Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Reiner Lauterbach
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Wintersemester 2004/2005
Basierend auf der Vorlesung von
Jens Struckmeier (WS 2001/02)

Kapitel 5: Weiterer Ausbau der Differentialrechnung

5.1 Extremwerte, Mittelwertsätze, Satz von Taylor

Lokale Extremwerte

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset V$, V normierter Vektorraum), $x_0 \in D$.

1) $f(x)$ hat in x_0 ein **globales Maximum**, falls gilt:

$$\forall\, x \in D \;:\quad f(x) \leq f(x_0)$$

2) $f(x)$ hat in x_0 ein **strenges globales Maximum**, falls gilt:

$$\forall\, x \in D \setminus \{x_0\} \;:\quad f(x) < f(x_0)$$

3) $f(x)$ hat in x_0 ein **lokales Maximum**, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit:

$$\forall\, x \in D \;:\quad \|x - x_0\| < \varepsilon \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(x_0)$$

4) $f(x)$ hat in x_0 ein **strenges lokales Maximum**, falls es ein ε gibt mit:

$$\forall\, x \in D \;:\quad 0 < \|x - x_0\| < \varepsilon \;\Rightarrow\; f(x) < f(x_0)$$

Analoge Definitionen gelten für minimale Funktionswerte (Extremwerte).

Satz: (Kriterium für lokale Extrema I)

Besitzt $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in [a,b]$ ein lokales Extremum und ist $f(x)$ in x_0 differenzierbar, so gilt:

$$a < x_0 < b \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0$$

$$x_0 = a \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) \begin{cases} \leq 0 & \text{für ein Maximum} \\ \geq 0 & \text{für ein Minimum} \end{cases}$$

$$x_0 = b \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) \begin{cases} \geq 0 & \text{für ein Maximum} \\ \leq 0 & \text{für ein Minimum} \end{cases}$$

Bemerkung: Die Punkte x_0 mit $f'(x_0) = 0$ heißen **stationäre Punkte**.

Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist lediglich eine **notwendige Bedingung** für ein Extremum. Randpunkte sowie Punkte, an denen $f(x)$ nicht differenzierbar ist, werden mit der notwendigen Bedingung nicht erfasst.

Beispiel:
Betrachte die Funktion $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$ auf dem Intervall $(0,1)$. Es gilt

$$f'(x) = \frac{2x - 3x^3}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

Stationäre Punkte: $2x - 3x^3 = 0 \Rightarrow x \in \{-\sqrt{2/3}, 0, \sqrt{2/3}\}$

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & : \quad -1 < x < -\sqrt{2/3} \\ < 0 & : \quad -\sqrt{2/3} < x < 0 \\ > 0 & : \quad 0 < x < \sqrt{2/3} \\ < 0 & : \quad \sqrt{2/3} < x < 1 \end{cases}$$

Globale Minima bei $x = \pm 1, 0$ mit Funktionswert $f(x) = 0$.
Globales Maximum bei $x = \sqrt{2/3}$ mit Funktionswert $f(x) = 2/(3\sqrt{3})$
$(-\sqrt{2/3} \notin D)$.

1) **Satz von Rolle**
   Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b), so gilt:

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad \exists\, x_0 \in (a,b) \;:\; f'(x_0) = 0$$

2) **Erster Mittelwertsatz**
   Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b), so gilt:

$$\exists\, x_0 \in (a,b) \quad : \qquad f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

3) **Zweiter Mittelwertsatz**
   Sind die Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b) und gilt $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, so gilt:

$$\exists\, x_0 \in (a,b) \quad : \qquad \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Monotone Funktionen

Für eine auf $[a, b]$ differenzierbare Funktion gilt:

$$\forall\, x \;:\; f'(x) \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) \text{ monoton wachsend}$$

$$\forall\, x \;:\; f'(x) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \text{ streng monoton wachsend}$$

$$\forall\, x \;:\; f'(x) \leq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) \text{ monoton fallend}$$

$$\forall\, x \;:\; f'(x) < 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \text{ streng monoton fallend}$$

Beispiel: Die Ableitung der Funktion $f(x) = x - \ln(x+1)$, $-1 < x < \infty$, lautet

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

Damit ist f auf $(-1, 0)$ monoton fallend, auf $(0, \infty)$ monoton wachsend. Insbesondere gilt für alle $x \neq 0$

$$f(x) > f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(1+x) < x \quad (\forall x \in (-1, \infty), x \neq 0)$$

Definition: (Landau–Symbole) Für eine Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}$, $0 \in D \cap D'$, und $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ sagt man:

$$\varphi(h) = o(h^k) \qquad :\Leftrightarrow \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h^k} = 0$$

$$\varphi(h) = O(h^k) \qquad :\Leftrightarrow \qquad \exists\, C, \varepsilon > 0 \;:\; \forall\, 0 < |h| < \varepsilon \;: \left(h \in D \;\Rightarrow\; \left\| \frac{\varphi(h)}{h^k} \right\| \le C \right)$$

Bedeutung:

$\varphi(h) = o(h^k)$: $\varphi(h)$ konvergiert für $h \to 0$ schneller gegen Null als h^k

$\varphi(h) = O(h^k)$: $\varphi(h)$ konvergiert für $h \to 0$ wenigstens so schnell gegen Null wie h^k

Ableitung: Ist f differenzierbar in x_0, so gilt:

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0).$$

Taylor–Entwicklung, Taylor–Polynom, Satz von Taylor:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine C^n–Funktion und $x_0 \in (a, b)$.

Frage: Wie kann man $f(x)$ in der Nähe von x_0 approximieren?

Erste Antwort: f ist differenzierbar, also gilt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\textbf{Polynom vom Grad 1}} + o(x - x_0)$$

Zweite Antwort:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2}}_{\textbf{Polynom vom Grad 2}} + o\left((x - x_0)^2\right)$$

Denn es gilt ebenfalls:

$$f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Integration über $[x_0, x]$ liefert die zweite Antwort.

Satz von Taylor: (Taylor–Entwicklung, Taylor–Polynom)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine C^n–Funktion und $x_0 \in (a, b)$.

Dann gilt:

$$f(x) = T_n(x; x_0) + o\left((x - x_0)^n\right)$$

Dabei lautet das (eindeutig bestimmte) **Taylor–Polynom**

$$T_n(x; x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Den Punkt x_0 nennt man den **Entwicklungspunkt**.

Ist f eine C^{n+1}–Funktion, so gilt die **Restgliedformel (Lagrange):**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x; x_0) \\ R_n(x; x_0) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (|\xi - x_0| < |x - x_0|) \end{aligned}$$

Bemerkung: Andere Darstellungen für das Restglied:

1) Integraldarstellung des Restglieds:

$$R_n(x;x_0) = \frac{1}{n}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

2) Restgliedformel von Cauchy:

$$R_n(x;x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n$$

mit $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, $\theta \in (0,1)$

3) Restgliedformel von Schlömilch:

$$R_n(x;x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p\,n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^{n+1-p}$$

mit $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, $\theta \in (0,1)$, $p \in \{1,2,\ldots,n+1\}$.