Residuen II

Beispiel

Für

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

gilt nach 2)

$$\text{Res}\,(f; i) = \frac{1}{2z}\bigg|_{z=i} = \frac{1}{2i}, \qquad \text{Res}\,(f; -i) = \frac{1}{2z}\bigg|_{z=-i} = -\frac{1}{2i}$$

Residuen III

Beispiel

Die Funktion

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$$

hat bei $z_0 = i$ einen Pol zweiter Ordnung. Nach dem letzten Satz, Teil 3), gilt

$$\text{Res}\,(f; i) = g'(i) = -\frac{3}{4e}$$

wobei die Funktion $g(z)$ aufgrund der Darstellung

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2(z-i)^2}$$

durch

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}$$

Berechnung reeller Integrale mittels Residuensatz

Satz

Sei $r(x) = p(x)/q(x)$ eine rationale Funktion, die keine Singularitäten auf $\mathbb{R}$ besitzt, und es gelte $grad(q) \geq grad(p) + 2$. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x)\, dx = 2\pi i \sum_{Im\, z>0} Res(R; z).$$

Beweis

Wegen $grad(q) \geq grad(p) + 2$ existiert nach dem Majorantenkriterium das oben stehende uneigentliche Integrale, denn für $x \gg 1$ gilt

$$\left|\frac{p(x)}{q(x)}\right| \leq \frac{c}{x^2}.$$

Berechnung reeller Integrale mittels Residuensatz II

Beweis

Wir approximieren jetzt das uneigentliche reelle Integral durch ein komplexes Integral entlang einer Kurve. Wir wählen die Kurve wie folgt:

Beweis des Residuensatzes

Beweis (Forstsetzung)

Ist r hinreichend groß, so liegen alle Singularitäten z_k von $r(z)$ mit strikt positivem Imaginärteil innerhalb der Kurve $c_1 + c_2$.
Daraus folgt

$$2\pi i \sum_{Im\, z_k>0} Res(R; z_k) = \oint_{c_1+c_2} r(z)\, dz = \int_{c_1} r(z)\, dz + \int_{c_2} r(z)\, dz.$$

Nun gilt

$$\int_{c_1} r(z)\, dz = \int_{-r}^{r} r(z)\, dz \to \int_{-\infty}^{\infty} r(z)\, dz \qquad (r \to \infty).$$

Beweis des Residuensatzes II

Beweis (Forstsetzung)

Weiter berechnet man

$$\left| \int_{c_2} r(z)\, dz \right| \le \max_{|z|=r} |r(z)| \cdot \pi r \le \pi r \frac{c}{r^2} \to 0 \qquad (r \to \infty).$$

Daraus folgt die Behauptung unmittelbar. □

Integralberechnung mit Residuensatz – Beispiel

Beispiel

Wir untersuchen das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}.$$

Die Funktion $r(z) = 1/(1+z^6)$ besitzt sechs Polstellen, von denen drei in der oberen Halbebene liegen, nämlich $e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}$. Ferner gilt:

$$\operatorname{Res}(r; z_k) = \left.\frac{1}{6z^5}\right|_{z_k} = -\frac{z_k}{6}.$$

Integralberechnung mit Residuensatz – Beispiel II

Beispiel (Fortsetzung)

Damit folgt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} &= 2\pi i \left(-\frac{1}{6}e^{i\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{6}e^{i\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{6}e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) \\ &= \frac{\pi}{3}\left(\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}\left(2\sin\frac{\pi}{6} + 1\right)\end{aligned}$$

Residuen und Integralberechnung – Beispiel

Beispiel

Wir untersuchen das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + a^2}\, dx, \quad a > 0, \quad \omega > 0.$$

Der letzte Satz läßt sich nicht direkt anwenden, aber wegen

$$\left| \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2} \right| = \frac{e^{-\omega y}}{|z^2 + a^2|} \le \frac{1}{|z^2 + a^2|} \le \frac{c}{|z|^2} \qquad (y \ge 0)$$

entlang des Weges c_2, gilt die Aussage analog.

Residuen und Integralberechnung – Beispiel II

Beispiel

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + a^2}\, dx &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2}; z_k\right) = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2}; ia\right) \\ &= 2\pi i \left.\frac{e^{i\omega z}}{2z}\right|_{z=ia} = \frac{\pi}{a} e^{-\omega a}.\end{aligned}$$

Weitere Anwendungen

Satz

Sei $f(z)$ holomorph auf $\{z : Im\, z > -\varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, mit Ausnahme endlich vieler Singularitäten in der oberen Halbebene $Im\, z > 0$.
Gilt

$$\lim_{|z|\to\infty, y\geq 0} f(z) = 0,$$

so folgt

$$CHW \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum_{Im\, z_k > 0} Res(f(z)e^{iz}; z_k).$$

Weitere Anwendungen II

Beispiel

Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{e}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\, dx = 0$$

Weitere Anwendungen des Residuensatzes

Satz

Sei $r(z)$ eine rationale Funktion ohne Polstellen in $0 \leq x < \infty$ und es gelte $\operatorname{grad} q > \operatorname{grad} p$. Für $0 < \alpha < 1$ gilt

$$\int_0^\infty \frac{r(x)}{x^\alpha}\, dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi\alpha i}} \sum_{z_k \in \mathbb{C}\setminus\{0\}} Res\left(\frac{r(z)}{z^\alpha}; z_k\right).$$

Dabei ist folgender Zweig von z^α zu wählen:

$$z = re^{i\phi}, \quad 0 < \phi < 2\pi \quad \Rightarrow \quad z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\phi}.$$

Weitere Anwendungen des Residuensatzes II

Beispiel

Man berechnet

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha(1+x)}\, dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$