Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Reiner Lauterbach
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Wintersemester 2004/2005
Basierend auf der Vorlesung von
Jens Struckmeier (WS 2001/02)

Beispiel: Taylor–Entwicklung der Exponentialfunktion

Betrachte die Exponentialfunktion $f(x) := \exp(x)$. Zunächst gilt:

$$\Big(\exp(x)\Big)' = \exp(x)$$

Daher gilt nach der Taylor–Entwicklung mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x;0)$$

Das Restglied lautet:

$$R_n(x;0) = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \xi = \theta x, \quad 0 < \theta < 1$$

Fehlerabschätzung für $0 \leq x \leq 1$:

$$|R_n(x;x_0)| = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

Zum Beispiel: $|R_{10}(x;x_0)| \leq 6.81 \cdot 10^{-8}$.

Beispiel: Taylor–Entwicklung der Sinusfunktion

Betrachte die Sinusfunktion $f(x) := \sin x$. Zunächst gilt:

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

Daher gilt nach der Taylor–Entwicklung mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x;0)$$

Das Restglied lautet:

$$R_n(x;0) = (-1)^{n+1}\frac{\cos\xi}{(2n+3)!}x^{2n+3}, \quad \xi = \theta x, \quad 0 < \theta < 1$$

Für $x \in [-\pi/6, \pi/6]$, $x \neq 0$ und $n = 3$ ergibt sich folgende Abschätzung für den **relativen Fehler**:

$$\left|\frac{R_8(x;0)}{\sin x}\right| \leq \left|\frac{\pi R_8(x;0)}{3|x|}\right| \leq \frac{1}{9!}\frac{\pi}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^8 = 1.63 \cdot 10^{-8}.$$

Bemerkung:

Die Taylor–Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

einer C^∞–Funktion ist im Allgemeinen

nicht konvergent.

Konvergiert die Reihe, so nicht notwendigerweise gegen $f(x)$.

Gilt aber

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

so nennt man die Funktion f **reell analytisch** oder eine C^ω–Funktion.

Folgerungen aus der Taylor–Formel:

a) **Satz:** Gilt für eine C^{n+1}–Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\forall\, x \in [a, b] \quad : \quad f^{(n+1)}(x) = 0$$

so ist $f(x)$ ein Polynom höchstens n–ten Grades.
Begründung:
Das Restglied $R_n(x; x_0)$ nach Lagrange verschwindet identisch.

b) **Satz:** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine C^2–Funktion und $x^* \in (a, b)$ eine einfache Nullstelle dieser Funktion. Dann ist das Newton–Verfahren mit Startwerten in der Nähe von x^* **quadratisch konvergent**.

Begründung: Aus der Taylor–Entwicklung zweiter Ordnung folgt:

$$(x_{n+1} - x^*) = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}\,(x_n - x^*)^2 \qquad \xi_n \in \begin{cases} (x_n, x^*) \\ (x^*, x_n) \end{cases}$$

Interpretation der ersten Folgerung:
Wir betrachten die **gewöhnliche Differentialgleichung** $y^{(n+1)} = 0$. Dann ergibt sich als Lösungsraum genau der Raum der Polynome vom Grad höchstens n. Schon hier können wir feststellen, dass eindeutige Lösbarkeit nur durch zusätzliche Forderungen an die Lösung erzielt werden kann. Dieses Thema wird uns noch ausführlich beschäftigen.

c) **Taylor–Formel für Polynome:**

Ist die Funktion $f(x)$ selbst ein Polynom vom Grad n, also

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (a_n \neq 0)$$

so ist das Taylor–Polynom n–ten Grades zu einem beliebigen Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

und identisch mit $f(x)$, d.h.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Damit ist $p(x)$ nur eine Umordnung bezüglich des Punktes x_0.

d) **Satz: (Kriterien für lokale Extrema II)**

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine C^2–Funktion, so gilt für $x_0 \in (a, b)$:

1) $f'(x_0) = 0 \ \wedge \ f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ hat in x_0 ein strenges lokales Minimum.

2) $f'(x_0) = 0 \ \wedge \ f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ hat in x_0 ein strenges lokales Maximum.

Problem: Was passiert im Fall $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$?

Hier gibt es zwei Möglichkeiten

1) Der stationäre Punkt ist tatsächlich ein **strenges lokales Minimum oder Maximum**.

2) Der stationäre Punkt ist ein **Wendepunkt**.

Frage: Wann gilt 1) oder 2)?

1) Der stationäre Punkt ist tatsächlich ein **strenges lokales Minimum oder Maximum**, wenn gilt:

Ist f eine C^{2n}–Funktion ($n \in \mathbb{N}$) und gilt:

$$\forall\, k = 1, 2, \ldots, 2n-1 \quad : \quad f^{(k)}(x_0) = 0$$

so ist x_0 ein strenges lokales Minimum bzw. Maximum, falls

$$f^{(2n)}(x_0) > 0 \quad \text{bzw.} \quad f^{(2n)}(x_0) < 0$$

Beispiel: Betrachte die Funktion $f(x) = x^5 - x^4$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 - 4x^3 \quad f''(x) = 20x^3 - 12x^2 \\ f^{(3)}(x) &= 60x^2 - 24x \quad f^{(4)}(x) = 120x - 24 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$f'(0) = 0 \quad f''(0) = 0 \quad f^{(3)}(0) = 0 \quad f^{(4)}(0) = -24$$

2) Wendepunkt = Links–Rechtskurve oder Rechts–Linkskurve

Konvexität

Definition: Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **konvex** (oder eine **Linkskurve**), falls für alle $x_1 < x < x_2$ in $[a, b]$ gilt:

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1))$$

Die Funktion $f(x)$ heißt **konkav** (oder eine **Rechtskurve**), falls für alle $x_1 < x < x_2$ in $[a, b]$ gilt:

$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1))$$

Gelten jeweils die Ungleichungen mit $<$ bzw. $>$, so nennt man die Funktionen **streng konvex** bzw. **streng konkav**.

Satz: Sei $f(x)$ eine C^2–Funktion auf $[a, b]$. Dann gilt:

$$\forall\, x \in (a,b) \;:\; f''(x) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \text{ streng konvex}$$

$$\forall\, x \in (a,b) \;:\; f''(x) < 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \text{ streng konkav}$$

Bemerkung: Der Graph einer konvexen, differenzierbaren Funktion liegt stets oberhalb seiner Tangenten.

Definition: Für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sagt man:

$f(x)$ hat in $x_0 \in (a, b)$ einen **Wendepunkt**, falls

1) $f(x)$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ in $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ konvex und in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ konkav ist (**Links–Rechtskurve**)

oder

2) $f(x)$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ in $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ konkav und in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ konvex ist (**Rechts–Linkskurve**)

Satz: (Kriterien für Wendepunkte)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine C^3–Funktion

1) Ist $x_0 \in (a, b)$ ein Wendepunkt, so gilt: $f''(x_0) = 0$

2) Gilt für $x_0 \in (a, b)$: $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) > 0$, so ist x_0 ein **Wendepunkt** und $f(x)$ ist bei x_0 eine **Rechts–Linkskurve**.

   Gilt für $x_0 \in (a, b)$: $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) < 0$, so ist x_0 ein **Wendepunkt** und $f(x)$ ist bei x_0 eine **Links–Rechtskurve**.

Beispiel: Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^4 - x^3$:

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 \qquad f''(x) = 12x^2 - 6x \qquad f'''(x) = 24x - 6$$

Im Punkt $x_0 = 0$: $\quad f'(0) = 0 \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) = -6$

$\Rightarrow$ Die Funktion hat in $x_0 = 0$ einen Wendepunkt (Links–Rechtskurve)

Lokales Minimum bei $x_1 = 3/4$: $\quad f'(3/4) = 0 \quad f''(3/4) = 9/4$