

Beweis

Einsetzen in das Kurvenintegral über c_r ergibt demnach

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = - \sum_{k=-\infty}^{-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^k.$$

Addiert man nun beide Reihendarstellungen, so folgt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad r \leq |z - z_0| \leq R.$$

wobei die Koeffizienten durch

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta & : k = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta & : k = -1, -2, -3, \dots \end{cases}$$

gegeben sind.

Laurent-Entwicklung

Beweis

Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt dann auch

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \quad (k \in \mathbb{Z})$$

für ein beliebiges $\rho \in [r, R]$. □

Bemerkung

- ① Die Laurent-Entwicklung von $f(z)$ ist bei vorgegebenem Kreisring **eindeutig** bestimmt.
- ② Ist $f(z)$ holomorph im gesamten Kreis $\overline{K_R(z_0)}$, so gilt aufgrund des Cauchyschen Integralsatzes für $k = -1, -2, -3, \dots$ die Beziehung

$$a_k = 0$$

und die Laurent-Entwicklung stimmt dann mit der Taylor-Entwicklung überein.

Laurent-Entwicklung im Beispiel

Beispiel

Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$$

mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und Kreisring $0 < |z| < \infty$.

Mit der Taylor-Entwicklung

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

erhalten wir die Laurent-Reihe

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k-1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots$$

Laurent-Entwicklung im Beispiel

Beispiel

Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$$

mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Der Nenner hat zwei Nullstellen in $z = -1$ und $z = 2$. Es existieren daher drei Laurent-Entwicklungen, nämlich in $|z| < 1$, in $1 < |z| < 2$, und in $|z| > 2$.

Für den Kreisring $1 < |z| < 2$ gilt etwa:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z-2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+1} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-z/2} - \frac{1}{3z} \cdot \frac{1}{1+1/z} \\ &= \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k - \frac{1}{3z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3 \cdot 2^{k+1}} \cdot z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3 \cdot 2^{k+1}}\right) \cdot z^k. \end{aligned}$$

Definition

Sei $f(z)$ holomorph auf einem Gebiet G . Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt **isolierte Singularität** von $f(z)$, falls ein $r > 0$ existiert mit $K_{0,r}(z_0) \subset G$.

Ist $f(z) = \sum a_k(z - z_0)^k$ die Laurent-Entwicklung in $K_{0,r}(z_0)$, so nennt man

- ① den Punkt z_0 eine **hebbare Singularität**, falls $a_k = 0$ für alle $k < 0$ gilt,
- ② den Punkt z_0 einen **Pol der Ordnung** $m \in \mathbb{N}$, falls gilt

$$a_{-m} \neq 0 \quad \wedge \quad \forall k < -m : a_k = 0$$

- ③ den Punkt z_0 eine **wesentliche Singularität**, falls $a_k \neq 0$ für unendlich viele $k < 0$ gilt.

Singularitäten – Beispiele

Beispiel

- ① Der Punkt $z_0 = 0$ ist eine hebbare Singularität der Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z},$$

denn die Taylor-Entwicklung lautet

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

- ② Die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$$

hat in $z_0 = 0$ einen Pol der Ordnung 1.

- ③ Rationale Funktionen haben **keine** wesentlichen Singularitäten: Sei

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

③ Sei

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

eine rationale Funktion. Die Singularitäten sind die Nullstellen von $q(x)$. Ist nun z_0 eine m -fache Nullstelle von $q(z)$, so gilt

$$q(z) = (z - z_0)^m r(z), \quad r(z_0) \neq 0 \quad \rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot g(z),$$

wobei g holomorph in z_0 ist. Daraus folgt

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

d.h. z_0 ist ein Pol der Ordnung $\leq m$ oder eine hebbare Singularität, falls $a_0 = a_1 = \dots a_{m-1} = 0$.

④ Die Funktion $f(z) = e^{1/z}$ hat in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität, denn es gilt

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \dots$$

Klassifikation von Singularitäten

Satz (Klassifikation von Singularitäten)

① Ist z_0 eine hebbare Singularität, so existiert der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$. Die Funktion

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & : z \neq z_0 \\ \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) & : z = z_0 \end{cases}$$

ist eine **holomorphe Fortsetzung** von $f(z)$.

② Ist $f(z)$ in einer Umgebung von z_0 beschränkt, so ist z_0 eine hebbare Singularität.

③ Ist z_0 ein Pol von $f(z)$, so gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

④ Ist z_0 eine wesentliche Singularität von $f(z)$, so bildet $f(z)$ jeden Kreisring $K_{0,\varepsilon}(z_0)$ auf $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ ab.

Definition

Besitzt die Funktion $f(z)$ bei z_0 die Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < r,$$

so nennt man

$$h(z; z_0) = \sum_{-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k$$

den **Hauptteil** von $f(z)$ zum Entwicklungspunkt z_0 .

Komplexe Partialbruchzerlegung und Residuen

Satz

Ist $r(z) = p(z)/q(z)$ eine rationale Funktion, wobei der Grad des Zählers echt kleiner als der Grad des Nenners ist, und sind $z_1, \dots, z_m$ die (verschiedenen) Nullstellen von $q(z)$, so gilt

$$r(z) = h(z; z_1) + \dots + h(z; z_m).$$

Beweis – Komplexe Partialbruchzerlegung

Beweis

Idee: Wir zeigen, dass die Funktion $g(z)$ definiert durch

$$g(z) = r(z) - \sum_{j=1}^m h(z; z_j)$$

beschränkt und auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist. Nach dem Satz von Liouville folgt dann, dass $g(z)$ konstant ist. Mit $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$, folgt dann die Behauptung.

Offensichtlich ist $g(z)$ holomorph auf dem Definitionsbereich $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ und die Hauptteile der Laurent-Entwicklungen zu den Entwicklungspunkten $z_1, \dots, z_m$ verschwinden identisch.

Demnach sind die Punkte $z_1, \dots, z_m$ hebbare Singularitäten und $g(z)$ ist holomorph auf **ganz** $\mathbb{C}$. Wegen $\text{grad } p < \text{grad } q$ folgt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} r(z) = 0$$

Beweis – Komplexe Partialbruchzerlegung

Beweis

und damit auch

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0.$$

Also ist $g(z)$ beschränkt und holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. Nach dem Satz von Liouville folgt

$$g(z) = \text{const}$$

und aufgrund des Grenzverhaltens für $z \rightarrow \infty$ folgt

$$g(z) = 0.$$



Anwendung des Satzes:

Die Partialbruchzerlegung einer komplexen rationalen Funktion kann über die Hauptteile der Laurent-Entwicklungen berechnet werden, wobei die Entwicklungspunkte gerade die Singularitäten der rationalen Funktion sind. Wir betrachten dazu ein Beispiel.

Partialbruchzerlegung

Beispiel

Man bestimme die Partialbruchzerlegung der Funktion

$$f(z) = \frac{4}{(z+1)^2(z-1)}.$$

Der Nenner besitzt die beiden Nullstellen $z = -1$ und $z = 1$. Wir bestimmen daher die Hauptteile der Laurent-Entwicklungen um gerade diese beiden Punkte.

1) Für $z = -1$ schreibt man

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \underbrace{\frac{4}{z-1}}_{g(z)}.$$

Nun ist $g(z)$ in einer Umgebung des Punktes $z = -1$ holomorph und kann in eine Taylor-Reihe entwickelt werden. Es gilt daher

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} \cdot (-2 - (z+1) + O((z+1)^2))$$

Beispiel (Fortsetzung)

und wir erhalten damit

$$f(z) = \underbrace{-\frac{2}{(z+1)^2} - \frac{1}{z+1}}_{h(z;-1)} + \dots$$

2) Analog schreiben wir für den Punkt $z = 1$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \underbrace{\frac{4}{(z+1)^2}}_{g(z)}$$

und erhalten durch Taylor-Entwicklung

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot (1 - (z-1) + O((z-1)^2))$$

Partialbruchzerlegung

Beispiel (Fortsetzung)

Demnach ist die komplexe Partialbruchzerlegung von $f(z)$ gegeben durch

$$f(z) = -\frac{2}{(z+1)^2} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}.$$

Definition

Ist z_0 eine isolierte Singularität von $f(z)$, so besitzt $f(z)$ eine Laurent-Entwicklung zum Punkt z_0 , d.h.

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < r.$$

Man nennt dann

$$\text{Res}(f; z_0) = a_{-1}$$

Satz (Residuensatz)

Sei G ein Gebiet, $f : G \setminus \{z_1, \dots, z_m\} \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph, c eine geschlossene, stückweise $\mathcal{C}^1$ -Kurve in $G \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$, die in G nullhomotop ist, d.h. innerhalb von c liegen höchstens die isolierten Singularitäten $z_1, \dots, z_m$. Dann gilt

$$\oint_c f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Uml}(c; z_k) \cdot \text{Res}(f; z_k).$$

Beweis

- 1) Zunächst genügt es, die Singularitäten, die innerhalb von c liegen, zu untersuchen, da sonst die Umlaufzahl Null ist.
- 2) Man zerlegt c in geschlossene Kurven $c_1, \dots, c_s$, sodass jede dieser Kurven c_j nur Singularitäten mit gleicher Umlaufzahl l_j enthält.

Residuensatz II

Beweis (Fortsetzung)

- 3) Jede Kurve c_j ist innerhalb von $G \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ homotop zu einer l_j -fach durchlaufenen einfach geschlossenen Kurve $\tilde{c}_j$, siehe Zeichnung auf Folie.

Daraus folgt

$$\oint_c f(z) dz = \sum_{j=1}^s \oint_{c_j} f(z) dz = \sum_{j=1}^s l_j \cdot \oint_{\tilde{c}_j} f(z) dz$$

- 4) Jeder einfach geschlossene Weg $\tilde{c}_j$ kann in eine Summe von Kreisen um die Singularitäten innerhalb von $\tilde{c}_j$ zerlegt werden.

Daraus folgt

$$\oint_c f(z) dz = \sum_{k=1}^m \text{Uml}(c; z_k) \oint_{|z-z_k|=\rho_k} f(z) dz.$$

Beweis (Fortsetzung)

Mit der Laurent-Entwicklung um z_k gilt aber

$$\begin{aligned}\oint_{|z-z_k|=\rho_k} f(z) dz &= \oint_{|z-z_k|=\rho_k} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z-z_k)^j dz \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \cdot \oint_{|z-z_k|=\rho_k} (z-z_k)^j dz \\ &= 2\pi i \cdot a_{-1} = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f; z_k)\end{aligned}$$

Für die Kurve in der Beweisskizze erhält man also

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \cdot [2\operatorname{Res}(f; z_1) + \operatorname{Res}(f; z_2)]$$

Methoden zur Berechnung von Residuen

Satz

- ❶ Ist z_0 ein **einfacher Pol** von $f(z)$, so besitzt $f(z)$ eine Darstellung der Form

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}$$

mit einer in z_0 holomorphen Funktion $g(z)$. Für das Residuum gilt dann

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

- ❷ Ist $f(z) = p(z)/q(z)$ mit auch in z_0 holomorphen Funktionen p und q eine rationale Funktion und z_0 eine **einfache Nullstelle** von $q(z)$, so gilt

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Berechnung von Residuen

Satz (Fortsetzung)

- ① Gilt $f(z) = g(z)/(z - z_0)^m$, $m \geq 1$ mit einer in einer Umgebung von z_0 holomorphen Funktion $g(z)$, so gilt

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

Beweis

Die erste Aussage ist ein Spezialfall von Teil 3), der über Taylor-Entwicklung bewiesen werden kann, da $g(z)$ in einer Umgebung von z_0 holomorph ist:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-m}.$$

Berechnung von Residuen

Beweis (Fortsetzung)

Für Teil 2) definieren wir

$$q(z) = (z - z_0)r(z)$$

Dann ist $r(z)$ im Punkt z_0 holomorph fortsetzbar mit $r(z_0) \neq 0$.

Damit ist die Funktion

$$g(z) = \frac{p(z)}{r(z)}$$

bei $z = z_0$ holomorph und wir erhalten für $f(z)$ die Darstellung

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}$$

Nach Teil 1) folgt wegen $q'(z) = r(z) + (z - z_0)r'(z)$

$$p(z_0)$$

Beispiel

Für die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$$

hat man nach Teil 1) des letzten Satzes

$$\operatorname{Res}(f; -1) = \left. \frac{1}{z-2} \right|_{z=-1} = -\frac{1}{3}$$

$$\operatorname{Res}(f; 2) = \left. \frac{1}{z+1} \right|_{z=2} = \frac{1}{3}$$

Beispiel

Für

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

Beispiel

Die Funktion

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$$

hat bei $z_0 = i$ einen Pol zweiter Ordnung. Nach dem letzten Satz, Teil 3), gilt

$$\operatorname{Res}(f; i) = g'(i) = -\frac{3}{4e}$$

wobei die Funktion $g(z)$ aufgrund der Darstellung

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2(z-i)^2}$$

durch

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}$$

gegeben ist