Rückblick auf die letzte Vorlesung

1. Lineare Differentialgleichungen

Ausblick auf die heutige Vorlesung

1. Lineare autonome Differentialgleichungen
2. Bestimmung des Fundamentalsystems
3. Jordansche Normalform
4. Reelle Fundamentalsysteme

Autonome lineare Gleichungen

Fundamentalsysteme können explizit berechnet werden, falls gilt

$$A(t) = A = \text{konst.},$$

d.h. die Matrix ist unabhängig von t (**Konstante Koeffizienten**).
Ansatz: Suche eine Lösung in der Form

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}, \quad \lambda \in \mathbb{C},\ \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt:

$$\mathbf{y}'(t) = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{y}$$

Dies bedeutet:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

d.h. $\mathbf{y}(t)$ ist eine Lösung, falls
$\mathbf{v}$ ein **Eigenvektor** von $\mathbf{A}$ zum **Eigenwert** λ ist.

Wiederholung

Ein Fundamentalsystem $\mathbf{Y}(t)$ für $\mathbf{y}'(t) = A(t)\,\mathbf{y}(t)$ ist gegeben durch die n Anfangswertaufgaben

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{y}^k(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{y}^k(t) \\ \mathbf{y}^k(t_0) &= \mathbf{v}^k \end{aligned}$$

mit den Basisvektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$ und

$$\mathbf{Y}(t) := (\mathbf{y}^1(t), \ldots, \mathbf{y}^n(t)) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

Konstante Koeffizienten: Eigenvektor $\mathbf{v}$ zum Eigenwert λ

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t), \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{v}$$

besitzt die Lösung

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$$

Reell diagonalisierbare Matrizen

Fall 1: Alle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $\mathbf{A}$ sind reell und es existiert eine Basis aus reellen Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$.
Dann ist eine Fundamentalmatrix gegeben durch:

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t}\,\mathbf{v}^1, \ldots, e^{\lambda_n t}\,\mathbf{v}^n)$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems mit konstanten Koeffizienten lautet:

$$\mathbf{y}_h(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, e^{\lambda_k t}\,\mathbf{v}^k, \qquad c_k \in \mathbb{R}$$

Beispiel komplex diagonalisierbarer Matrix

Beispiel (Vorbereitung auf Fall 2)

Wir betrachten das System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte und –vektoren sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + 2i, \qquad \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} \\ \lambda_2 &= 1 - 2i, \qquad \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Beispiel komplex diagonalisierbarer Matrix II

Beispiel (Fortsetzung)

Es existiert also eine Basis aus Eigenvektoren, aber für $\mathbb{C}^2$, d.h. die Eigenvektoren (und Eigenwerte) sind komplexwertig.
Wir suchen aber **reellwertige** Lösungen!
Die komplexen Eigenvektoren bilden ein **komplexes** Fundamentalsystem:

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t}\,\mathbf{v}_1, e^{\lambda_2 t}\,\mathbf{v}_2)$$

Komplex diagonalisierbare Matrizen

Fall 2: Die Systemmatrix **A** ist **diagonalisierbar**
Dann existiert eine Basis des $\mathbb{C}^n$ aus (komplexen) Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$. Die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ müssen weder reell noch einfach sein.
Ein komplexes Fundamentalsystem (für $\mathbb{C}^n$) ist gegeben durch

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t}\,\mathbf{v}^1, \ldots, e^{\lambda_n t}\,\mathbf{v}^n)$$

Die allgemeine, **komplexwertige** Lösung des homogenen Systems mit konstanten **reellen** Koeffizienten lautet:

$$\mathbf{y}_h(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, e^{\lambda_k t}\,\mathbf{v}^k, \qquad c_k \in \mathbb{C}$$

Bedingung für Diagonalisierbarkeit

Bemerkung

Jede **normale** *und damit jede* **symmetrische** *Matrix ist diagonalisierbar (Lineare Algebra).*
Normale Matrix bedeutet, dass $\bar{A}^T A = A \bar{A}^T$ *gilt.*

Reelle Fundamentalsysteme

Frage: Ist es möglich, ein reelles Fundamentalsystem anzugeben?
Aus der **linearen Algebra:**
Ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein komplexer Eigenwert von $\mathbf{A}$, so ist auch $\bar{\lambda}$ (konjugiert–komplex) ein Eigenwert.
Dementsprechend ist $\bar{\mathbf{v}}$ ein Eigenvektor, falls $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor ist.
Also: Nichtreelle Eigenwerte und –vektoren treten stets paarweise auf.
Ersetze jedes komplexwertige Paar

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^1(t) &= e^{\lambda t}\mathbf{v} \\ \mathbf{y}^2(t) &= e^{\bar{\lambda} t}\bar{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

durch

Paare komplexer Eigenvektoren

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^1(t) &= \mathrm{Re}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v} + e^{\bar{\lambda} t}\bar{\mathbf{v}}\right) \\
\mathbf{y}^2(t) &= \mathrm{Im}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v} - e^{\bar{\lambda} t}\bar{\mathbf{v}}\right)
\end{aligned}$$

Komplexe Fundamentalsysteme

Beispiel

Ein komplexes Fundamentalsystem zu

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

lautet

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}^1, e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}^2)^T$$

mit

Komplexe Fundamentalsysteme II

Beispiel (Fortsetzung)

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}^1, e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}^2)^T$$

mit

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + 2i, & \mathbf{v}^1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} \\ \lambda_2 &= 1 - 2i, & \mathbf{v}^2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die beiden Eigenwerte treten paarweise auf:

$$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \qquad \mathbf{v}^2 = \bar{\mathbf{v}}^1$$

Komplexe Fundamentalsysteme III

Beispiel (Fortsetzung)

Aus den beiden komplexen Vektoren

$$\mathbf{z}^1(t) = e^{(1+2i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z}^2(t) = e^{(1-2i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$$

berechnet man die beiden reellen Vektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^1(t) &= \text{Re}\left(\mathbf{z}^1(t)\right) \\ \mathbf{y}^2(t) &= \text{Im}\left(\mathbf{z}^1(t)\right) \end{aligned}$$

also

Komplexe Fundamentalsysteme IV

Beispiel (Fortsetzung)

$$\mathbf{y}^1(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y}^2(t) = e^t \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -2\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Damit lautet die allgemeine, **reelle** Lösung des Systems

$$\mathbf{y}_h(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) \\ 2c_1\sin(2t) - 2c_2\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Nichtdiagonalisierbare Matrizen und Jordan Normalform

Fall 3: Die Systemmatrix **A** ist **nicht** diagonalisierbar
Hier benötigt man die **Jordansche Normalform** einer Matrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} \\ \mathbf{J} &= \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{J}_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{J}_i$ ein Jordan–Kästchen bezeichnet, d.h.

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Nichtdiagonalisierbare Matrizen und Jordan Normalform II

wobei $\mathbf{J}_i$ ein Jordan–Kästchen bezeichnet, d.h.

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

mit dem Eigenwert λ_i.
Wieso ist im Fall 3 die Jordansche Normalform wichtig?

Die Lösung zu einem Jordan-Kasten

Ein System der Form

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix} \tag{2}$$

kann explizit gelöst werden.

Die Lösung zu einem Jordan-Kasten II

Ein Fundamentalsystem für (2) ist gegeben durch

$$e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} \frac{t}{1!} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} \frac{t^2}{2!} \\ \frac{t}{1!} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{t}{1!} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dieses System entsteht mit den Einheitsvektoren $\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n$.

Jordansche Normalform

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$$

Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ besteht aus Eigen– und Hauptvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= (\mathbf{v}^{11}, \ldots, \mathbf{v}^{1r_1} \,|\, \mathbf{v}^{21}, \ldots, \mathbf{v}^{2r_2} \,|\, \ldots \,|\, \mathbf{v}^{m1}, \ldots, \mathbf{v}^{mr_m}) \\ \mathbf{v}^{j1} &: \text{ Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda_j,\ j = 1, \ldots, m \\ \mathbf{v}^{jk} &: \text{ Hauptvektor der Stufe } (k-1),\ k = 2, \ldots, r_j \\ & \quad\ (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}_n)\mathbf{v}_{jk} = \mathbf{v}_{j,k-1},\ k = 2, \ldots, r_j. \end{aligned}$$

Wir setzen nun $\mathbf{z}(t) := \mathbf{S}^{-1}\mathbf{y}(t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'(t) &= \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{y}'(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\,\mathbf{z}(t) \\ &\Rightarrow \mathbf{z}'(t) = \mathbf{J}\,\mathbf{z}(t) \end{aligned}$$

Ein Fundamentalsystem für $\mathbf{z}' = \mathbf{J}\,\mathbf{z}$ haben wir bereits berechnet.

Rücktransformation

Eine Rücktransformation ergibt ein Fundamentalsystem für $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y}$.
Für ein einzelnes Jordan–Kästchen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^{11}(t) &= e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}^{11} \\
\mathbf{y}^{12}(t) &= e^{\lambda_1 t}\left(\frac{t}{1!}\,\mathbf{v}^{11} + \mathbf{v}^{12}\right) \\
&\vdots \\
\mathbf{y}^{1r}(t) &= e^{\lambda_1 t}\left(\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\,\mathbf{v}^{11} + \cdots + \frac{t}{1!}\,\mathbf{v}^{1,r-1} + \mathbf{v}^{1r}\right)
\end{aligned}$$

Vorgehen zur Bestimmung der Lösung

1) Bestimmung der Eigenwerte, Eigen– und Hauptvektoren,
2) Berechnung der Lösungen nach obiger Formel,
3) Zusammenfügen dieser Einzelmatrizen zur Fundamentalmatrix.

Beispiel eines autonomen linearen Systems

Beispiel

Gesucht ist die allgemeine Lösung des Systems

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom von $\mathbf{A}$ lautet:

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det\left(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3\right) = (1-\lambda)^3$$

$\lambda = 1$ ist also ein dreifacher Eigenwert mit Eigenvektoren:

Eigen- und Hauptvektoren

Beispiel (Fortsetzung)

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da $\operatorname{rang}\left(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3\right) = 2$ gilt, ist die geometrische Vielfachheit $g(\lambda) = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \\ v_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Hauptvektoren

Beispiel (Fortsetzung)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^3 \\ v_2^3 \\ v_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ein Fundamentalsystem ist daher gegeben durch:

$$\mathbf{Y}(t) = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 16 & 16t & 8t^2 \\ 0 & -4 & -4t+1 \\ 0 & 8 & 8t+2 \end{pmatrix}.$$

Beispiel mit 2 Jordan Blöcken

Beispiel

Gesucht ist die allgemeine Lösung des Systems

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Wieder ist $\lambda = 1$ dreifacher Eigenwert von $\mathbf{A}$, aber es gilt $g(\lambda) = 2$. Es existieren also **zwei** linear unabhängige Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel mit 2 Jordan Blöcken II – Hauptvektor

Beispiel

Es gilt:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3)^2 = \mathbf{0}$$

Wir suchen daher einen zu $\mathbf{v}^1$ und $\mathbf{v}^2$ linear unabhängigen Vektor $\mathbf{v}^{22}$ (Hauptvektor der Stufe 1).

Beispiel mit 2 Jordan Blöcken III

Beispiel (Fortsetzung)

Wähle etwa $\mathbf{v}^{22} = (0, 0, 1)^T$. Dann gilt

$$\mathbf{v}^{21} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3)\mathbf{v}^{22} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir folgende System von Eigen– und Hauptvektoren:

$$\mathbf{v}^{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}^{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}^{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel mit 2 Jordan Blöcken III – Fundamentalsystem

Beispiel (Fortsetzung)

Zugehöriges Fundamentalsystem:

$$\mathbf{y}^1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}^2(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}^3(t) = e^t \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformationsmatrizen

Es gilt:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Jordansche Normalform ist:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}.$$