Stabilität mittels Ljapunov–Funktion

Definition

Eine $\mathcal{C}^1$–Funktion $V : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, heißt eine **Ljapunov–Funktion** auf $\bar{K}_r(\mathbf{0}) \subset D$ für $\mathbf{f}(\mathbf{y})$, falls gilt:

1) $$V(\mathbf{0}) = 0, \quad V(\mathbf{y}) > 0 \quad \text{für } \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$$

2) $$\langle \nabla V, \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle \leq 0 \qquad (\forall\, \mathbf{y},\ \|\mathbf{y}\| \leq r)$$

Gilt in 2) sogar

2') $$\langle \nabla V, \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle < 0 \qquad (\forall\, \mathbf{y},\ 0 < \|\mathbf{y}\| \leq r)$$

so heißt $V(\mathbf{y})$ eine **strenge Ljapunov–Funktion**.

Ljapunovfunktion und Stabilität

Satz (Stabilitätssatz IV)

1) *Ist $V(\mathbf{y})$ eine Ljapunov–Funktion von $\mathbf{f}(\mathbf{y})$, so ist $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein gleichmäßig stabiler Gleichgewichtspunkt.*
2) *Ist $V(\mathbf{y})$ eine strenge Ljapunov–Funktion von $\mathbf{f}(\mathbf{y})$, so ist $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.*

Ljapunovfunktion und Stabilität – Beweis

Beweis

Man betrachtet die Zeitableitung der Funktion $V(\mathbf{y}(t))$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\mathbf{y}(t)) &= \textit{grad } V(\mathbf{y}(t)) \cdot \mathbf{y}'(t) \\ &= \textit{grad } V(\mathbf{y}(t)) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) \\ &= \langle \nabla V, \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle \end{aligned}$$

Ist V eine (strenge) Ljapunov–Funktion, so ist $V(\mathbf{y}(t))$ (streng) monoton fallend.

Instabile Gleichgewichtspunkte

Bemerkung

Gilt für eine $\mathcal{C}^1$–Funktion $V(\mathbf{y})$ sowohl

$$V(\mathbf{0}) = 0, \quad V(\mathbf{y}) > 0 \quad \textit{für } \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$$

als auch

$$\langle \nabla V, \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle > 0 \qquad (\forall\, \mathbf{y},\, 0 < \|\mathbf{y}\| \leq r),$$

so ist $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein **instabiler** *Gleichgewichtspunkt.*

Ljapunovfunktion – Ein Beispiel

Beispiel

Wir betrachten das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^3 + y\\ \dot{y} &= -x - y^5.\end{aligned}$$

Der Nullpunkt ist ein isolierter Gleichgewichtspunkt des Systems. Wir machen den Ansatz

$$V(x,y) = ax^2 + by^2, \qquad a, b > 0.$$

Ljapunovfunktion – Ein Beispiel II

Beispiel (Fortsetzung)

Offensichtlich gilt:

$$V(0,0) = 0, \quad V(x,y) > 0 \qquad \text{für } (x,y) \neq (0,0).$$

Weiter berechnet man

$$\begin{aligned}\langle \nabla V(x,y), \mathbf{f}(x,y)\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 2ax \\ 2by \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x^3 + y \\ -x - y^5 \end{pmatrix} \right\rangle\\ &= 2ax(-x^3 + y) + 2by(-x - y^5)\\ &= -2ax^4 + 2axy - 2bxy - 2by^6.\end{aligned}$$

Ljapunovfunktion – Ein Beispiel III

Beispiel (Fortsetzung)

Setzt man $a = b > 0$, so folgt

$$V(x, y) = -2ax^4 - 2ay^6,$$

d.h. V ist eine **strenge Ljapunov–Funktion** und der Nullpunkt ist ein **asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt**.

Nochmals das Pendel

Beispiel

Beim mathematischen Pendel

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 \sin y_1 \end{aligned}$$

setzt man

$$V(y_1, y_2) := \frac{1}{2}y_2^2 + \omega^2(1 - \cos y_1).$$

Damit gilt $V(0,0) = 0, V(y_1, y_2) > 0$ für $(y_1, y_2) \in \bar{K}_r(\mathbf{0})$, $r < \pi$.
Weiter berechnet man

$$\langle \nabla V, \mathbf{f} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \omega^2 \sin y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ -\omega^2 \sin y_1 \end{pmatrix} \rangle = 0.$$

Nochmals das Pendel II

Beispiel (Fortsetzung)

Also ist V ein Ljapunov–Funktion auf $\bar{K}_r(\mathbf{0})$ und der Nullpunkt ist ein stabiler Gleichgewichtspunkt.
Allerdings ist V **keine** strenge Ljapunov–Funktion, denn der Ursprung ist auch **nicht** asymptotisch stabil.

Teil II

Ausbau der Theorie

Randwertaufgaben

Wir betrachten ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \qquad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n.$$

Dabei sei $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hinreichend oft stetig differenzierbar.

Anfangswertproblem Gebe Lösung zur Zeit $t = a$ vor

$$\mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0.$$

Randwertproblem: Zur (eindeutigen) Festlegung einer Lösung $\mathbf{y}(t)$ werden nicht alle Komponenten y_i an **einer** Stelle vorgegeben wie oben, sondern

gewisse Komponenten y_i an verschiedenen Stellen $t = a, b, c, \ldots$

Randwertprobleme

Beispiel

1) **Sturmsche Randwertaufgaben**

$$\begin{aligned} y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0 y(t) &= h(t) \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) &= d_1 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) &= d_2 \end{aligned}$$

2) **Lineare Randwertaufgaben**

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{B}_a\mathbf{y}(a) + \mathbf{B}_b\mathbf{y}(b) &= \mathbf{d} \end{aligned}$$

Randwertprobleme II

Beispiel

3) **Allgemeine Zweipunkt–Randwertaufgaben**

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) &= 0 \end{aligned}$$

Randwertpbleme und eindeutige Lösbarkeit

Randwerte bestimmen die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung:

Beispiel

Wir betrachten die (lineare) DGL zweiter Ordnung

$$y'' + y = 0.$$

1) Die Randwerte

$$y(0) = 0 \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

ergeben die eindeutig bestimmte Lösung $y(t) = \sin t$.

2) **Keine** Lösung existiert für die Randwerte

$$y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 1.$$

Randwertpbleme und eindeutige Lösbarkeit II

Beispiel (Fortsetzung)

3) Für die Randwerte

$$y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 0$$

gibt es **unendlich viele** Lösungen $y(t) = c \sin t$, $c \in \mathbb{R}$ beliebig.

Existenzsatz

Satz

Gegeben sei eine lineare Randwertaufgabe mit stetigen Funktionen $\mathbf{A}(t), \mathbf{h}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. *Weiter sei* $\mathbf{Y}(t)$ *ein Fundamentalsystem zu* $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. *Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1) *Die lineare Randwertaufgabe ist für* **alle** *stetigen Inhomogenitäten* $\mathbf{h}(t)$ *und* $\mathbf{d}$ *stets eindeutig lösbar.*
2) *Die zugehörige Randwertaufgabe*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad \mathbf{B}_a\mathbf{y}(a) + \mathbf{B}_b\mathbf{y}(b) = 0$$

hat nur die triviale Lösung $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$.

3) *Die nachfolgende Matrix ist regulär.*

$$\mathbf{E} := \mathbf{B}_a\mathbf{Y}(a) + \mathbf{B}_b\mathbf{Y}(b) \in \mathbb{R}^{(n,n)}.$$

Fundamentalsystem und Randwertaufgaben

Beispiel

Wir betrachten wieder die Differentialgleichung $y'' + y = 0$, schreiben dies als ein System zweiter Ordnung und bestimmen das zugehörige Fundamentalsystem:

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Fundamentalsystem und Randwertaufgaben II

Beispiel (Fortsetzung)

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{B}_a\mathbf{Y}(0) + \mathbf{B}_b\mathbf{Y}(b) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos b & \sin b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Matrix **E** ist demnach für $b = \pi/2$ und singulär für $b = \pi$ regulär.

Weitere Randwertprobleme

Viele andere Probleme lassen sich auf Randwertaufgaben zurückführen.

Beispiel

Gegeben sei ein **Randwertproblem mit freier Endzeit**:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \qquad 0 \le t \le T \\ \mathbf{r}(\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(T)) &= 0 \end{aligned}$$

wobei T zu bestimmen ist und $\mathbf{r} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ gerade $(n+1)$ Randbedingungen definiert.
Wir setzen nun $t = \tau \cdot T$ und

$$\mathbf{z}(\tau) := \mathbf{y}(\tau \cdot T), \qquad z_{n+1}(\tau) := T \qquad 0 \le \tau \le 1$$

Weitere Randwertprobleme II

Beispiel

Dann gilt auf dem festen Intervall $0 \le \tau \le 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'(\tau) &= z_{n+1}\mathbf{f}(z_{n+1} \cdot \tau, \mathbf{z}(\tau)), \qquad z'_{n+1}(\tau) = 0 \\ \mathbf{r}(\mathbf{z}(0), \mathbf{z}(1)) &= 0 \end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich eine allgemeine Zweipunkt–Randwertaufgabe im $\mathbb{R}^{n+1}$ über dem festen Integrationsintervall $[0, 1]$.