Windungszahl

Bemerkung

1. *Für einen beliebigen z_0–homotopen Weg in $G \setminus \{z_0\}$, der den Punkt z_0 nicht notwendigerweise genau einmal durchläuft, gilt*

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i \cdot Uml(c, z_0) \cdot f(z_0)$$

2. *Nützlich ist folgende heuristische Herleitung: aus der Taylor–Formel*

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$$

folgt

$$\frac{f(z)}{z - z_0} = \frac{f(z_0)}{z - z_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^{k-1}.$$

Windungszahl II

2. (Fortsetzung)
   Formal erhalten wir damit

$$\begin{aligned}\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz &= \oint_c \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\oint_c \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^{k-1}\, dz}_{=0} \\ &= 2\pi i \cdot f(z_0).\end{aligned}$$

Beispiel

Zu berechnen sei das Integral

$$\oint_c \frac{1}{1 + z^2}\, dz,$$

wobei c die Achterkurve bezeichnet, die den Punkt $z_1 = i$ einmal im positiven Sinn, den Punkt $z_2 = -i$ einmal im negativen Sinn umläuft.

Berechnung des Integrales

Beispiel (Fortsetzung)

1. Berechnung mittels **Partialbruchzerlegung**

$$\begin{aligned}\oint_c \frac{1}{1+z^2}\,dz &= \oint_c \frac{1}{(z+i)(z-i)}\,dz = \frac{i}{2}\oint_c \left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right) dz \\ &= \frac{i}{2}\oint_c \frac{dz}{z+i} - \frac{i}{2}\oint_c \frac{dz}{z-i} \\ &= \frac{i}{2}(-2\pi i) - \frac{i}{2}(2\pi i) = 2\pi\end{aligned}$$

2. Berechnung mittels **Cauchyscher Integralformel**

$$\begin{aligned}\oint_c \frac{1}{1+z^2}\,dz &= \oint_{c_1} \frac{\left(\frac{1}{z+i}\right)}{z-i}\,dz + \oint_{c_2} \frac{\left(\frac{1}{z-i}\right)}{z+i}\,dz \\ &= 2\pi i\left(\frac{1}{i+i}\right) - 2\pi i\left(\frac{1}{-i-i}\right) = 2\pi\end{aligned}$$

Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel

Korollar (1 (Mittelwerteigenschaft))

Ist $f(z)$ holomorph auf dem Gebiet G, so gilt für $z_0 \in G$, $\overline{K_r(z_0)} \subset G$ die Mittelwertformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt.$$

Korollar (2 (Maximumprinzip))

1) *Ist $f(z)$ holomorph auf G und besitzt $|f(z)|$ sein Maximum in $z_0 \in G$, dann ist $f(z)$ eine konstante Funktion.*
2) *Ist $f(z)$ stetig auf $\bar{G}$ und holomorph auf G, so nimmt $|f(z)|$ sein Maximum stets auf dem Rand ∂G an.*

Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel

Korollar (3 (Fundamentalsatz der Algebra))

Ist $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ *ein Polynom vom Grad* $n \geq 1$ *und* $a_n \neq 0$, *so besitzt* $p(z)$ *wenigstens eine Nullstelle in* $\mathbb{C}$.

Beweis

Annahme: das Polynom besitzt keine Nullstelle. Dann ist die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{p(z)}$$

holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. *Nun gilt*

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0} \right| \\ &= \frac{1}{|z|^n} \cdot \left| \frac{1}{a_n + a_{n-1}\frac{1}{z} + \cdots + a_0 \frac{1}{z^n}} \right| . \end{aligned}$$

Fundamentalsatz der Algebra – Beweis

Beweis

Im Grenzfall $z \to \infty$ *erhalten wir also*

$$\lim_{z \to \infty} |f(z)| = 0.$$

Daher muss $|f(z)|$ *in einem Punkt* $z_0 \in \mathbb{C}$ *das Maximum annehmen und nach dem Maximumprinzip folgt* $f(z) = const.$
Demnach ist auch $p(z) = const$ *und wir setzen*

$$p(z) = \alpha.$$

Es gilt dann

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 = \alpha$$

und wir erhalten durch Koeffizientenvergleich $a_n = 0$, *also einen Widerspruch.* □

Reihenentwicklung

Satz (Taylor–Entwicklung komplexer Funktionen)

1. *Ist $f(z)$ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$, so ist $f(z)$ in jedem Kreis $\overline{K_r(z_0)} \subset G$ in eine* **Potenzreihe** *entwickelbar*
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < r$$
Den Punkt z_0 nennt man den **Entwicklungspunkt**.
Insbesondere ist $f(z)$ auf G beliebig oft differenzierbar mit
$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$$
2. *Die Koeffizienten a_k der Potenzreihe sind gegeben durch*
$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$$

Reihenentwicklung II

Satz (Fortsetzung)

3. *Für den Konvergenzradius R der Taylor–Reihe gilt*
$$R \geq \sup\{r > 0 \,:\, K_r(z_0) \subset G\}$$
4. *Analog zur Cauchyschen Integralformel*
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$
gilt für die Ableitungen von $f(z)$ die Formel
$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$
*(***Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel***)*

Beweise I

Beweis (Teil 4)

Nach der Cauchyschen Integralformel gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta$$

wobei der Kreis $|\zeta - z_0| = r$ *einmal im positiven Sinn durchlaufen wird. Liegt nun* z *innerhalb dieses Kreises, d.h.* $|z - z_0| < r$*, so folgt ebenfalls*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Wir schreiben nun

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{\zeta - z_0}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)}. \end{aligned}$$

Beweise II

Beweis

Der letzte Ausdruck auf der rechten Seite ist der Grenzwert der geometrischen Reihe, d.h.

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k$$

und wir erhalten damit

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k.$$

Für den Integranden in obenstehendem Integral folgt

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \cdot (z - z_0)^k.$$

Beweise III

Beweis

Für die Integralformel ergibt sich damit

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \cdot (z - z_0)^k \, d\zeta.$$

Da die Potenzreihe gleichmäßig konvergiert, kann man Summation und Integration vertauschen und wir erhalten

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta \right] (z - z_0)^k.$$

Ein Koeffizientenvergleich in der Potenzreihe ergibt wegen 2)

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) = a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta$$

und damit die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel.

Cauchysche Ungleichung

Satz (Cauchysche Ungleichung)

Sei $f(z)$ holomorph auf G, $z_0 \in G$, $\overline{K_r(z_0)} \subset G$. Für die Koeffizienten der Taylor–Entwicklung von $f(z)$ um z_0 gilt dann die Abschätzung

$$\left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

mit

$$M(r) = \max_{|z - z_0| = r} |f(z)|.$$

Beweis

Aus der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{|z - z_0| = r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz$$

Liouville

folgt

$$\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot\max_{|z-z_0|=r}\left(\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}\right)\cdot 2\pi r$$
$$= \frac{1}{r^n}\cdot M(r)$$

Satz (Satz von Liouville)

Ist $f(z)$ holomorph und beschränkt auf $\mathbb{C}$, so ist $f(z)$ konstant.

Beweis

Aus der Cauchyschen Ungleichung folgt im Grenzwert $r \to \infty$:

$$f^{(n)}(z) = 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C},\ n \geq 1$$

Damit ist auch $f'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $f(z) = const.$ □

Singularitäten, Residuen

Satz (Laurent–Entwicklung)

1. *Sei $f(z)$ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \mathbb{C}$ (Entwicklungspunkt), $0 < \bar{r} < \bar{R}$ mit*

   $$K_{\bar{r},\bar{R}}(z_0) = \{z\ :\ \bar{r} < |z - z_0| < \bar{R}\} \subset G$$

   Dann ist $f(z)$ auf $K_{\bar{r},\bar{R}}(z_0)$ in eine **Laurent–Reihe** *entwickelbar:*

   $$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad \bar{r} < |z - z_0| < \bar{R}$$

2. *Für die Koeffizienten gilt ($\bar{r} < \rho < \bar{R}$)*

   $$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Residuen

Satz (Fortsetzung)

3) *Die Reihe konvergiert innerhalb des größten Kreisringes $K_{r,R}(z_0)$, der noch innerhalb von G liegt, in jedem kleineren (kompakten) Kreisring $\overline{K_{\rho_1,\rho_2}(z_0)}$ ist die Konvergenz absolut und gleichmäßig.*

Beweis

Gegeben sei ein Kreisring $K_{r,R}(z_0) \subset G$, $\bar{r} < r < R < \bar{R}$ mit den beiden Rändern

$$\begin{aligned} c_r(t) &= z_0 + re^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi \\ c_R(t) &= z_0 + Re^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi \end{aligned}$$

Behauptung:
Nach dem Cauchyschen Integralsatzes gilt für einen Punkt $z \in K_{r,R}(z_0)$ die Beziehung

Residuen II

Beweis

Seien dazu die beiden Kurven c_1 und c_2 wie im Bild definiert. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \oint_{c_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta &= \oint_{c_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \oint_{c_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= 2\pi i \cdot f(z) + 0 \end{aligned}$$

Wir versuchen nun, für die beiden Kurvenintegrale eine Reihendarstellung herzuleiten: Sei zunächst ζ ein Punkt auf c_R, d.h. $|\zeta - z_0| > |z - z_0|$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{\zeta - z_0}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k \end{aligned}$$

Residuen III

Beweis

Setzt man diese Formel in das Kurvenintegral ein, so folgt

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta\right](z - z_0)^k.$$

Sei nun ζ ein Punkt auf c_r, d.h. $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{z - z_0}\cdot\frac{z - z_0}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)}\\ &= -\frac{1}{z - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)} = -\frac{1}{z - z_0}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^k\\ &= -\sum_{m=-\infty}^{-1}\frac{(z - z_0)^m}{(\zeta - z_0)^{m+1}} \qquad (m = -(k+1))\end{aligned}$$

Residuen IV

Beweis

Einsetzen in das Kurvenintegral über c_r ergibt demnach

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = -\sum_{k=-\infty}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta\right](z - z_0)^k.$$

Addiert man nun beide Reihendarstellungen, so folgt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k, \quad r \le |z - z_0| \le R.$$

wobei die Koeffizienten durch

$$a_k = \begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{c_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta & : \quad k = 0, 1, 2, \ldots\\[2ex] \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{c_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta & : \quad k = -1, -2, -3, \ldots\end{cases}$$

gegeben sind.