(x_2,t)\| \leq L_K \|x_1 - x_2\| \qquad (*)$$

für alle $(x_1,t), (x_2,t) \in K$.
f *heißt auf* Ω *bez.* x *lokal Lipschitz-stetig, wenn es zu jedem* $p \in \Omega$ *eine Umgebung* U *von* p *gibt, so dass* $(*)$ *für alle* $(x_1,t), (x_2,t) \in U \cap \Omega$ *mit einer Konstanten* L_U *(die von* U *abhängen kann).*

Bemerkung zur Lipschitzstetigkeit

Abgesehen von dem herkömmlichen Stetigkeitsbegriff hatten wir auch den der gleichmässigen Stetigkeit kennengelernt: Eine Abbildung f zwischen zwei metrischen Räumen heißt gleichmässig stetig, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $f(K_\delta(x)) \subset K_\varepsilon(f(x))$ für alle $x \in X$. D.h. das Wachstum der Abbildung ist gleichmässig auf ganz X. Es gilt:

Lipschitzstetgigkeit $\Rightarrow$ gleichm. Stetigkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit.

Die erste Implikation beweist man, indem man $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ wählt.

Beispiele:

- $f(x) = \cos(x)$ ist Lipschitz-stetig auf ganz $\mathbb{R}$ mit Lipschitzk. $L = 1$.
- $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht gleichmässig stetig, denn $f(x+\delta) - f(x) = \frac{1}{x+\delta} - \frac{1}{x} = \frac{\delta}{x(x+\delta)} \to_{x\to 0} \infty$.
- $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{x}$ ist gleichmässig stetig (als stetgie Abbildung auf einem Kompaktum), aber nicht Lipschitz stetig auf Intervallen $(0, a)$ und damit nicht lokal Lipschitz stetig, denn $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = \left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right| \to_{x,y\to 0} \infty$.

Lipschitzstetigkeit

Satz (Lipschitzbedingung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1, d.h.stetig diff.-bar. Ist $K \times [a, b] \subset \Omega$ mit K kompakt und konvex, dann ist f auf $K \times [a, b]$ bez. x Lipschitz-stetig. Insbesondere ist f auf Ω bez. x lokal Lipschitz-stetig.

Beweis. Der Beweis beruht auf dem Schrankensatz, der sich wiederum aus dem MWS ergab: Da $K \times [a, b] \subset \Omega$ kompakt und konvex ist und f stetig diff.-bar., ist nach dem Schrankensatz f auf $K \times [a, b] \subset \Omega$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L. D.h. aber, daß

$$\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq L\|(x_1, t) - (x_2, t)\| = L\|(x_1 - x_2, 0)\| = L\|x_1 - x_2\|,$$

und somit ist f auf $K \times [a, b]$ Lipschitz-stetig bzgl. x. $\square$

Gleichmässige Konvergenz von Funktionenfolgen

Um den Existenzsatz zu beweisen, brauchen wir noch einige Vorbemerkungen.

Definition

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume und $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Abbildungen zwischen diesen. Man sagt f_n konvergiert gleichmässig gegen eine Grenzfunktion f genau dann, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon, \ \forall x \in X.$$

Dann gilt:

Satz

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume und $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Abbildungen, die gleichmässig gegen eine Grenzfunktion $f : X \to Y$ konvergiert. Dann ist f stetig.

Beweis. Wir zeigen, daß f in einem beliebig fixierten $x_0 \in X$ stetig ist.
Sei also $\varepsilon > 0$.
Da f_n gleichmässig gegen f konvergiert, existiert ein $n_\varepsilon > 0$ mit

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \tfrac{\varepsilon}{3} \; \forall n \geq n_\varepsilon, \; \forall x \in X.$$

Da ausserdem auch f_{n_ε} stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$d_Y(f_{n_\varepsilon}(x), f_{n_\varepsilon}(x_0)) < \tfrac{\varepsilon}{3} \; \forall x \in X \text{ mit } d_X(x, x_0) < \delta.$$

D.h. aber, daß für alle $x \in X$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$ gilt, daß

$$\begin{aligned} & d_Y(f(x), f(x_0)) \\ \leq \; & d_Y(f(x), f_{n_\varepsilon}(x)) + d_Y(f_{n_\varepsilon}(x), f_{n_\varepsilon}(x_0)) + d_Y(f_{n_\varepsilon}(x_0), f(x_0)) \\ < \; & \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} \; = \; \varepsilon \end{aligned}$$

Damit ist f stetig. $\square$

Bemerkung: Punktweise vs. gleichmässige Konvergenz

- Eine Folge $\{f_n\}$ von Abbildungen konvergiert punktweise gegen eine Abbildung f, falls $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in X$.
- Gleichmässige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz.
- Aber: Sei f_n eine Folge von *stetigen* Abbildungen, die punktweise gegen f konvergieren. Dann muß f nicht unbedingt stetig sein.
  Beispiel: Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$. Dann konvergiert f_n punktweise gegen die nicht stetige Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [0,1) \\ 1, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

Der Raum stetiger Abbildungen auf kompakten Mengen

Seien X und Y zwei metrische Räume und bezeichne

$$C(X,Y) := \{f : X \to Y \mid f \textit{ stetig }\}$$

die Menge der Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y.
Ist X kompakt, dann definiert

$$d_\infty(f,g) := \max_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$$

eine Metrik auf $C(X,Y)$, die Maximumsmetrik.

Satz

Sei X ein kompakter metrischer Raum und Y ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist $(C(X,Y), d_\infty)$ ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis. Wir müssen zeigen, daß jede Cauchyfolge in $C(X, Y)$ eine stetige Grenzfunktion hat.
Sei $\{f_n\}$ eine Cauchyfolge in $C(X, Y)$ und sein $\varepsilon > 0$. D.h. es gibt ein $n_\varepsilon > 0$, so daß für alle $x \in X$ gilt

$$d_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon.$$

D.h. aber, daß für jedes $x \in X$ die Folge $f_n(x)$ eine Cauchyfolge in Y ist und daher einen Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ hat.
Da die Metrik d_Y stetig ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} d_Y(f_n(x), f(x)) &= d_Y(f_n(x), \lim_{m\to\infty} f_m(x)) \\ &= \lim_{m\to\infty} d_Y(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon \end{aligned}$$

für jedes $x \in X$ und jedes $n \geq n_\varepsilon$. D.h. f_n konvergiert gleichmässig gegen f. Aufgrund des vorigen Satzes ist f stetig. $\square$

Der Satz von Picard–Lindelöf

Satz (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard–Lindelöf)

Sei $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *stetig,* $(x_0, t_0) \in U$ *und* $a, b > 0$ *so, daß*

$$Q := \overline{K_b(x_0)} \times [t_0 - a, t_0 + a] \subset U,$$

wobei $\overline{K_b(x_0)} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq b\}$ *die abgeschl. Kugel vom Radius* b *um* x_0 *ist. Sei* F *Lipschitz-stetig auf* Q *bzgl. der* x*–Variablen und*

$$M := \max_{(y,t)\in Q} \|F(y,t)\| \quad \textit{und} \quad \sigma := \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Dann hat das AWP $x' = F(x,t),\ x(t_0) = x_0$ *genau eine* C^1*-Lösung*

$$x : [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

für die gilt $x(t) \in \overline{K_b(x_0)}$ *für alle* $t \in [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$.

Beweis. Wir wollen den Banach'schen Fixpunktsatz auf eine Abbildung zwischen Funktionenräumen anwenden. Sei $I := [x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]$. Dazu betrachten wir die abgeschlossene Kugel K in $C(I, \mathbb{R}^n)$ vom Radius b um die Funktion, die konstant x_0 ist, d.h.

$$K = \{\varphi \in C(I, \mathbb{R}^n) | \, \|\varphi(t) - x_0\| \leq b \ \ \forall t\}$$

Da K eine abgeschlossene Teilmenge im vollständigen metrischen Raum $(C(I, \mathbb{R}^n), d_\infty)$ ist, ist K selbst ein vollständiger metrischer Raum. Wir betrachten nun den Integraloperator

$$\begin{aligned} H : K &\to C(I, \mathbb{R}^n) \\ x &\mapsto \left(H(x) : t \mapsto x_0 + \textstyle\int_{t_0}^t F(x(s), s)\, ds \right). \end{aligned}$$

Wegen der Wahl von $\sigma := \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ gilt $H : K \to K$, denn

$$\|H\varphi(t) - x_0\| = \| \int_{t_0}^t F(\varphi(s), s)\| \leq M\sigma \leq M\frac{b}{M} = b.$$

Ein Fixpunkt von H ist nun eine Lösung des AWP's, denn

$$x(t) = Hx(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(x(s), s)\, ds \iff x'(t) = F(x(t), t).$$

Weiter im Beweis: Ist L die Lipschitzkonstante von F, so ist H Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstanter $L\sigma$, denn

$$\|Hx(t)-Hy(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|F(x(s),s)-F(y(s),s)\| ds \leq L\int_{t_0}^{t} \|x(s)-y(s)\| ds.$$

und somit $\|Hx - Hy\|_\infty \leq L\sigma\|x-y\|_\infty$. Um mittels des Banachschen Fixpunktsatzes einen Fixpunkt zu finden, muß H kontraktiv sein. Im allgemeinen ist H aber nicht kontraktiv [2]. Wir führen daher eine neue Norm ein, bzgl. der H kontraktiv ist. Dazu wählen wir ein $\alpha \in C(I, [r,s])$ und definieren die Norm auf $C(I, \mathbb{R})$

$$\|\varphi\|_\alpha := \max_{t\in I} \|\mathrm{e}^{\alpha(t)}\varphi\left(t\right)\|.$$

Diese ist äquivalent zu $\|.\|_\infty$, denn $e^r\|\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\alpha \leq e^s\|\varphi\|_\infty$. Damit ist $(C(I, \mathbb{R}^n), \|.\|_\alpha)$ ein Banachraum und $K \subset C(I, \mathbb{R}^n)$ abgeschlossen bezüglich $\|.\|_\alpha$. D.h. (K, d_α) ist ein vollständiger metrischer Raum.

[2] Bemerkung: Natürlich könnten wir die Intervallgrenze, d.h. σ, so klein wählen, daß $L\sigma < 1$ und damit wäre H kontraktiv. Dies ergibt eine "lokale Version" des Satzes.

Ende des Beweises: Wir wählen nun $\alpha(t) := -L|t-t_0|$, d.h. $\alpha \in C\left(I, [\mathrm{e}^{-L\sigma}, 1]\right)$. Multiplizieren wir nun die Ungleichung auf der vorigen Folie mit $e^{-L|t-t_0|}$, so erhalten wir für alle $t \in I$

$$
\begin{aligned}
e^{-L|t-t_0|} \|Hx(t) - Hy(t)\| &\leq Le^{-L|t-t_0|} \int_{t_0}^{t} e^{(L-L)|s-t_0|} \|x(s) - y(s)\| \, ds \\
&\leq Le^{-L|t-t_0|} \underbrace{\left| \int_{t_0}^{t} e^{L|s-t_0|} ds \right|}_{=\frac{1}{L}\left(e^{L|t-t_0|}-1\right)} \|x - y\|_\alpha \\
&\leq \left(1 - e^{-L\sigma}\right) \|x - y\|_\alpha
\end{aligned}
$$

D.h. aber, daß H <u>kontraktiv</u> ist bezüglich d_α:

$$
\|Hx - Hy\|_\alpha \leq \underbrace{(1 - e^{-L\sigma})}_{<1} \|x - y\|_\alpha
$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz ist H konstant oder hat genau einen Fixpunkt $x \in K$ und somit genau eine Lösung x des Anfangswertproblems $x' = F(x,t)$ und $x(t_0) = x_0$ mit dem Definitionsbereich $I = [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$ und dem Bild $x(I) \subset \overline{K(x_0, b)}$). $\square$

Approximative Lösung des AWP's

Folgerung

Unter den Voraussetzungen des Satzes von Picard Lindelöf liefert der Banach'sche Fixpunktsatz ein Verfahren zur Approximation der Lösung des Anfangswertproblems $x' = F(x,t)$, $x(t_0) = x_0$: Sei

$$\varphi_0(t) \equiv x_0, \quad \varphi_1 := H\varphi_0, \quad \dots, \quad \varphi_n := H\varphi_{n-1}, \ \dots$$

iterativ definiert. Dann konvergiert φ_n gleichmäßig gegen die Lösung x des AWP's in $(C(I, \overline{K(x_0, b)}), \|.\|_\infty)$. Die Abschätzungen in jedem Schritt liefern

$$\|x(t) - \varphi_n(t)\| \ \leq \ \frac{M\ L^n}{(n+1)!}|t - t_0|^{n+1}.$$

Zum Beweis dieser Folgerung benutzt man den Beweis des Banach'schen Fixpunktsatzes und eine Induktion über n.

Lokale Version des Satzes von Picard-Lindelöf

Folgerung (Picard Lindelöf lokal)

Sei $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, die lokal Lipschitz-stetig bzgl. x ist. Dann existiert zu jeder Anfangsbedingung $(x_0, t_0) \in U$ ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutige Lösung $\varphi_{x_0} : \ (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ des AWP's $x' = F(x, t)$ mit $x(t_0) = x_0$.

Beweis. Da f lokal Lipschitz-stetig ist, finden wir zu jedem $(x_0, t_0) \in U$ eine Umgebung V auf der f Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante L. Darin finden wir nun eine kompakte Menge $Q = \overline{B_\delta(x_0)} \times [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, so daß $\varepsilon \leq M/\delta$ und $L\varepsilon < 1$, wobei M wie im Beweis des Satzes. Im Beweis haben wir auch geshen, daß der Integraloperator H für dieses ε kontraktiv mit Kontraktionskonstante $L\varepsilon < 1$ ist. □

Eindeutigkeit der Lösung

Satz (Eindeutigkeitssatz)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und bez. x lokal Lipschitz-stetig. Seien $\varphi, \psi : I = (a, b) \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen von $x' = f(x, t)$ mit $\varphi(t_0) = \psi(t_0) = x_0$ für ein $t_0 \in I$. Dann gilt $\varphi = \psi$.

Beweis. Wir betrachten die Menge $D := \{t \in I \mid \varphi(t) = \psi(t)\}$. Dann ist

- D nicht leer, denn $t_0 \in D$,
- D ist abgeschlossen, denn φ und ψ sind stetig und $D = (\varphi - \psi)^{-1}(0)$.
- D ist offen in I: Sei dazu $t \in D$. Dann sind φ, ψ Lösungen des AWP's $x' = F(x, t)$, $x(t) = \varphi(t) = \psi(t)$. Nach Picard–Lindelöf lokal existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß $\varphi \equiv \psi$ auf $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset I$. Dann ist aber $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset D$. D.h. D ist offen in I.

Damit ist D nicht leer, offen und abgeschlossen im Intervall I.
Somit ist $D = I$. □

Fortsetzung zur maximalen Lösung

Definition

Eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ *des AWP's (*)* $x' = F(x,t)$, $x(t_0) = x_0$, *heißt maximal, falls für jede andere Lösung* $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ *von (*) gilt, daß* $J \subset I$.

Folgerung (Satz über die maximale Lösung)

Sei $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl.* x. *Dann existiert zu jedem* $(x_0, t_0) \in U$ *genau eine maximale Lösung* $\varphi_{x_0} : (a_{x_0}, b_{x_0}) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *des AWP's* $x' = F(x,t)$, $x(t_0) = x_0$.

Beweis. Sei $(x_0, t_0) \in U$. Wir definieren die folgenden Zahlen

$$\begin{aligned} a_{x_0} &:= \inf\{a \in \mathbb{R} \mid \exists \text{Lsg. des AWP's } \varphi : (a,b) \to \mathbb{R}\} \\ b_{x_0} &:= \sup\{b \in \mathbb{R} \mid \exists \text{Lsg. des AWP's } \varphi : (a,b) \to \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

mit $a_{x_0} < x_0 < b_{x_0}$. Auf $I_{\max} := (a_{x_0}, b_{x_0}) \subset \mathbb{R}$ definieren wir die Abb.

$$\begin{aligned} \varphi_{x_0} : I_{\max} &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \varphi(t), \quad \text{falls } t \in (a,b) \text{ und } \varphi : (a,b) \to \mathbb{R}^n \text{ eine} \\ &\qquad\qquad \text{Lsg. des AWP's } x' = F(x,t),\ x(t_0) = x_0 \end{aligned}$$

Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes ist diese wohldefinert, da zwei auf einem Intervall gegebene Lösungen übereinstimmen. Alle Lösungen sind C^1–Abbildungen, und damit auch φ_{x_0}.
Desweiteren löst φ_{x_0} das Anfangswertproblem $x' = F(x,t)$, $x(t_0) = x_0$ auf dem gesamten (und maximal möglichen) Intervall (a_{x_0}, b_{x_0}). $\square$

Globale Existenz- und Eindeutigkeit

Satz

Sei $I = (a, b)$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $F : \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig auf jeder Menge der Form $\mathbb{R}^n \times J$, wobei $J \subsetneq I$ ein kompaktes Intervall ist. Dann existiert zu jeder Anfangsbedingung $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times I$ eine eindeutige, auf ganz I definierte maximale Lösung $\varphi_{x_0} : I \to \mathbb{R}^n$ des AWP's $x' = F(x, t)$ mit $x(t_0) = x_0$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus dem Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf: Sei $J \subset I$ ein kompaktes Intervall. Da $f : \mathbb{R}^n \times J \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig ist, ist der Integraloperator H aus dem Beweis eine Lipschitz-stetige Abbildung von $C(J, \mathbb{R}^n) \to C(J, \mathbb{R}^n)$. Wie im Beweis weist man dann nach, daß H kontraktiv ist (bzgl. der geänderten Norm). Somit erhält man für jedes kompakte $J \subset I$ eine eindeutige Lösung $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ des AWP's. Diese kann man nun wie im Satz über die maximale Lösung zu einer Lösung auf I fortsetzen. $\square$

Maximale Lösung des linearen AWP's

Folgerung (Maximale Lösung des linearen AWP's)

Sei $I = (a, b)$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times I$, $A : I \to Mat_n(\mathbb{R})$ und $B : I \to \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen. Dann besitzt das lineare AWP

$$x' = A(t)x + B(t), \quad x(t_0) = x_0$$

genau eine maximale Lösung $\varphi_{x_0} : I \to \mathbb{R}^n$.

Beweis. $f(x, t) = A(t)x + B(t)$ ist Lipschitz-stetig auf jeder Menge der Form $\mathbb{R}^n \times J$ mit einem kompakten Intervall $J \subsetneq I$:

$$\|f(y, t) - f(x, t)\| = \|A(t)y - A(t)x\| = \|A(t)(y - x)\| \leq \max_{t \in J} \|A(t)\|_\infty \|y - x\|,$$

wobei $\|A\|_\infty := \max_{\xi \in \mathbb{R}^n, \|\xi\|=1} \|A\xi\|$. Die Lipschitz-Konstante ist $L := \max_{t \in J} \|A(t)\|_\infty$. Die Behauptung folgt dann aus dem vorigen Satz. $\square$

Existenzsatz von Cauchy und Peano

Zum Abschluß geben wir noch einen allgemeineren Existenzsatz an, ohne ihn zu beweisen. Die Voraussetzungen sind schwächer (Stetigkeit statt Lipschitz-Stetigkeit), dafür erhält man keine Eindeutigkeitsaussage.

Satz (Existenzsatz von Cauchy und Peano)

Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *eine offene Menge und* $(x_0, t_0) \in U$. *Die Abbildung* $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *sei stetig auf dem kompakten Bereich*

$$Q := \overline{K_b(x_0)} \times [t_0 - a, t_0 + a] \subset U.$$

Bezeichne wieder $M := \max_{(y,t)\in Q} \|F(y,t)\|$ *und* $\sigma := \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. *Dann hat das AWP* $x' = F(x,t),\ x(t_0) = x_0$ *<u>mindestens eine</u> eine* C^1*-Lösung*

$$x : [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

und diese erfüllt $\|x(t) - x_0\| \leq b$ *für alle* $t \in [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$.

Für einen Beweis siehe H. Amann: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*.

Beispiel zur Mehrdeutigkeit der Lösung

Wir betrachten die stetige Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def. durch $F(x) = \sqrt{|x|}$ und das AWP

$$x' = F(x) = \sqrt{|x|}, \quad x(t_0) = 0.$$

Wir haben gesehen, daß F nicht lokal Lipschitz-stetig ist, so daß wir nicht den Satz von Picard-Lindelöf anwenden können. Nach dem Satz von Peano gibt es jedoch mindestens eine Lösung, z.B. $x(t) \equiv 0$. Man findet jedoch unendlich viele weitere Lösungen, denn für jede Konstante $c \geq t_0$ ist

$$x_c(t) := \begin{cases} \frac{(t-c)^2}{4} & \text{für} \quad t \geq c \\ 0 & \text{für} \quad t \leq c \end{cases}$$

eine Lösung des AWP's.

Abhängigkeit der Lösung von den AB'en

Wir wollen nun untersuchen, wie die Lösung von den Anfangswerten abhängt. Dazu benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma (Gronwall–Ungleichung)

Seien $u, v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ stetige, nichtnegative Funktionen und gelte

$$v(t) \leq c + \int_a^t v(s)u(s)\,ds \quad \forall t \in [a, b],\ c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \text{ konstant}.$$

Dann gilt

$$v(t) \leq c \cdot e^{\int_a^t u(s)\,ds} \quad \forall t \in [a, b].$$

Beweis. 1. Fall: $c > 0$. Wir betrachten die Funktion

$$f(t) := c + \int_a^t v(s)u(s)\,ds \ > \ 0.$$

Es gilt $0 < c \leq f(t)$ und $v(t) \leq f(t)$ für alle $t \in [a,b]$. Dann gilt

$$f'(t) = v(t) \cdot u(t) \leq f(t) \cdot u(t) \quad \text{und deshalb} \quad (\ln f(t))' = \frac{f'(t)}{f(t)} \leq u(t).$$

Durch Integration erhält man

$$\ln(f(t)) - \ln(f(a)) \leq \int_a^t u(s)\,ds, \ \text{ also } \ f(t) \leq f(a) \cdot e^{\int_a^t u(s)\,ds}$$

Folglich ist $v(t) \leq f(t) \leq c \cdot e^{\int\limits_a^t u(s)\,ds}$ mit $c = f(a)$.
2. Fall: $c = 0$. Hier ist zu zeigen, dass $v(t) \equiv 0$. Nach Voraussetzung ist

$$v(t) \leq \int_a^t v(s)u(s)\,ds \leq \varepsilon + \int_a^t v(s)u(s)\,ds \quad \forall t \in [a,b],\ \varepsilon > 0.$$

Nach dem 1. Fall folgt dann $0 \leq v(t) \leq \varepsilon \cdot e^{\int_a^t u(s)\,ds}\ \forall\, \varepsilon > 0$. Lassen wir ε gegen 0 laufen, so folgt $v(t) \equiv 0$. □

Stetige Abhängigkeit der Lösung von der AB

Satz

Sei $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ auf U stetig und Lipschitz-stetig bzgl. x mit der Lipschitzkonstanten L. Seien (x_0, t_0), $(y_0, t_0) \in U$ und

$$\varphi_{x_0}\ ,\ \varphi_{y_0} : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Lsg'en der DG $x' = F(x, t)$ mit den AB'en $\varphi_{x_0}(t) = x_0$ bzw. $\varphi_{y_0}(t) = y_0$. Dann gilt

$$\|\varphi_{x_0}(t) - \varphi_{y_0}(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| \cdot \mathrm{e}^{L|t-t_0|} \quad \forall\, t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]\,.$$

Folgerung (Stetige Abhängigkeit der Lösung von der AB)

Sei F wie im Satz und $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von AB'en, die gegen die AB x_0 konvergiert. Sei φ_{x_n} die Lösung des AWP's $x' = F(x, t)$, $x(t_0) = x_n$. Dann konvergiert $\{\varphi_{x_n}\}$ gleichmäßig gegen φ_{x_0} auf jedem kompakten Intervall $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, auf dem alle Lösungen definiert sind.

Beweis. $v(t) := \|\varphi_{x_0}(t) - \varphi_{y_0}(t)\|^2$ ist diff.-bar. Für $t_0 \leq t < t_0 + \varepsilon$ gilt:

$$\begin{aligned}
v(t) &= v(t_0) + \int_{t_0}^{t} v'(s)ds \\
&= v(t_0) + 2\int_{t_0}^{t} \langle \varphi_{x_0}(s) - \varphi_{y_0}(s), \varphi'_{x_0}(s) - \varphi'_{y_0}(s)\rangle \, ds \\
&\overset{\text{CSU}}{\leq} v(t_0) + 2\int_{t_0}^{t} \|\varphi_{x_0}(s) - \varphi_{y_0}(s)\| \cdot \|\varphi'_{x_0}(s) - \varphi'_{y_0}(s)\| \, ds \\
&= v(t_0) + 2\int_{t_0}^{t} \|\varphi_{x_0}(s) - \varphi_{y_0}(s)\| \|F(\varphi_{x_0}(s), s) - F(\varphi_{y_0}(s), s)\| ds \\
&\leq v(t_0) + 2L\int_{t_0}^{t} \underbrace{\|\varphi_{x_0}(s) - \varphi_{y_0}(s)\|^2}_{=v(s)} \, ds
\end{aligned}$$

Aus der Gronwall–Ungleichung für $u(s) \equiv 2L$ folgt dann

$$v(t) \leq v(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} 2L\, ds} = v(t_0) \cdot e^{2L(t-t_0)}.$$

Damit erhält man die Behauptung $\|\varphi_{x_0}(t) - \varphi_{y_0}(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| \cdot e^{L(t-t_0)}$ für alle $t_0 \leq t < t_0 + \varepsilon$. Analog geht man für $t_0 - \varepsilon < t \leq t_0$ vor. $\square$

Beispiel zur Abhängigkeit der Lsg. von den AB's

Wir betrachten das folgende Vektorfeld auf dem $\mathbb{R}^2$:

$$V(x,y) := (-y,x) + (r^2(x,y)-1)\,(x,y)\,,$$

wobei $r^2(x,y) := x^2+y^2$. Wir suchen die Integralkurven von V durch einen Punkt $(x_0,0)\in\mathbb{R}^2$, $x_0>0$, d.h. wir müssen das autonome AWP

$$\gamma_{x_0}'(t) = V(\gamma_{x_0}(t)), \quad \gamma_{x_0}(0) = (x_0,0) \tag{26}$$

lösen. Schreiben wir $\gamma_{x_0} = (x,y)$, so ist das AWP

$$\begin{array}{rcl} x' &=& -y+(r^2-1)x, \\ y' &=& x+(r^2-1)y \end{array}\ , \quad x(0)=x_0 \quad y(0)=0$$

zu lösen. Wir machen folgenden Ansatz für die Lösung γ_{x_0}:

$$\gamma_{x_0}(t) \;=\; h(t)(\cos(t),\sin(t))$$

für eine Funktion $h: I\to\mathbb{R}$ mit $h(0)=x_0$.

Dann gilt $r^2(\gamma_{x_0}(t)) = h^2(t)$. Ist $\gamma_{x_0}(t) = h(t)(\cos(t), \sin(t))$ eine Integralkurve von V, so gilt

$$\begin{aligned}
\gamma_{x_0}'(t) &= h'(t)(\cos(t), \sin(t)) + h(t)(-\sin(t), \cos(t)) \\
&\overset{(26)}{=} h(t)(-\sin(t), \cos(t)) + (h^2(t) - 1)h(t)(\cos(t), \sin(t))
\end{aligned}$$

Also muß h das autonome AWP $h' = h(h^2 - 1), \quad h(0) = x_0$ erfüllen. Dies löst man mittels Trennung der Variablen und erhält

$$h(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{e^{-2t} - \left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)}}.$$

Ist nun $x_0 \leq 1$, so ist $\left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right) \leq 0$ und damit ist $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Ist dagegen $x_0 > 1$, so ist $0 < \left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right) < 1$ und damit ist h nur definiert auf dem Intervall $I = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)\right) \subset \mathbb{R}$ um $t_0 = 0$.

Wir unterscheiden nun drei Fälle für die Integralkurven $\gamma_{x_0}(t) = h(t)(\cos(t), \sin(t))$:

- $\underline{x_0 = 1}$: Hier ist $h(t) \equiv 1$ und die Integralkurve ist ein Kreis.
- $\underline{0 < x_0 < 1}$: Hier sind die Integralkurven $\gamma_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ Spiralen, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Das Quadrat des Abstandes zum Nullpunkt $r^2(t) := r^2(\gamma_{x_0}(t))$ ist

$$r^2(t) = h^2(t) = \frac{e^{-2t}}{e^{-2t} - \left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)} = \frac{1}{1 - e^{2t}\left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)}$$

und erfüllt $r^2(t) \to_{t\to-\infty} 1$ und $r^2(t) \to_{t\to\infty} 0$. D.h. die Spiralen laufen für $t \to \infty$ in die Null und nähern sich für $t \to -\infty$ dem Einheitskreis an.
- $\underline{x_0 > 1}$: Die Integralkurven $\gamma_{x_0} : \left(-\infty, -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)\right) \to \mathbb{R}^2$ sind Spiralen, die sich für $t \to -\infty$ dem Einheitskreis annähern, und für $t \to -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)$ in endlicher Zeit gegen ∞ gehen.

Lineare Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^n$

Wir haben Lösungsmethoden für lineare Differentialgleichungen in $\mathbb{R}$ kennengelernt. In diesem Kapitel verallgemeinern wir dies und behandeln lineare Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^n$.
Sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und

$$A : I \longrightarrow Mat_n(\mathbb{R}), \quad b : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

stetige Abbildungen. Dann heißt

$$\begin{array}{lcll} x' & = & A(t)x & \text{homogenes, lineares DGL System,} \\ x' & = & A(t)x + b(t) & \text{inhomog., lin. DGL System mit Störfkt. } b(t). \end{array}$$

Falls $A(t) \equiv A \in Mat_n(\mathbb{R})$, so sagt man, das System hat konstante Koeffizienten.
Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, daß es zu jeder AB $x(t_0) = x_0$ mit $t_0 \in I$ genau eine maximale Lösung des linearen Systems gibt, die auf ganz I definiert ist.

Struktur des Lösungsraumes linearer Systeme

Satz (Struktur des Lösungsraumes linearer Systeme)

Die Menge V der maximalen Lösungen $x : I \to \mathbb{R}^n$ des linearen homogenen Systems (*) $x' = A(t)x$ ist ein n-dimensionaler reeller Vektorraum.
Die Menge der maximalen Lösungen des linearen inhomogenen Systems (**) $x' = A(t)x + b(t)$ ist der affine Raum $\mathcal{A}^n = x_s + V^n$ wobei x_s eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung ist.

Beweis. Sind x_1 und x_2 zwei Lösungen von $(*)$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, so ist auch $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ eine Lösung von $(*)$. Zu jedem Vektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existiert genau eine max. Lösung φ_{x_0}, d.h. die lineare Abb. $x_0 \to \varphi_{x_0}$ ist ein VR-Isomorphsmus, und somit ist $\dim V = n$.
Sei $\mathcal{A}$ der Lösungsraum des inhom. lin. Systems $(**)$. Wir wissen, dass eine spezielle Lösung x_s der inhomogenen linearen DGL $(**)$ existiert. Ausserdem gilt für jede andere Lösung $x \in \mathcal{A}$, dass $x - x_s \in V$ und für jede Lösung $y \in V$, dass $x_s + y \in \mathcal{A}$. Somit ist $\mathcal{A} = x_s + V^n$.

Fundamentalsystem und Fundamentalmatrix

Definition (Fundamentalsystem und Fundamentalmatrix)

Sei $A : I \to Mat_n(\mathbb{R})$ stetig und (*) $x' = A(t)x$ ein homogenes lineares DGL-System.

- Eine Basis $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des Lösungsraumes von (*) nennt man Fundamentalsystem zu (*).
- Die Matrix $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ aus den Spaltenvektoren φ_j heißt Fundamentalmatrix von (*).
- Seien $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ Lsg.'en von (*). Die Funktion $W := \det(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : I \to \mathbb{R}$ heißt Wronski Determinante von $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

- Bilden $\varphi_i = \sum_{i=1}^n \varphi_i^j e_j$ ein Fundamentalsystem mit $\varphi_i^j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und e_i die kanonische Basis, dann ist die Fundamentalmatrix gegeben durch $\Phi = (\varphi_i^j)_{i,j=1}^n$.
- n Lsg.'en von (*) bilden ein Fundamentalsystem, genau dann, wenn ihre Wronski-Determinante für ein t verschwindet.

Eigenschaften der Fundamentalmatrix

Sei Φ eine Fundamentalmatrix zu $(*)$. Dann gilt:

1. Eine Lösung des homogenen AWP's $x' = Ax$, $x(t_0) = x_0$ ist gegeben durch
$$\varphi(t) = \Phi(t)(\Phi(t_0))^{-1}x_0$$
2. Φ ist eine Lsg. des linearen homogenen System $X' = A \cdot X$ in $\mathbb{R}^{n^2}$.
3. Ist $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, d.h. S invertierbar, so ist $\Phi \cdot S$ ist auch eine Fundamentalmatrix.

Beweis. 1) $\varphi'(t) = \Phi'(t)(\Phi(t_0))^{-1}x_0 = A\Phi(t)(\Phi(t_0))^{-1}x_0 = A\varphi(t)$.
2) $\Phi' = (\varphi_1', \ldots, \varphi_n') = (A\varphi_1, \ldots, A\varphi_n) = A \cdot \Phi$.
3) $(\Phi \cdot S)' = \Phi' \cdot S = A \cdot \Phi \cdot S$. $\square$

Beispiel

Sei ω eine Konstante. Wir betrachten das homogene lineare DG-System mit konstanten Koeffizienten

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1' & = & -\omega x_2 \\ x_2' & = & \omega x_1 \end{array} \right. , \quad d.h. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Ein Fundamentalystem wird von den folgenden beiden Funktionen gebildet

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}, \ \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Diese entsprechen den AB $\varphi_1(0) = e_1$ und $\varphi_2(0) = e_2$.
Zu einer beliebigen AB $x(0) = c^1 e_1 + c^2 e_2$ erhalten wir die Lösung $\varphi = c^1 \varphi_1 + c^2 \varphi_2$.
Die Fundamentalmatrix ist dann gegeben durch

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Spezielle Lösungen des inhomogenen Systems

Wie im 1-dim. Fall erhält man spezielle Lsg'en der inhom. lin. DG $x' = A(t)x + b(t)$ aus einem Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen DG mittels Variation der Konstanten.

Satz (Variation der Konstanten)

Seien $A : I \to Mat_n(\mathbb{R})$ und $b : I \to \mathbb{R}^n$ stetig und $\Phi : I \to Mat_n(\mathbb{R})$ eine Fundamentalmatrix des linearen homogenen Systems $x' = A(t)x$. Dann ist

$$\psi_s(t) := \Phi(t)u(t)$$

eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems $x' = A(t)x + b(t)$, wobei $u : I \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\Phi(t)u'(t) = b(t)$, dh.

$$(*) \qquad u(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)ds + v$$

mit einem konstanten Vektor v. Gibt man zur inhomogenen DG die AB $x(t_0) = x_0$ vor, so ist $v := \Phi^{-1}(t_0)x_0$.

Beweis. Für $u(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds + const$ wie in $(*)$ gilt daß $u'(t) = \Phi^{-1}(t)b(t)$ und damit $\Phi(t)u'(t) = b(t)$. Somit ist $\psi_s(t) = \Phi(t)u(t)$ eine Lösung:

$$\begin{aligned} \psi_s'(t) &= \Phi'(t)u(t) + \Phi(t)u'(t) \\ &= A(t)\Phi(t)u(t) + b(t) \quad = \quad A(t)\psi_s(t) + b(t). \end{aligned}$$

□

Bemerkung

Ist $v = (v_1, \ldots, v_n) : I \to \mathbb{R}^n$ so ist mit $\int_{t_0}^t v(s)ds$ die folgende differenzierbare Abbildung gemeint

$$I \ni t \mapsto \int_{t_0}^t v(s)ds \;:=\; \begin{pmatrix} \int_{t_0}^t v_1(s)ds \\ \vdots \\ \int_{t_0}^t v_1(s)ds \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Beispiel

Wir betrachten das inhom. lin. DG-System mit konst. Koeffizienten

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1' & = & -x_2 \\ x_2' & = & x_1 + t \end{array} \right. , \quad d.h. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A(t)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}}_{=b(t)}$$

Wir müssen nun folgendes tun, um eine spezielle Lösung zu erhalten:

1) Bestimmen der Fundamentalmatrix (siehe voriges Beispiel):

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

2) Invertieren von Φ, $\Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$, und damit

$$\Phi(t)^{-1} b(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\sin(t) \\ t\cos(t) \end{pmatrix}.$$

3) Integrieren von

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) b(s) ds = \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} s\sin(s) \\ s\cos(s) \end{pmatrix} ds$$

Dies berechnen wir mit partieller Integration und erhalten

$$\begin{aligned} \int t\sin(t)dt &= -t\cos(t) + \sin(t) \\ \int t\cos(t)dt &= t\sin(t) + \cos(t) \end{aligned}$$

und damit $u(t) = \begin{pmatrix} -t\cos(t) + \sin(t) \\ t\sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}$. Somit ist

$$\psi_s(t) = \Phi(t)u(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t\cos t + \sin t \\ t\sin t + \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems.

Homogene lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wie bestimmt man nun eine Fundamentalsystem eines homog. lin. DG-Systems $x' = A(t)x$? Wir betrachen nun den Spezialfall $A(t) \equiv A \in Mat_n(\mathbb{R})$ konstant. Analog zu $n = 1$ definiert man:

Definition (Matrixexponential)

Sei $A \in Mat_n(\mathbb{R})$. Die Matrix $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ heißt Exponential von A.

Dies ist wohl-definiert, d.h. diese Reihe konvergiert: Da $(Mat_n(\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ ein vollständiger normierter Raum ist, genügt es zu zeigen, daß die Folge der Partialsummen $S_m := \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$ eine Cauchy-Folge ist. Es ist aber

$$\|S_m - S_l\| = \|\sum_{k=l}^{m} \frac{A^k}{k!}\| \leq \sum_{k=l}^{m} \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=l}^{m} \frac{\|A\|^k}{k!} \rightarrow_{n,m\to\infty} 0,$$

denn $e^{\|A\|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$ konvergiert. Dabei gilt die zweite Ungleichung wegen $\|AB\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\| \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\|\|B\|$. Daran sehen wir auch, daß die Reihe e^A absolut konvergiert.

Lemma

Sei $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ *und* $\Phi : \mathbb{R} \to Mat_n(\mathbb{R})$, $\Phi(t) := e^{tA}$, *sowie* $\Phi_m : \mathbb{R} \to Mat_n(\mathbb{R})$ *die Folge von Abildungen, definiert durch* $\Phi_m(t) := \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k A^k}{k!}$. *Dann konvergiert* Φ_m *auf jedem kompakten Intervall* $K \subset \mathbb{R}$ gleichmässig *gegen* Φ. *Insbesondere ist* Φ *stetig auf* $\mathbb{R}$.

Beweis. Sei $K = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $M := max\{|a|, |b|\} \cdot \|A\|$. Die konvergente Reihe $e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$ ist eine Majorante für die Exponentialreihe der Beträge $e^{\|tA\|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|tA\|^k}{k!}$. Nach dem Cauchy-Kriterium finden wir zu $\varepsilon > 0$ ein n_ε, so daß $\frac{M^m}{m!} + \ldots + \frac{M^l}{l!} < \varepsilon$ für alle $m > l \geq n_\varepsilon$. Somit gilt für alle $t \in K$ und $m > l \geq n_\varepsilon$, daß

$$\|\Phi_m(t) - \Phi_l(t)\| \leq \sum_{k=l}^{m} \frac{|t|^k \|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=l}^{m} \frac{|t|^k \|A\|^k}{k!} \leq \sum_{k=l}^{m} \frac{M^k}{k!} \leq \varepsilon.$$

D.h., sowohl Φ_m als auch die Exponentialreihe der Beträge sind Cauchyfolgen in vollständigen metrischen Räumen und somit gleichmässig konvergent auf K. Damit ist der Grenzwert Φ stetig auf allen kompakten Intervallen, und damit auch auf ganz $\mathbb{R}$. $\square$

Die Lsg. der homogenen DG mit konstanten Koeffizienten

Satz

Sei $A \in Mat_n(\mathbb{R})$. Dann ist die Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \ni t \mapsto e^{tA} \in Mat_n(\mathbb{R})$ eine Fundamentalmatrix zu $x' = Ax$.
Insbesondere ist zu jedem $x_0 \in \mathbb{R}^n$, die differenzierbare Abbildung $\varphi_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, definiert durch $\varphi_{x_0}(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot x_0$, die Lösung des AWP's $x' = Ax$, $x(t_0) = x_0$.

Beweis. Da A konstant ist, sind die Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ der AWP'e $x' = Ax$, mit AB'en $x(0) = e_i$, $i = 1, \dots, n$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.
Sei $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ die dazugehörige Fundamentalmatrix.
Nach der Iteration von Picard-Lindelöf wird jede dieser Lösungen φ_i auf kompakten Intervallen gleichmässig approximiert durch Funktionen φ_{im} die sich durch iteratives Anwenden des Integraloperators H ergeben, d.h.

$$\varphi_{i0}(t) \equiv e_i,\ \ \varphi_{i1}(t) = e_i + \int_0^t Ax_0 ds,\ \ \varphi_{im}(t) = e_i + \int_0^t A\varphi_{i\,m-1}(s) ds$$

Schreibt man Φ_m für die Matrix mit den Spalten $(\varphi_{1m}, \dots, \varphi_{nm})$, so ist

$$\begin{aligned}
\Phi_0(t) &\equiv \mathbf{1}_n \\
\Phi_1(t) &= H\Phi_0(t) = \mathbf{1}_n + \int_0^t A ds = \mathbf{1}_n + tA \\
\Phi_2(t) &= H\Phi_1(t) = \mathbf{1}_n + \int_0^t A(\mathbf{1}_n + sA) ds = \mathbf{1}_n + tA + \tfrac{t^2A^2}{2} \\
&\vdots \\
\Phi_m(t) &= H\Phi_{m-1}(t) = \mathbf{1}_n + \int_0^t A\Big(\sum_{k=0}^{m-1} \tfrac{s^kA^k}{k!}\Big) ds = \sum_{k=0}^{m} \tfrac{t^kA^k}{k!}
\end{aligned}$$

Wir haben aber gesehen, daß die Folge von Abbildungen $\Phi_m : t \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{t^kA^k}{k!}$ auf jedem kompakten Intervall gleichmässig gegen $\Phi(t) = e^{tA}$ konvergiert. Da die kompakten Intervalle beliebig groß sein können, erhält man daß $\Phi : \mathbb{R} \to Mat_n(\mathbb{R})$ die Fundamentalmatrix von $x' = Ax$ ist. Damit ist Φ diffbar und $\varphi(t) = \Phi(t)x_0$ die Lsg. des AWP's $x(0) = x_0$. Daß $\psi(t) = \Phi(t - t_0)x_0$ eine Lsg. des AWP's $x(t_0) = x_0$ ist, folgt aus der Kettenregel. $\square$

Beispiel

Wir betrachten wieder die homog. lin. DG mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h. } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann rechnet man nach, daß $A^{2k+1} = (-1)^k A$ und $A^{2k} = (-1)^k \mathbf{1}_2$. Somit können wir das Exponential e^{tA} bestimmen:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k} A^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1} A^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \right) \mathbf{1}_n + \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) A \\ &= (\cos t)\mathbf{1}_2 + (\sin t)A \ = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nicht immer kann das Exponential so leicht bestimmt werden!

Folgerung (Exponentialabbildung)

Für $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ ist die Abbildung $\Phi : (\mathbb{R}, +) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\Phi(t) = \mathrm{e}^{tA}$ ein differenzierbarer Gruppenhomomorphismus zwischen der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ und der Gruppe der invertierbaren Matrizen $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Insbesondere ist $\mathrm{e}^{(t+s)A} = \mathrm{e}^{tA} \cdot \mathrm{e}^{sA} = \mathrm{e}^{sA} \cdot \mathrm{e}^{tA}$ und $(\mathrm{e}^{tA})^{-1} = \mathrm{e}^{-tA}$

Beweis. Seien $s \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig und seien φ und ψ Lösungen des AWP's $x' = Ax$ mit den jeweiligen AB'en $x(s) = x$ und $x(0) = x$. Nach dem vorigen Satz gilt für alle $t \in \mathbb{R}$, daß $\varphi(t) = \mathrm{e}^{(t-s)A}x = \psi(t-s)$. Somit erhalten wir mit Eigenschaften der Fundamentalmatrix, daß

$$\Phi(t)\Phi(s)^{-1}x = \varphi(t) \;=\; \psi(t-s) = \Phi(t-s)\Phi(0)^{-1}x = \Phi(t-s)x$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Damit erhalten wir für alle $t, s \in \mathbb{R}$, daß

$$(*) \qquad \Phi(t)\Phi(s)^{-1} = \Phi(t-s).$$

Dies impliziert aber die Behauptung

$$\Phi(t+s) = \Phi(t+s)\Phi(s)^{-1}\Phi(s) \overset{(*)}{=} \Phi(t)\Phi(s).$$

$\square$

Folgerung (Weitere Eigenschaften der Exponentialabbildung)

Seien $A, B \in Mat_n(\mathbb{R})$.

1. *Ist $AB = BA$, dann gilt $A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B A$ und $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \cdot \mathrm{e}^B$.*
2. *Ist $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, so ist $\mathrm{e}^{BAB^{-1}} = B\mathrm{e}^A B^{-1}$.*

Beweis. Alle Aussagen folgen aus der Eindeutigkeit der Lsg. eines AWP's. Sei z.B. $X(t) = A\mathrm{e}^{tB}$ und $Y(t) = \mathrm{e}^{tB}A$. Dann gilt $X(0) = Y(0) = A$ und

$$X'(t) = AB\mathrm{e}^{tB} = BA\mathrm{e}^{tB} = BX(t) \quad \text{sowie} \quad Y'(t) = B\mathrm{e}^{tB}A = BY(t).$$

Aus der Eindeutigkeit der Lsg. des AWP's $X' = BX$, $X(0) = A$ folgt dann $X(t) = Y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
Sei weiter $U(t) := \mathrm{e}^{t(A+B)}$ und $V(t) = \mathrm{e}^{tA} \cdot \mathrm{e}^{tB}$. Dann gilt $U(0) = V(0) = \mathbf{1}_n$ und wegen der ersten Eigenschaft

$$U'(t) = (A+B)U(t) \quad \text{sowie} \quad V'(t) = A\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB} + \mathrm{e}^{tA}B\mathrm{e}^{tB} = (A+B)V(t)$$

und somit $U(t) = V(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
Die verbleibende Aussage beweist man analog. □

Zusammenfassung: Lineare DGLn mit konstanten Koeffizienten

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig und $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

1. Die eindeutige Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des homogenen AWPs $x' = Ax$ mit der AB $x(t_0) = x_0$ ist gegeben durch $\varphi(t) = e^{(t-t_0)A} x_0$.
2. Die eindeutige Lösung $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des inhomogenen AWP's $x' = Ax + b(t)$ mit der AB $x(t_0) = x_0$ ist gegeben durch

$$\psi(t) = e^{tA}\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-sA} b(s) ds + e^{-t_0 A} x_0 \Big) = e^{(t-t_0)A} x_0 + e^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-sA} b(s) ds.$$

   (Siehe Satz über die Variation de Konstanten.)
3. Ist $b(t) \equiv b$ auch konstant, kann man das Integral sofort berechnen, falls A invertierbar ist. Dann ist $\int_{t_0}^{t} e^{-sA} b ds = -A^{-1} e^{-sA} b|_{t_0}^{t}$ und somit $\psi(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + A^{-1}(e^{(t-t_0)A} b - b)$, denn A und damit auch A^{-1} kommutieren mit e^{tA}.
   Beachte, dass $-A^{-1} b$ eine (konstante) Lsg. von $y' = Ay + b$ ist.

Beispiel: Lineare Systeme mit diagonalisierbarem A

Sei nun A diagonalisierbar und $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A: $Av_i = \lambda_i v_i$. Dann sind v_i auch Eigenvektoren von e^A zu den Eigenwerten e^{λ_i}.

1. Setzen wir $\varphi_i(t) := e^{\lambda_i(t-t_0)} v_i$, dann bilden die $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Basis des Lösungsraums des homog. Systems $x' = Ax$. Daher ist $\varphi_{x_0}(t) := \sum_{i=1}^n x_0^i \varphi_i(t - t_0)$ die Lsg. zur AB $x(t_0) = x_0 = \sum_{i=1}^n x_0^i v_i$.
2. Eine spezielle Lsg. des inhomogenen Systems $x' = Ax + b$ mit konstantem b erhalten wir aus der Formel auf der vorigen Folie für $t_0 = 0$ und $x_0 = 0$:

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^n b^i e^{\lambda_i t} \Big(\int_0^t e^{-s\lambda_i} ds \Big) v_i = \sum_{i=1}^n c^i(t) v_i$$

wobei $c^i(t) := \begin{cases} \frac{b^i}{\lambda_i}(e^{\lambda_i t} - 1), \text{ falls } \lambda_i \neq 0 \\ b^i\, t, \text{ falls } \lambda_i = 0, \end{cases}$ und $b = \sum_{i=1}^n b^i v_i$.

Aber: Nicht jede quadratische Matrix ist diagonalisierbar.

Lineare Systeme in Jordanscher Normalform

Wir wollen nun die Jordansche Normalform von Matrizen benutzen, um lineare Systeme in möglichst einfacher Form zu schreiben. Einem Basiswechsel entspricht dann eine Substitution:

Lemma

Sei $A \in Mat_n(\mathbb{R})$, $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $\tilde{A} = S^{-1}AS$.
φ ist eine Lsg. von $x' = Ax \iff \psi = S^{-1}\varphi$ ist eine Lsg. von $y' = \tilde{A}y$.
Φ ist eine Fundamentallsg. von $x' = Ax \iff S^{-1}\Phi S$ (und damit auch $S^{-1}\Phi$) ist eine Fundamentallsg. von $y' = \tilde{A}y$.

Beweis. Da S eine konstante invertierbare Matrix ist, erhält man

$$(S^{-1}\varphi)'(t) = S^{-1}\varphi'(t) = S^{-1}A\varphi(t) = (S^{-1}AS)S^{-1}\varphi(t),$$

d.h. $S^{-1}\varphi$ ist eine Lsg. von $y' = \tilde{A}y$.
Damit ist $S^{-1}\Phi$, und somit auch $S^{-1}\Phi S$ eine FL von $y' = \tilde{A}y$.
(Den letzten Punkt sieht man auch an $e^{tS^{-1}AS} = S^{-1}e^{tA}S$.) ☐

Folgerung

Sei $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ diagonalisierbar, d.h. $S^{-1}AS = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Dann ist $\Phi(t) = S\, diag(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n t})$ eine Fundamentalmatrix von $x' = Ax$.

Beispiel

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. A ist symmetrisch und damit diagonalisierbar. Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - 2$, d.h. EW'e sind $\pm\sqrt{2}$ zu den EV'en $v_1 = e_1 + (\sqrt{2} - 1)e_2$ und $v_2 = e_1 - (\sqrt{2} + 1)e_2$. D.h.
$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} - 1 & -(\sqrt{2} + 1) \end{pmatrix}$ und $S^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 & 1 \\ \sqrt{2} - 1 & -1 \end{pmatrix}$. Dann ist $S \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t\sqrt{2}} & \mathrm{e}^{-t\sqrt{2}} \\ (\sqrt{2} - 1)\mathrm{e}^{t\sqrt{2}} & -(\sqrt{2} + 1)\mathrm{e}^{-t\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ eine Fundamentalmatrix von $x' = Ax$.

Satz (Jordansche Normalform)

Sei $A \in Mat_n(\mathbb{C})$. Dann existiert ein $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, so dass

$$\widetilde{A} \; := \; SAS^{-1} \; = \; \mathrm{diag}(J_{m_1}(\lambda_1), \cdots, J_{m_k}(\lambda_k)),$$

wobei

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in Mat_m(\mathbb{C})$$

Hierbei sind λ_i die (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerte von A.

(Die Matrizen $J_m(\lambda)$ heißen Jordanblöcke.)

Der **Beweis** beruht auf dem Hauptsatz der Algebra, nach dem das charakteristische Polynom von A mindestens eine komplexe Nullstelle hat. Somit hat A mindestents einen Eigenwert.

Satz (Reelle Jordansche Normalform)

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$. Dann existiert $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, so dass $\widetilde{A} = SAS^{-1}$ folgende Gestalt hat

$$\widetilde{A} = \mathrm{diag}(J_{\ell_1}(\lambda_1), \cdots, J_{\ell_r}(\lambda_r), J_{2m_1}(\alpha_1, \beta_1), \cdots, J_{2m_s}(\alpha_s, \beta_s)),$$

$$J_{2m}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} J_m(\alpha) & -\beta \mathbf{1}_m \\ \beta \mathbf{1}_m & J_m(\alpha) \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{R})$$

Hierbei sind λ_i die (nicht notw. verschiedenen) reellen Eigenwerte von A, sowie $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$ und $\overline{\mu}_j = \alpha_j - i\beta_j$, mit $\beta_j > 0$, die (nicht notw. versch.) nicht reellen Eigenwertepaare von A.[a]

[a] Die Multiplizität eines reellen Eigenwerts λ (bzw. eines imaginären Eigenwerts μ) berechnet sich zu $\sum_{\lambda_i = \lambda} \ell_i$ bzw $\sum_{\mu_j = \mu} m_j$.

Für einen **Beweis** siehe z.B. Klingenberg, *Lineare Algebra und Geometrie*: Wende Jordansche Normalform auf $A \in Mat_n(\mathbb{C})$ an. Für reelle EW'e erhält man Jordanblöcke. Ist μ ein nicht reeller EW von A, so auch $\overline{\mu}$, denn A ist reell.

Anwendung auf lineare DG'n

Sei $x' = Ax$ ein lineares DG-System mit konstanten Koeffizienten.
Sei $\tilde{A} = S^{-1}AS$ in Jordanscher Normalform, d.h. die Fundamentalmatrix von $x' = Ax$ ist gegeben durch $\mathrm{e}^{A} = S\mathrm{e}^{t\tilde{A}}S^{-1}$.
Sei nun $\tilde{A} = A_1 + \ldots + A_k$ wobei die A_i jeweils nur einen Jordanblock oder nur eine Matrix der Form $J_{2m}(\alpha, \beta)$ enthalten, und sonst nur Nullen.
Dann kommutieren die A_i miteinander und wir haben

$$\mathrm{e}^{t\tilde{A}} = \mathrm{e}^{t(A_1+\ldots+A_k)} = \mathrm{e}^{tA_1} \cdot \ldots \cdot \mathrm{e}^{tA_k}.$$

D.h., um die Fundamentalmatrix von $x' = Ax$ zu bestimmen, müssen wir S kennen und e^{tB} für die Fälle 1) $B = J_n(\lambda)$ und 2) $B = J_{2m}(\alpha, \beta)$ bestimmen.

1) $\underline{B = J_n(\lambda) = \lambda \mathbf{1}_n + J_n(0)}$: Da $J_n(0)$ und $\lambda \mathbf{1}_n$ miteinander kommutieren, ist $\mathrm{e}^{tB} = \mathrm{e}^{t\lambda} \cdot \mathrm{e}^{tJ_n(0)}$. Wir müssen also nur noch $\mathrm{e}^{tJ_n(0)}$ berechnen: Berechnet man die Potenzen von $\mathrm{e}^{tJ_n(0)}$, so erhält man

$$\mathrm{e}^{tB} = \mathrm{e}^{t\lambda} \cdot \mathrm{e}^{tJ_n(0)} = \mathrm{e}^{t\lambda} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D.h., eine Lsg. von $x' = Bx$ mit der AB $x(0) = x_0 = \sum_{i=1}^n c^i e_i$ ist gegeben durch

$$\mathrm{e}^{tB} x_0 = \mathrm{e}^{t\lambda} \begin{pmatrix} c^1 + c^2 t + c^3 \frac{t^2}{2} + \dots + c^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ c^2 + c^3 t + \dots + c^n \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots \\ c^n \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{t\lambda} \begin{pmatrix} p(t) \\ p'(t) \\ \vdots \\ p^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

wobei $p(t) = \sum_{k=1}^n \frac{c^k}{(k-1)!} t^{k-1}$ Polynome vom Grad n sind.

2) $\underline{B = J_{2m}(\alpha,\beta)} = \begin{pmatrix} J_m(\alpha) & -\beta\mathbf{1}_m \\ \beta\mathbf{1}_m & J_m(\alpha) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{1}_m & 0 \\ 0 & \alpha\mathbf{1}_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\beta\mathbf{1}_m \\ \beta\mathbf{1}_m & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_m(0) & 0 \\ 0 & J_m(0) \end{pmatrix}$$

Da alle drei Summanden miteinander kommutieren erhält man wieder

$$\mathrm{e}^{tB} = \mathrm{e}^{t\alpha} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta t)\mathbf{1}_m & -\sin(\beta t)\mathbf{1}_m \\ \sin(\beta t)\mathbf{1}_m & \cos(\beta t)\mathbf{1}_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{tJ_m(0)} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{tJ_m(0)} \end{pmatrix}.$$

Eine allgemeine Lösung ist dann gegeben durch

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) \begin{pmatrix} p(t) \\ \vdots \\ p^{(m-1)}(t) \\ q(t) \\ \vdots \\ q^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t) \begin{pmatrix} -q(t) \\ \vdots \\ -q^{(m-1)}(t) \\ p(t) \\ \vdots \\ p^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}$$

mit beliebigen Polynomen p, q vom Grad $\leq m-1$, deren Koeffizienten die AB bestimmen.

Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung

Wir wollen nun die Ergebnisse aus den vorigen Abschnitten auf DG'en höherer Ordnung anwenden.

Wir erinnern uns: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig.

$$x^{(n)} = f(x, x', \ldots, x^{(n-1)}, t) \tag{27}$$

heißt gewöhnliche DG n-ter Ordung. Unter einer Lösung versteht man eine n-mal diffb. Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$, so daß

(i) der Graph $\Gamma_\Phi \subset \Omega$, wobei $\Phi = (\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)}) : I \to \mathbb{R}^n$ und

(ii) $\varphi^{(n)}(t) = f(\varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t), t)$ für alle $t \in I$.

Sei $t_0 \in I$ und $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. Das AWP ist gegeben durch (27) und

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t_0) & = & c_1 \\ x'(t_0) & = & c_2 \\ & \vdots & \\ x^{(n-1)}(t_0) & = & c_n \end{array}\right\} \tag{28}$$

Reduktion von Systemen höherer Ordnung

Eine DG höherer Ordnung konnte man auf ein System erster Ordnung reduzieren. Zu eine DG n-ter Ordnung $x^{(n)} = f(x, x', \ldots, x^{(n-1)}, t)$ definiert man $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mittels

$$F(y_1, \ldots, y_n, t) := (y_2, \ldots, y_n, f(y_1, \ldots, y_n, t)).$$

Dann ist $x : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des AWP's n-ter Ordnung $x^{(n)} = f(x, \ldots, x^{(n-1)}, t)$ mit AB'en $x(t_0) = a_1, \ \ldots, \ x^{(n-1)}(t_0) = a_n$, genau dann, wenn $y := \left(x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right) : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des AWP's $y' = F(y, t)$, $y(t_0) = (a_1, \ldots, a_n)$ erster Ordnung ist. D.h.

$$\begin{array}{rcrcl}
 & & y_1'(t) & = & y_2(t) \\
y_2'(t) & = & y_1''(t) & = & y_3(t) \\
 & & & \vdots & \\
y_{n-1}'(t) & = & y_1^{(n-1)}(t) & = & y_n(t) \\
y_n'(t) & = & y_1^{(n)}(t) & = & f(y_1, \ldots, y_n, t)
\end{array}$$

Da aus der Lipschitz-Stetigkeit von f bez. $(x^1, \ldots, x^n)$ die von $(x^1, \ldots, x^n, t) \mapsto F(x^1, \ldots, x^n, t) = (x^1, \ldots, x^n, f(x^1, \ldots, x^n, t))$ folgt, übertragen sich alle Existenz- und Eindeutgkeitssätze auf DG'en höherer Ordnung. Folgende Aussagen gelten für das AWP n-ter Ordnung

$$\left.\begin{array}{rcl} x^{(n)} & = & f(x, x', \ldots, x^{(n-1)}, t) \\ & & x(t_0) = x_0^1,\ x'(t_0) = x_0^2,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^n \end{array}\right\} (*)$$

Folgerung (Maximale Existenz- und Eindeutigkeit)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *offen und* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *sei stetig und bez.* $(x^1, \ldots, x^n)$ *Lipschitz-stetig. Dann existiert zu jedem genau eine maximale Lsg.* $\varphi : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ *des AWP's* $(*)$.

Folgerung (Globale Existenz- und Eindeutigkeit)

Sei $I = (a, b)$ *mit* $-\infty \leq a < b \leq \infty$ *und* $f : \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ *Lipschitz-stetig bez.* $(x^1, \ldots, x^n)$ *auf jeder Menge der Form* $\mathbb{R}^n \times J$*, wobei* $J \subsetneq I$ *ein kompaktes Intervall ist. Dann existiert genau eine auf ganz* I *definierte maximale Lösung* $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ *des AWP's* $(*)$.

Definition (Die lineare DG höherer Ordnung)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $b, a_k : I \to \mathbb{R}$, für $k = 0, \ldots, n-1$ stetig.

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \tag{29}$$

heißt lineare DG n-ter Ordnung. Ist $b(t) \equiv 0$, heißt (29) homogen, sonst inhomogen.

Folgerung (Maximale Lösung des linearen AWP's n-ter Ordnung)

Sei $I = (a, b)$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times I$, und $b, a_k : I \to \mathbb{R}$, für $k = 0, 1, \ldots, n-1$, seien stetige Funktionen. Dann besitzt das lineare AWP zu (29) genau eine maximale Lösung $\varphi_{x_0} : I \to \mathbb{R}^n$.

Folgerung (Struktur des Lösungsraumes)

Die maximalen Lösungen der homogenen DG n-ter Ordnung bilden einen n-dimensionalen Vektorraum L. Die maximalen Lösungen der inhomogenen DG n-ter Ordnung bilden einen n-dimensionalen affinen Raum $L + \psi$, wobei ψ eine spezielle Lsg. der inhomogenen DG ist.

Überführen wir nun die lineare DG n-ter Ordnung

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

in ein System erster Ordnung, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ b(t) - a_{n-1}(t)y_n - \ldots - a_1(t)y_2 - a_0(t)y_1 \end{pmatrix}$$

und damit das lineare System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & \ldots & \ldots & \ldots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}}_{=:A(t)} \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \tag{30}$$

Definition und Bemerkungen

Eine Basis des $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\varphi_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$, Lösungsraumes der homog. lin. DG n-ter Ordnung $(*)$ $x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$ heißt Fundamentalsystem von $(*)$. Die Fundamentalmatrix Φ des dazugehörigen linearen Systems erster Ordnung,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}(t),$$

heißt Fundamentalmatrix von $(*)$.
Seien $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\varphi_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ beliebige Funktionen, dann heißt $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) := \det \left(\varphi_i^{(j-1)}\right)_{i,j=1}^{n}$ Wronski-Determinante von $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Ist nun $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ein Fundamentalsystem $(*)$, so ist die Wronski-Determinante von $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ gleich der Wronski Determinante des Fundamentalsystems des zughörigen linearen Systems.

Aus der Variation der Konstanten für lineare Systeme erhalten wir, daß eine Lösung des inhomogenen Systems (29) gegeben ist durch

$$\psi(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)(0, \ldots, 0, b(s))^T ds,$$

wobei $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ eine Fundamantalmatrix des homog. Systems ist. Mittels der Kramerschen Regel und der Laplace'schen Entwicklung nach der i-ten Spalte kann man $\Phi^{-1}b$ mit Hilfe der Wronski-Det. ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1}(s)b(s) &= \tfrac{1}{\det \Phi(s)} \left(\det(\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}, b, \varphi_{i+1}, \ldots \varphi_n)\right)_{i=1}^n \\
&= \tfrac{b(s)}{\det \Phi(s)} \left(\textstyle\sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} \det(\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \ldots \varphi_n)\right)_{i=1}^n
\end{aligned}$$

Satz (Variation der Konstanten)

Sei $(\varphi, \ldots, \varphi_n)$ ein Fundamentalsystem der homog. DG n-ter Ordnung. Dann ist eine spezielle Lösung der inhomogenen DG (29) *gegeben durch*

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \varphi_k(t) \cdot \int_{t_0}^{t} b(s) \frac{W(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}, \varphi_{k+1}, \ldots \varphi_n)(s)}{W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(s)} \, ds. \quad (31)$$

Variation der Konstanten

1. Für $n = 2$ sieht diese Formel so aus

$$\psi(t) = -\varphi_1 \int_{t_0}^{t} \frac{b\varphi_2}{\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2} ds + \varphi_2 \int_{t_0}^{t} \frac{b\varphi_1}{\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2} ds.$$

2. Die spezielle Lösung (31) kann auch mittels der Variation der Konstanten ermittelt werden: Dazu machen wir den Ansatz $\psi(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) c_k(t)$ und bestimmen die $c_k(t)$ so, dass ψ die inhomog. DGL (29) löst. Dann erhält man das folgende lineare Gleichungssystem an die $c_k'(t)$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k'(t) \begin{pmatrix} \varphi_k(t) \\ \vdots \\ \varphi_k^{(n-1)(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Integration liefert dann die Funktionen $c_k(t)$.

Lineare DG n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir wollen nun das Fundamentalsystem einer linearen DG n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten finden.

Definition (Charakteristisches Polynom)

Das charakteristisches Polynom der linearen homogenen DG n-ter Ordnung

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + a_{n-2}x^{(n-2)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = 0$$

mit konstanten Koeffizienten $a_0 \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ *ist das Polynom*

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

Ist $P \in \mathbb{R}[\lambda]$ ein Polynom in einer Variablen, dann ist $P(\lambda)$ das charakteristische Polynom zur DG
$P(\frac{d}{dx})x := a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0$

Wir hatten gesehen, daß Die DG n-ter Ordnung $x^{(n)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = 0$ äquivalent ist zu einem System $y' = Ay$ mit A wie auf Folie 326.
Daran sieht man, daß das charakteristische Polynom der DG gleich dem charakteristischen Polynom $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{1}_n)$ von A ist: Entwickelt man nach der letzten Zeile, so erhält man

$$
\begin{aligned}
\det(A-\lambda) &= \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0(t) & \ldots & \ldots & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - \lambda(t) \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{n+1}(-a_0) + (-1)^{n+2}(-a_1)(-\lambda) + \ldots \\
&\quad \ldots + (-1)^{2n-1}(-a_{n-2})(-\lambda)^{n-2} + (-1)^{2n}(-a_{n-1} - \lambda)(-\lambda) \\
&= (-1)^n \left(a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n\lambda^n\right)
\end{aligned}
$$

Also sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der DG gleich den Eigenwerten von A. Und diese brauchen wir, um ein Fundamenatlsystem zu bestimmen.

.

Satz (Lineare DG n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten)

Sei $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \in \mathbb{R}[\lambda]$ das charakteristische Polynom zur homogenen linearen DG

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0. \qquad (*)$$

Seien λ_j die reellen und $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$ sowie $\overline{\mu}_k$ die nicht reellen Nullstellen von P mit den zugehörigen Multiplizitäten ℓ_j, m_k, wobei $j = 1, \ldots, r$ und $k = 1, \ldots, s$. Dann bilden die reellen Funktionen

$$\begin{array}{rcll} \varphi_{j\ell}(t) & = & e^{\lambda_j t} \cdot t^\ell & \forall\, j = 1, \ldots, r,\ \ell = 0, \ldots, \ell_j - 1 \\ \left.\begin{array}{r} \psi_{km}(t) \\ \tilde{\psi}_{km}(t) \end{array}\right. & \begin{array}{c} = \\ = \end{array} & \left.\begin{array}{l} e^{\alpha_k t} \cdot \cos(\beta_k t) \cdot t^m \\ e^{\alpha_k t} \cdot \sin(\beta_k t) \cdot t^m \end{array}\right\} & \forall\, k = 1, \ldots, s,\ m = 0, \ldots, m_k - 1. \end{array}$$

ein Fundamentalsystem von $(*)$.

Beweis. Ein FS der DG $y' = Ay$ könte man auch aus der reellen Jordan Normalform für A ablesen. Ein direkter Beweis, der auf dem folgenden Lemma beruht, ist aber der Folgende:

Lemma

Für ein Polyonom $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $P(\frac{d}{dt})e^{\lambda t} = P(\lambda)e^{\lambda t}$.

Beweis. Die Aussage folgt aus $\left(\frac{d}{dt}\right)^k (e^{\lambda t}) = \left(e^{\lambda t}\right)^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda t}$. $\square$

Seien nun $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r+s}$ die verschiedenen, komplexen Nullstellen von $P(\lambda)$ mit den zugehörigen Vielfachheiten ℓ_j. Aufgrund des Lemmas erhält man, daß die Funktionen $\varphi_{j\ell} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\varphi_{j\ell}(t) = e^{\lambda_j t} \cdot t^\ell \qquad \forall\, j = 1, \ldots, r,\ \ell = 0, \ldots, \ell_j - 1$$

komplexe Lösungen der DG $x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)} \ldots + a_0 x(t) = 0$ sind.

Aus (1) folgt also, daß die Funktionen $\varphi_{j\ell}(t) = e^{\lambda_j t} \cdot t^\ell$ für die reellen Eigenwerte λ_j Lösungen sind. Für die echt komplexen Eigenwerte $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$ erhält man aus (1), daß sowohl Realteil als auch Imaginärteil von $\varphi_{km}(t) = e^{\mu_k t} \cdot t^m$ Lösungen sind. D.h. man erhält $2\sum_{k=1}^s m_k$ weitere Lösungen

$$\begin{aligned}\psi_{km}(t) &= \mathrm{Re}(\varphi_{km}(t)) = \mathrm{Re}\, t^m e^{\mu_k t} = e^{\alpha_k t} \cdot \cos(\beta_k t) \cdot t^m \\ \tilde{\psi}_{km}(t) &= \mathrm{Re}(\varphi_{km}(t)) = \mathrm{Re}\, t^m e^{\mu_k t} = e^{\alpha_k t} \cdot \sin(\beta_k t) \cdot t^m\end{aligned}$$

für $k = 1, \dots, s,\ m = 0, \dots, m_k - 1$.

D.h., wir haben n Lösungen gefunden und müssen nun noch zeigen, daß diese linear unabhngig sind. Sind nun aber die komplexwertigen Lösungen $\varphi_{j\ell}(t) = e^{\lambda_j t} \cdot t^\ell$ linear unabhängig, so auch die entsprechenden reellen Lösungen. Die lineare Unabhängigkeit der komplexen Lösungen folgt aus:

Lemma

Seien $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und $p_1(t), \dots, p_n(t) \in \mathbb{C}[t]$. Ist

$$p_1(t)e^{c_1 t} + \cdots + p_n(t)e^{c_n t} = 0 \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R},$$

so gilt $p_1 = \cdots = p_n = 0$.

Beweis. $n = 1$: Aus $p_1(t)e^{c_1 t} = 0$ folgt $p_1(t) = 0$.
Induktionsschritt $n \to n+1$: Wir nehmen an, dass $\sum_{j=1}^{n+1} p_j(t)e^{c_j t} = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Sei k der Grad des Polynoms p_{n+1}. Dann gilt
$(\frac{d}{dt} - c_{n+1})^{k+1} p_{n+1}(t)e^{c_{n+1} t} = 0$ und somit

$$0 = (\tfrac{d}{dt} - c_{n+1})^{k+1} \sum_{j=1}^{n+1} p_j(t)e^{c_j t} = \sum_{j=1}^{n} h_j(t)e^{c_j t}$$

mit gewissen Polynomen h_j.
Aus der Induktionsvoraussetzung folgt aber $h_j = 0$.
Um zu zeigen, dass $p_j = 0$, schreiben wir
$(t - c_{n+1})^{k+1} = \sum_{m=0}^{k+1} a_m (t - c_j)^m$ mit $a_0 \neq 0$.
Daraus ergibt sich

$$h_j(t)e^{c_j t} = (\tfrac{d}{dt} - c_{n+1})^{k+1} p_j(t)e^{c_j t} = \sum_{m=0}^{k+1} a_m p_j^{(m)}(t)e^{c_j t}$$

und somit hat h_j denselben Grad wie p_j.
Das ist nur möglich, wenn $p_j = 0$. $\square$

Beispiel:

Wir betrachten die DGL $x''' - x'' + x' - x = t$.
(1) Um das Fundamentalsystem der homogenen DG zu finden, suchen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$P(\lambda) \;=\; \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 \;=\; (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) \;=\; (\lambda - 1)(\lambda + i)(\lambda - i).$$

Wir erhalten somit als komplexes Fundamentalsystem

$$x_1(t) = e^t, \quad \underbrace{\hat{x}_2(t) = e^{\mathrm{i}t}, \quad \hat{x}_3(t) = e^{-\mathrm{i}t}}_{komplex.}$$

Somit ist

$$x_1 = e^t, \;\; x_2(t) = \cos(t) = \mathrm{Re}(\hat{x}_2), \;\; x_3(t) = \sin(t) = \mathrm{Im}(\hat{x}_2).$$

Wir haben also als allgemeine Lösung der homogenen DG

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t).$$

(2) Wir wollen auch eine spezielle Lösung der inhomogenen DG bestimmen: $b(t) = t$ ist ein Polynom ersten Grades. Daher machen wir den folgenden Ansatz

$$y_s(t) = \alpha t + \beta.$$

$\alpha - \alpha t - \beta = t$, d.h

$$-\alpha = 1 \qquad \text{und} \qquad \alpha = \beta \qquad \text{d.h.} \qquad \beta = -1$$

Somit ist die spezielle Lösung $y_s(t) = -(t+1)$, und die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist

$$x(t) = -(t+1) + c_1 e^t + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t).$$

Inhomogene lin. DG mit konst. Koeffizienten

Satz (Inhomogene lin. gewöhnliche DG mit konst. Koeffizienten)

Sei $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom und $\mu \in \mathbb{R}$ mit $P(\mu) \neq 0$. Dann gilt:

(i) $\frac{e^{\mu t}}{P(\mu)}$ *ist eine Lsg. der inhomog. DGL* $P(\frac{d}{dt})x = e^{\mu t}$.

(ii) *Sei $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ vom Grad m. Dann hat die inhomog. DGL $P(\frac{d}{dt})x = f(t)e^{\mu t}$ eine Lsg. der Form $g(t)e^{\mu t}$, wobei $g(t) \in \mathbb{R}[t]$ vom Grad m ist.*

Beweis. (i) und der Induktionsanfang von (ii) sind offensichtlich. Für den Induktionsschritt schreiben wir $P(\frac{d}{dt})t^m e^{\mu t} =: f_0(t)e^{\mu t}$, wobei $f_0(t) \in \mathbb{R}[t]$ vom Grad m ist. Damit gibt es ein $c \neq 0$, so dass $h(t) := f(t) - cf_0(t)$ Grad $\leq m-1$ hat. Nach Ind.vor. existiert dann eine Lsg. $g_1(t)e^{\mu t}$ von $P(\frac{d}{dt})x = h(t)e^{\mu t}$ mit einem Polynom $g_1(t)$ vom Grad $\leq m-1$.
$g(t) = ct^m + g_1(t)$ ist dann das gesuchte Polynom vom Grad m. □

Satz

Sei $\mu \in \mathbb{R}$ eine k-fache Nullstelle von $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ und $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ vom Grad m. Dann hat die inhomog. DG $P(\frac{d}{dt})x = f(t)e^{\mu t}$ eine Lsg. der Form $h(t)e^{\mu t}$, wobei

$$h(t) = \sum_{j=k}^{k+m} c_j t^j.$$

Beweis. Wir schreiben $P(t) = Q(t)(t-\mu)^k$, mit einem Polynom $Q(t)$ vom Grad $m - k$ und $Q(\mu) \neq 0$.
Nach dem vorigen Satz existiert ein Polynom $g(t)$ vom Grad m, so dass $g(t)e^{\mu t}$ eine Lsg. von $Q(\frac{d}{dt})x = f(t)e^{\mu t}$ ist.
Sei $h(t) = \sum_{j=k}^{k+m} c_j t^j$ derart, dass $h^{(k)}(t) = g(t)$. Dann ist $h(t)e^{\mu t}$ die gesuchte Lsg. von $P(\frac{d}{dt})x = f(t)e^{\mu t}$.

□

Bemerkung.

Die letzten beiden Sätze gelten auch für DG'en mit komplexen Koeffizienten, d.h. $P, f, g, h \in \mathbb{C}[t]$, $\mu \in \mathbb{C}$. Die Lösungen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sind komplexwertige Funktionen der reellen Variablen t.

Beispiel: Harmonischer Oszillator

Wir betrachten die DGL

$$(*) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = a \cos \omega t, \quad \omega, \omega_0 > 0, a \in \mathbb{R}^*.$$

Diese DG beschreibt Schwingungen ohne Reibung. Man nennt Sie auch getriebener (oder angeregter) harmonischer Oszillator mit Eigenfrequenz ω_0. Die Anregung erfolgt hier periodisch mit Frequenz ω.
Die entsprechende harmonische Gleichung $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ heißt harmonischer Oszillator. Das charakterisische Polynom $P(x) = x^2 + \omega_0^2$ hat nur die imaginären Nullstellen $\pm\omega_0 i$. Daher sind die Lsg'en der homog. Gleichung Linearkombinationen von $\sin \omega_0 t$ und $\cos \omega_0 t$.

... Harmonischer Oszillator

Um eine Lsg. von $(*)$ zu finden betrachten wir die DG

$$(**) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = ae^{i\omega t}.$$

(i) Wenn $\omega \neq \omega_0$, d.h. $P(i\omega) \neq 0$, so existiert eine Lsg. von $(**)$ von der Form $ce^{i\omega t}$. Einsetzen in $(**)$ liefert $c = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}$.
$\varphi(t) = \mathrm{Re}\, ce^{i\omega t} = c \cos \omega t$ ist dann eine Lsg. von $(*)$.

(ii) Wenn $\omega = \omega_0$ (d.h. der harm. Oszillator wird mit der Eigenfrequenz ω_0 angeregt) dann gibt es eine Lsg. von $(**)$ von der Form $cte^{i\omega t}$.
Einsetzten in $(**)$ liefert $c = \frac{a}{2i\omega}$.
$\varphi(t) = \mathrm{Re}\, cte^{i\omega t} = \frac{a}{2\omega} t \sin \omega t$ ist dann eine Lsg. von $(*)$ und die Amplitude der Schwingung $|\frac{a}{2\omega} t| \to \infty$ für $t \to \infty$ (Resonanzkatastrophe).

Hamiltonsches Prinzip der kleinsten Wirkung

Seien $x_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 1 \dots n$, Funktionen auf einem Zeitintervall $I = [a, b]$, die den Zustand eines physikalischen Systems in Abhängigkeit von der Zeit beschreiben. Man möchte nun die Bewegungsgleichungen aus einem Prinzip herleiten. Dies ist das *hamiltonsche Prinzip der kleinsten Wirkung*, welches besagt, daß die Wirkung minimal ist. In reibungsfreien Systemen ist die Wirkung gegeben als Integral über die Differenz von kinetischer Energie T und potentieller Energie V, der *Lagrangefunktion* $L(t, \varphi, \varphi') = T - V$, wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$. D.h., man möchte das Wirkungsintegral

$$S(\varphi) = \int_a^b L(t, x, x')dt$$

bzgl. φ minimieren. In diesem Abschnitt werden wir eine DG an L herleiten, die eine notwendige Bedingung für die Minimalität von $S(\varphi)$ ist. Dies sind die Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'}(t, x(t), x'(t)) - \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), x'(t)) = 0.$$

Satz (Parameterabhängige Integrale)

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ *und* $f : [a, b] \times U \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann ist die durch*

$$\varphi(x) := \int_a^b f(t, x)dt$$

def. Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$ *stetig* (φ *heißt parameterabhängiges Integral*).

Beweis. Für den Beweis benötigen wir zwei Lemmas:

Lemma 1

Für eine gleichmässig konvergente Funktionenfolge $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

Bew. Da f_n gleichm. konvergiert, ist $f := \lim f_n$ stetig, damit int.-bar, und

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - f_n(t)|dt \leq (b-a)\|f - f_n\| \to_{n\to\infty} 0.$$

Lemma 2

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : [a, b] \times U \to \mathbb{R}$ stetig und $x_k \in U$ eine konvergente Folge mit dem Grenzwert $c \in U$. Dann konvergieren die Funktionen $F_k : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F_k(t) := f(t, x_k)$ gleichmäßig gegen die stetige Funktion $F(t) = f(t, c)$

Beweis. Die Menge $K = \{x_k | k \in \mathbb{N}\} \cup \{c\}$ ist kompakt und ebenso $[a, b] \times K$. Daher ist die stetige Funktion f auf $[a, b] \times K$ gleichmäßig stetig Sei also $\varepsilon > 0$. Wegen der gleichmässigen Stetigkeit von f findet man ein $\delta > 0$, so daß $|f(t, x) - f(s, y)| < \varepsilon$ für alle $(t, x), (s, y) \in [a, b] \times K$ mit $\|(t, x) - (s, y)\| < \delta$. Da andererseits $\lim x_k = c$ findet man ein $n_\delta \in \mathbb{N}$, so daß $\|x_k - c\| < \delta$ für alle $k \geq n_\delta$. Für $k \geq n_\delta$ gilt daher

$$|f(t, c) - f(t, x_k)| = |F(t) - F_k(t)| < \varepsilon,$$

und somit konvergiert F_k gleichm. gegen F. □

Beweis des Satzes.

Sei $x_k \in U$ eine konvergente Folge mit dem Grenzwert $c \in U$.
Sei wieder $F_k(t) := f(t, x_k)$ welches nach Lemma 2 gleichm. gegen F, $F(t) := f(t, c)$, konvergiert.
Wir können also Lemma 1 anwenden und erhalten

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \lim_{k\to\infty} \int_a^b F_k(t)dt \int_a^b \lim_{k\to\infty} F_k(t)dt = \int_a^b F(t)dt = \varphi(c)$$

$\square$

Satz (Ableitung parameterabhängiger Integrale)

Seien $[a, b], I \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $f : [a, b] \times I \to \mathbb{R}$, stetig und die Abbildung $x \to f(t, x)$ stetig diffb.für alle t. Dann ist die durch $\varphi(x) := \int_a^b f(t, x)dt$ definierte Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ stetig diffb. und es gilt

$$\varphi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} dt.$$

Beweis. Sei $c \in I$ und $c \neq x_k \in I$ konvergiere gegen c.
Wir betrachten die Funktionenfolge $F_k(t) := \frac{f(t,x_k)-f(t,c)}{x_k-c}$.
Wegen des MWS existieren η_k zwischen c und x_k mit $F_k(t) = \frac{\partial f(t,\eta_k)}{\partial x}$.
Da $\eta_k \to c$ und da $\frac{\partial f}{\partial x}$ nach Voraussetzung stetig ist, konvergiert $F_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen die stetige Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(t) := \frac{\partial f(t,c)}{\partial x}$. Daher ist

$$\frac{\varphi(x_k) - \varphi(c)}{x_k - c} = \int_a^b F_k(t)dt$$

gegen $\int_a^b F(t)dt = \int_a^b \frac{\partial f(t,c)}{\partial x} dt$.
Somit ist φ differenzierbar und wegen des vorigen Satzes folgt die Stetigkeit der Ableitung

$$x \mapsto \varphi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} dt$$

aus der Stetigkeit des Integranden $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$. $\square$

Folgerung

Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $f : [a,b] \times U \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto f(t,x)$, *stetig und bez.* x k*-mal stetig diffb. Dann ist die durch*

$$\varphi(x) := \int_a^b f(t,x)dt$$

definierte Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ k*-mal stetig differenzierbar und es gilt*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x)dt.$$

Anwendung: Potentialfunktionen

Sei $V = (v_1, \dots, v_n) : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Wir hatten gesehen, daß eine notwendige Bedingung dafür, daß V ein Gradientenfeld ist, d.h. $V = \mathrm{grad} f$ für eine diff.-bare Fkt. $f : U \to \mathbb{R}$, nach dem Lemma von Schwarz durch die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ gegeben ist. Wir wollen nun die Umkerung beweisen:

Satz

Sei $B_r . = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$ die offene Kugel im $\mathbb{R}^n$ und sei $V = (v_1, \dots, v_n) : B_r \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld welches die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

erfüllt. Dann existiert eine stetig diff.-bare Funktion $f : B_r \to \mathbb{R}$ mit $V = \mathrm{grad} f$.

Beweis. Sei $V = (v_1, \ldots, v_n)$ das VF aus der Voraussetzung. Wir definieren $f : B_r \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\int_0^1 v_k(tx)dt \right),$$

und zeigen daß $\mathrm{grad} f = V$. Wegen der Folgerung erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i} &= \sum_{k=1}^{n} x_k \int_0^1 t \tfrac{\partial v_k}{\partial x_i}(tx)dt + \int_0^1 v_i(tx)dt \\ &= \int_0^1 \left(t \sum_{k=1}^{n} x_k \tfrac{\partial v_k}{\partial x_i}(tx) + v_i(tx) \right) dt\end{aligned}$$

Wegen der Int.-bed. ist der Integrand gleich der Ableitung von $t \mapsto tv_i$:

$$\frac{d}{dt}(tv_i(tx)) = v_i(tx) + t \sum_{k=1}^{n} x_k \tfrac{\partial v_i}{\partial x_k}(tx) = v_i(tx) + t \sum_{k=1}^{n} x_k \tfrac{\partial v_k}{\partial x_i}(tx)$$

und damit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \int_0^1 \tfrac{d}{dt}(tv_i(tx)) = (tv_i(tx))|_0^1 = v_i(t). \qquad \square$$

Doppelintegrale

Seien $[a, b]$ und $[c, d]$ Intervalle und $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann sind die folgenden beiden Funktionen stetig und damit integrierbar:

$$[c, d] \ni y \mapsto \int_a^b f(x, y)dx \ , \quad [a, b] \ni x \mapsto \int_c^d f(x, y)dy.$$

Die Reihenfolge der Integration kann man vertauschen:

Satz

Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

Beweis. Wir definieren $\varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$, $\varphi(y) := \int_a^b \left(\int_c^y f(x,y)dy \right) dx$.
Dann ist φ diffbar und es gilt

$$\varphi'(y) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_c^y f(x,t)dt \right) dx = \int_a^b f(x,y)dydx.$$

Damit gilt aber

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_c^d \varphi'(y)dy = \varphi(d) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx,$$

da $\varphi(c) = 0$. □

Bemerkung:

Das Doppelintegral $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$ ist gleich dem Volumen des Körpers unter dem Graphen von f. Mehr dazu im nächsten Semester.

Euler-Lagrange Gleichungen der Variationsrechnung

Sei $I = [a, b]$ ein Intervall und $L : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t, x, p) \to L(t, x, p)$ eine Funktion in $C^2(I, \mathbb{R})$. In $C^2(I, \mathbb{R})$ betrachten wir die Teilmenge

$$K := \{\varphi \in C^2(I, \mathbb{R}) \mid \varphi(a) = c_1,\ \varphi(b) = c_2\},$$

wobei c_1 und c_2 Konstanten sind. Auf K betrachten wir nun ein *Funktional* (d.h. eine Abbildung von einem Funktionenraum nach $\mathbb{R}$):

$$S : K \to \mathbb{R}, \quad S(\varphi) = \int_a^b L(t, \varphi(t), \varphi'(t))dt.$$

Das Problem der Variationsrechnung besteht nun darin, ein $\varphi \in K$ zu finden, so daß $S(\varphi) = \inf_{\psi \in K} S(\psi)$.

Satz (Euler-Lagrange Gleichungen)

Unter diesen Voraussetzungen gilt: Ist $\varphi \in K$, so daß $S(\varphi) = \inf_{\psi \in K} S(\psi)$, so gelten die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) - \frac{\partial L}{\partial x}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0.$$

Beweis. Sei $\varphi \in K$ mit $S(\varphi) \leq S(\psi)$ für alle $\psi \in K$ und sei $g \in C^2(I, \mathbb{R})$ mit $g(a) = g(b) = 0$. Dann ist für jedes $s \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$\varphi_s := \varphi + sg$$

in K (*Variation* von φ). Wir definieren wir die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $F(s) := S(\varphi_s)$, die wegen der Vorauss.'en in $s = 0$ ein Minimum hat.
Daher ist $\frac{dF}{ds}(0) = 0$.
Weiter ist (nach der Ableitung parameterabh. Integrale und Kettenregel)

$$\begin{aligned} \frac{dF}{ds}(s) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} L(t, \varphi_s(t), \varphi_s'(t)) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x} L(t, \varphi_s(t), \varphi_s'(t)) g(t) + \frac{\partial}{\partial p} L(t, \varphi_s(t), \varphi_s'(t)) g'(t) \right) dt, \end{aligned}$$

da $\varphi_s' = \varphi'(t) + sg'(t)$.

Weiter im Beweis: Mit part. Integr. berechnet man den zweiten Term

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{\partial}{\partial p} L(t, \varphi_s(t), \varphi_s'(t)) g'(t) = \\
&= \underbrace{\frac{\partial}{\partial p} L(t, \varphi_s(t), \varphi_s'(t)) g(t) \Big|_a^b}_{=0} - \int_a^b g(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial p} L(t, \varphi_s(t), \varphi_s'(t)) dt
\end{aligned}
$$

und erhält für jedes $g \in C^2(I, \mathbb{R})$ mit $g(a) = g(b) = 0$

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{dF}{ds}(0) \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x} L(t, \varphi_s(t), \varphi_s'(t)) g(t) + \frac{\partial}{\partial p} L(t, \varphi_s(t), \varphi_s'(t)) g'(t) \right) dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x} L(t, \varphi_s(t), \varphi_s'(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial p} L(t, \varphi_s(t), \varphi_s'(t)) \right) g(t) dt
\end{aligned}
$$

Könnte man nun aus dem Verschwinden des Integrals auf das Verschwinden des Integranden schliessen, wäre der Satz bewiesen. Das ist die Aussage des folgenden Lemmas.

Lemma

Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und es gelte für jede Funktion* $g \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ *mit* $g(a) = g(b) = 0$*, daß*

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = 0.$$

Dann ist $f(t) = 0$ *für alle* $t \in [a,b]$*.*

Beweis. Angenommen, es sei $t_0 \in (a,b)$ mit $f(t_0) > 0$. Wegen der Stetigkeit von f gibt es ein $\delta > 0$ mit $[t_0-\delta, t_0+\delta] \subset [a,b]$ und $f(t) \geq \frac{f(t_0)}{2}$. Nun konstruiert man $g \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ mit

$$g(t) > 0 \text{ für } t \in (t_0-\delta, t_0+\delta) \text{ und } g(t) = 0 \text{ für } t \notin (t_0-\delta, t_0+\delta).$$

Für dieses g erhalten wir einen Widerspruch, denn

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} f(t)g(t)dt \geq \frac{f(t_0)}{2}\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} g(t)dt > 0.$$

D.h. $f \equiv 0$ auf (a,b). Wegen der Stetigkeit ist $f \equiv 0$ auf $[a,b]$. □

Dieser Satz läßt sich auf beliebige Dimensionen verallgemeinern.

Satz (Euler-Lagrange Gleichungen)

Sei $L : I \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$,
$(t, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) \to L(t, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ *eine Funktion aus* $C^2(I, \mathbb{R}^n)$. *In* $C^2(I, \mathbb{R}^n)$ *betrachten wir die Teilmenge*

$$K := \{\varphi \in C^2(I, \mathbb{R}) \mid \varphi(a) = C_1,\ \varphi(b) = C_2\},$$

wobei C_1 *und* C_2 *zwei konstante Vektoren sind. Hat das Funktional*

$$S : K \to \mathbb{R}, \quad S(\varphi) = \int_a^b L(t, \varphi(t), \varphi'(t))dt.$$

ein Minimum in $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in K$, *so gelten die Euler-Lagrange Gleichungen*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p_i}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) - \frac{\partial L}{\partial x_i}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0 \ \ \forall i = 1, \dots, n.$$

Beispiel: Energiefunktional

Sei $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ eine zweimal stetig diff.-bare Kurve. Die Energie dieser Kurve ist definiert als

$$E(\gamma) := \int_0^1 L(t, \gamma(t), \gamma'(t))dt, \quad \text{mit } L(t,x,p) := \langle p, p\rangle = \sum_{k=1}^{n} p_k^2.$$

Seien $P \neq Q$ zwei Punkte im $\mathbb{R}^n$. Wir wollen das Energiefunktional für alle Kurven, die P und Q verbinden, minimieren. D.h. wir minimieren E auf $K := \{\gamma \in C^2([0,1], \mathbb{R}^n) \mid \gamma(0) = P,\ \gamma(1) = Q\}$. Es ist $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$ und $\frac{\partial L}{\partial p_i}(t,x,p) = 2p_i$. Damit reduzieren sich die Euler-Lagrange Gleichungen zu

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p_i}(t, \gamma(t), \gamma'(t)) = 2\gamma_i''(t).$$

D.h., Kurven zwischen P und Q mit minimaler Energie sind Lösungen der DG $\gamma'' = 0$ mit den Randbedingungen $\gamma(0) = P$ und $\gamma(1) = Q$. Dies erfüllt aber nur die Verbindungsgerade $t \mapsto t(Q-P) + P$ zwischen P und Q.

Beispiel: Längenfunktional

Die Länge einer 2-mal stetig diff-baren Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ ist def. als

$$\ell(\gamma) := \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{\sum_{k=1}^n (\gamma_k'(t))^2} dt.$$

ℓ ist invariant unter Umparametrisierungen der Kurve, d.h. für einen Diffeomorphismus τ von $[0,1]$ gilt $\ell(\gamma \circ \tau) = \ell(\gamma)$ (wegen der Substitutionsregel für Integrale).
Andererseits kann man jede Kurve mit $\gamma'(t) \neq 0\ \forall t \in [0,1]$ auf eine Kurve mit $\|\gamma(t)\| \equiv c$ konstant umparametrisieren: Sei $\|\gamma(t)\| \neq 0$ auf $[0,1]$. Ist τ eine Stammfunktion von $\frac{c}{\|\gamma(t)\|}$, so ist $\|(\gamma \circ \tau)'(t)\| = \tau'(t)\|\gamma'(\tau(t))\| \equiv c$.
Nun gilt für Kurven mit $\|\gamma'(t)\| \equiv c$, daß $E(\gamma) = c^2 = (\ell(\gamma))^2$.
Da die minimierenden Kurven von E Geraden waren und somit konstante Geschwindigkeit hatten, folgt aus dem vorigen Beispiel, daß die Kurven mit minimaler Länge zwischen zwei Punkten umparametrisierte Verbindungsgeraden sind.

Fourier-Reihen

Sei V der Vektorraum der (2π-)periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, so dass $f|_{[0,2\pi]}$ integrierbar ist.

Die Funktionen $e_k(x) := \exp(ikx)$, $k \in \mathbb{Z}$, bilden ein orthonormales System bez. der Hermiteschen Form

$$(*) \quad \langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx, \quad f, g \in V.$$

$(*)$ ist positiv semi-definit, d.h. $\langle f, f \rangle \geq 0$ für alle $f \in V$. Auf dem Unterraum der stetigen Funktionen ist $(*)$ positiv definit und somit ein SKP.

$c_k := \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikx}dx \in \mathbb{C}$ heißt k-ter Fourier-Koeffizient und $F_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$ n-tes Fourier-Polynom von f.

Die Reihe $(F_n(f))_{n=0,1,\ldots}$ heißt Fourier-Reihe von f.

Bemerkung.

Es gilt

$$F_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

wobei

$$\begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx. \end{aligned}$$

Wenn f reellwertig ist, dann ist $c_{-k} = \overline{c}_k$ und $F_n(f)$ ist reellwertig.

Satz (Fourier-Reihen)

(i) *$F_n(f)$ ist die beste Approximation an $f \in V$ in dem Unterraum $V_n := \mathrm{span}\{e_k | -n \leq k \leq n\}$, d.h. $\|f - F_n(f)\|_2 = \inf_{g \in V_n} \|f - g\|_2$, wobei $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle}$.*

(ii) *Desweiteren gilt $\|f - F_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|F_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$.*

Beweis. (ii) kann man direkt nachrechnen. Um (i) zu zeigen, berechnen wir für $g = \sum_{k=-n}^{n} d_k e_k \in V_n$:

$$\begin{aligned} \|f - g\|_2^2 &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} (\overline{d}_k c_k + d_k \overline{c_k}) + \sum_{k=-n}^{n} |d_k|^2 \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 + \|F_n(f) - g\|_2^2. \end{aligned}$$

□

Folgerung (Besselsche Ungleichung)

Für die Fourier-Koeffizienten c_k von $f \in V$ gilt die Besselsche Ungleichung:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn die Fourier-Reihe $F_n(f)$ im quadratischen Mittel gegen f konvergiert.

Satz

(i) *Für alle* $f \in V$ *gilt*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

(ii) *und die Fourier-Reihe konvergiert im quadratischen Mittel gegen* f*, d.h.* $\lim_{n\to\infty} \|f - F_n(f)\|_2 = 0$.

Beweis. Wg. des vorhergehenden Satzes sind (i) und (ii) äquivalent.

Das nächste Lemma zeigt, dass der Satz für Treppenfunktionen gilt.

Lemma

Sei $f \in V$ so dass $f|_{[0,2\pi]}$ eine Treppenfunktion ist.

Dann konvergiert $F_n(f)$ im quadratischen Mittel gegen f.

Weiter im Beweis des Satzes:

$f|_{[0,2\pi]}$ ist als Riemann-integrierbare Funktion beschränkt. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass f reellwertig ist und $|f| \leq 1$.

Dann existieren zu $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $-1 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq 1$, so dass $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\psi(x) - \varphi(x))dx \leq \frac{\varepsilon^2}{8}$.

Mit $(\psi - \varphi)^2 \leq 2(\psi - \varphi)$ folgt daraus $\|f - \varphi\|_2^2 \leq \|\psi - \varphi\|_2^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$ und somit $\|f - \varphi\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Wg. des Lemmas existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|\varphi - F_n(\varphi)\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$.

Mit $g = f - \varphi$ gilt $\|g - F_n(g)\|_2 \leq \|g\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ und somit $\|f - F_n(f)\|_2 \leq \|g - F_n(g)\|_2 + \|\varphi - F_n(\varphi)\|_2 < \varepsilon$. $\square$

Beweis des Lemmas:

Wir können annehmen, dass $f|_{(0,a)} = 1$ und $f|_{(a,2\pi)} = 0$, denn jede Treppenfunktion läßt sich als Linearkombination solcher Funktionen darstellen.

Als Fourier-Koeffizienten erhalten wir $c_0 = \frac{a}{2\pi}$ und

$$c_k = \frac{i}{2\pi k} e^{-ikx}\Big|_0^a, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Mit $|c_k|^2 = \frac{1-\cos ka}{2\pi^2 k^2}$ $(k \neq 0)$ erhalten wir

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos ka}{k^2}.$$

Weiter im Beweis:

Mit Hilfe der für alle $x \in [0, 2\pi]$ gültigen Formel

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}$$

erhalten wir

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ und

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}((\frac{a-\pi}{2})^2 - \frac{\pi^2}{12}) = \frac{a}{2\pi} = \|f\|_2^2.$$

Also konvergiert $F_n(f)$ im quadr. Mittel gegen f.

Zum Beweis von $(*)$ stellen wir zuerst fest, dass die Reihe $F(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$ absolut und glm. auf $\mathbb{R}$ konvergiert.

Behauptung: Die Reihe der Ableitungen $-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ konvergiert für alle $\delta > 0$ auf $[\delta, 2\pi - \delta]$ glm. gegen $\frac{x-\pi}{2}$.

Weiter im Beweis:

Daraus folgt $F'(x) = \frac{x-\pi}{2}$ und $F(x) = \frac{(x-\pi)^2}{4} + c$.

Um die Konstante c zu bestimmen berechnen wir:

$$\int_0^{2\pi} F(x)dx = \frac{(x-\pi)^3}{12}\bigg|_0^{2\pi} + 2\pi c = \frac{\pi^3}{6} + 2\pi c.$$

Gliedweise Integration der Reihe $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$ ergibt $\int_0^{2\pi} F(x)dx = 0$, d.h. $c = -\frac{\pi^2}{12}$. Das beweist $(*)$.

Wir müssen noch die glm. Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ gegen $\frac{\pi-x}{2}$ auf $[\delta, 2\pi-\delta]$ zeigen.

Dazu schätzen wir zunächst $s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right)$ ab:

$$|s_n(x)| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right| = \left|e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right| \leq \frac{2}{|e^{ix/2}-e^{-ix/2}|} \leq \frac{1}{\sin \delta/2}.$$

Weiter im Beweis:

Aus $|s_n(x)| \leq \frac{1}{\sin \delta/2} =: \sigma$ erhalten wir weiter

$\left|\sum_{k=n}^{m} \frac{\sin kx}{k}\right| = \left|\sum_{k=n}^{m} \frac{s_k(x)-s_{k-1}(x)}{k}\right|$

$= \left|\sum_{k=n}^{m} s_k(x) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{s_m(x)}{m+1} - \frac{s_{n-1}(x)}{n}\right|$

$\leq \sigma \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n}\right) = \frac{2\sigma}{n}.$

Also $\left|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}\right| \leq \frac{2\sigma}{n}$, woraus die glm. Konvergenz der Reihe folgt.

Wir müssen noch zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{für alle} \quad x \in (0, 2\pi).$$

Weiter im Beweis:

Es gilt $\frac{\sin kx}{k} = \int_\pi^x \cos kt\, dt$ und

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \cos kt &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n (e^{ikt} + e^{-ikt}) = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^n e^{ikt} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{e^{-int}(1 - e^{i(2n+1)t})}{2(1-e^{it})} - \frac{1}{2} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Lemma

Für jede stetig diffb. Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt mit $r \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{|r|\to\infty} \int_a^b f(x) \sin rx\, dx = 0.$$

Beweis. partielle Integration. □

Weiter im Beweis:

Mit Hilfe des Lemmas erhalten wir schließlich:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \lim_{n\to\infty} \int_{\pi}^{x} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} dt - \frac{x-\pi}{2} = \frac{\pi - x}{2}.$$

$\square$

Satz

Sei $f \in V$ stetig und stückweise C^1, d.h. es gibt eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = 2\pi$, so dass $f_k := f|_{[t_{k-1},t_k]}$ von der Klasse C^1 ist, $k = 1, \ldots, r$.

Dann konvergiert $F_n(f)$ gleichmäßig gegen f.

Beweis.

Sei φ die periodische Funktion mit $\varphi|_{[t_{k-1},t_k)} = f_k'$.

Die Fourier-Koeffizienten c_n von f ergeben sich durch part. Integr. aus den Fourier-Koeff. γ_n von φ:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)e^{-inx}dx = \frac{i}{n}f(x)e^{-inx}\Big|_{t_{k-1}}^{t_k} - \frac{i}{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi(x)e^{-inx}dx.$$

Wg. der Periodizität von f erhält man daraus $c_n = -\frac{i}{n}\gamma_n$ $(n \neq 0)$.

Weiter im Beweis:

Desweiteren gilt nach der binomischen Formel

$$|c_n| = \frac{|\gamma_n|}{n} \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{n^2} + |\gamma_n|^2).$$

Aus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ und $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma_n|^2 < \infty$ (Besselsche-Ungl.) folgt nun die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe $F_n(f)$ gegen eine stetige Grenzfunktion g.

Andererseits konvergiert $F_n(f)$ im quadratischen Mittel gegen f.

Das ist nur möglich, wenn $f = g$, denn beide Funktionen sind stetig. $\square$

Folgerung (Weierstraßscher Approximationssatz für periodische Funktionen)

Jede stetige periodische Funktion $f \in V$ läßt sich glm. durch trigonometrische Polynome approximieren.

(Ein trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq n$ ist eine Linearkombination $\sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ikx}$.)

Beweis. Jede stetige Funktion läßt sich glm. durch stückweise lineare Funktionen approximieren, die wiederum durch ihre Fourier-Reihe glm. approximiert werden. □