Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Reiner Lauterbach

Fachbereich Mathematik

Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg

Wintersemester 2004/2005

Basierend auf der Vorlesung von

Jens Struckmeier (WS 2001/02)

Das Berechnen von an sich in einem Problem unbekannten Größen ist Anliegen der Mathematik und Ausgangspunkt von zentralen Überlegungen innerhalb der Mathematik. Solche Berechnungsmethoden für immer wieder neue Aufgaben bereit zu stellen, ist die Anfrage an die Mathematik aus verschiedenen Anwendungen. Ziel dieses Kurses ist es (unter anderem!) Ihnen die Fähigkeit zu vermitteln solche Fragen zu stellen, die Antworten zu verstehen und diese für Ihre Fragestellungen verwenden zu können. Dazu müssen Sie einen Teil der Sprache der Mathematik lernen, sich mit grundlegenden Denkmethoden der Mathematik und der Mathematiker auseinandersetzen. Gleiches gilt natürlich auch für die andere Seite, auch der Mathematiker muss sich auf ein Gespräch vorbereiten und einlassen. Nur wenn Bereitschaft zum Dazulernen und ein grundlegendes Verständnis für die jeweilige andere Seite auf beiden Seiten vorhanden sind, kann fruchtbares im Gespräch gelingen!

Kapitel 1: Aussagen, Mengen und Funktionen

1.1 Aussagen

Beispiele für Aussagen sind

- 5 ist eine gerade Zahl
- 16 ist eine Quadratzahl
- heute ist Donnerstag
- heute scheint die Sonne

Kennzeichnende Eigenschaft

Aussagen sind entscheidbar **wahr** oder **falsch**

Wahrheitswerte: Sei A eine Aussage

$$\begin{aligned} w(A) = 0 \quad &:\Leftrightarrow \quad A \text{ ist falsch} \\ w(A) = 1 \quad &:\Leftrightarrow \quad A \text{ ist wahr} \end{aligned}$$

Verknüpfung von Aussagen:

$\neg A$	:	Negation
$A \wedge B$	:	Konjunktion
$A \vee B$	:	Disjunktion
$A \Rightarrow B$	:	Implikation
$A \Leftrightarrow B$	:	Äquivalenz

Wahrheitswertetafeln:

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg A)$	$w(A \wedge B)$	$w(A \vee B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(A \Leftrightarrow B)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Beachte:

Eine Implikation ist immer wahr, wenn die Prämisse falsch ist.

Also gilt: $A \Rightarrow B \;\Leftrightarrow\; \neg A \vee B$

Tautologien:

Aussagen, die unabhängig von Wahrheitswerten immer wahr sind

Beispiel:

$$((A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$$

Wahrheitswertetafel:

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg B)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B)$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

$w(A)$	$w(B)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B)$	$w(\neg A)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

Aussageformen: von **Variablen** abhängige Aussagen

Beispiele: Aussagen $A(x)$ (einstellig) oder $A(x, y)$ (zweistellig)

- x ist eine gerade Zahl
- x ist eine Quadratzahl
- x ist größer als y
- $x + y$ ist kleiner 1

Wahrheitswerte erhält man nur durch Einsetzen von Variablen.

Beispiel: Wir definieren eine Aussageform $A(x, y)$ durch

$$A(x, y) :\Leftrightarrow x^2 + y^2 < 2$$

Dann gilt zum Beispiel

- $A(1/2, 1)$ ist **wahr**
- $A(-3, 2)$ ist **falsch**

oder auch

- $w(A(1/2, 1)) = 1$
- $w(A(-3, 2)) = 0$

Quantoren $\forall$, $\exists$ und $\exists_1$:

Mathematische Aussagen werden häufig mit Quantoren formuliert.

Sei $A(x)$ Aussageform, die von einer Variablen abhängt, wir definieren drei neue Aussagen, wie oben durch die Angabe der Wahrheitswerte:

$$\begin{aligned}
w(\forall\, x\ : A(x)) &= 1 \quad \Leftrightarrow \text{ Für alle } x \text{ ist } w(A(x)) = 1 \\
w(\exists\, x\ : A(x)) &= 1 \quad \Leftrightarrow \text{ Es gibt (mindestens) ein } x, \text{ so dass } w(A(x)) = 1 \\
w(\exists_1\, x : A(x)) &= 1 \quad \Leftrightarrow \text{ Es gibt genau ein } x, \text{ so dass } w(A(x)) = 1
\end{aligned}$$

Beispiel: Eine Funktion $f\, :\, D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig** im Punkt $x_0 \in \mathbb{R} :\Leftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 :\ \exists\, \delta > 0 :\ \forall\, x \in D :$$

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

((ε, δ)–Definition der Stetigkeit)

Negation von Quantoren:

Es gilt

$$\neg(\forall\, x : A(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x : (\neg A(x))$$

$$\neg(\exists\, x : A(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x : (\neg A(x))$$

Beispiele:

a) Man verneine die Aussage

$$\forall\, x \in \mathbb{R} :\ \forall\, \varepsilon > 0 :\ \exists\, n \in \mathbb{N} :\ x - \varepsilon < n < x + \varepsilon$$

b) Negation des Stetigkeitsbegriffes

$$\neg(\forall\, \varepsilon > 0 :\ \exists\, \delta > 0 :\ \forall\, x \in D :$$
$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Mathematische Sätze und Beweistechniken

Standardform eines Satzes

$$A \quad \Rightarrow \quad B, \qquad A,\ B \quad \text{Aussagen}$$

A : Voraussetzung (Prämisse) $\qquad$ B : Behauptung (Konklusion)

Beweistechniken:

- **Direkter Beweis** (Kettenschluss)

$$A =: A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_n := B$$

- **Indirekter Beweis** (Kontraposition, Widerspruch)

$$A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \neg B \Rightarrow \neg A$$

  ist eine Tautologie

Satz: Für eine natürliche Zahl n gilt: n gerade $\Leftrightarrow n^2$ gerade.

Beweis:

Führe den Beweis in zwei Schritten:

1. Schritt:

$$n \text{ gerade} \Rightarrow n^2 \text{ gerade}$$

2. Schritt:

$$n^2 \text{ gerade} \Rightarrow n \text{ gerade}$$

1. Schritt: Direkter Beweis

$$
\begin{array}{llrcl}
n \text{ gerade bedeutet} & \exists k \in \mathbb{N}: & n & = & 2k \\
 & \Rightarrow & n^2 & = & 4k^2 \\
 & & & = & 2(2k^2) \\
 & \Rightarrow & n^2 & \text{ist} & \text{gerade}
\end{array}
$$

2. Schritt: Indirekter Beweis (Zeige statt $A \Rightarrow B$, dass gilt $\neg B \Rightarrow \neg A$)

$$
\begin{array}{llrcl}
\text{Annahme: } n \text{ ungerade} & \Rightarrow & \exists k \in \mathbb{N}: n & = & 2k-1 \\
 & \Rightarrow & n^2 & = & (2k-1)^2 \\
 & & & = & 4k^2 - 4k + 1 \\
 & & & = & 2(2k^2 - 2k) + 1 \\
 & \Rightarrow & n^2 & \text{ist} & \text{ungerade} \\
 & & & & \textbf{Widerspruch!}
\end{array}
$$

Beweis: (durch Widerspruch)

Annahme: $\exists n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : \sqrt{2} = \frac{n}{m}$, Wir dürfen annehmen, dass n und m teilerfremd sind (ansonsten teilen wir durch den ggT).

$$2m^2 = n^2 \Rightarrow n^2 \text{ gerade} \Rightarrow n \text{ gerade } \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k.$$

Einsetzen in $2m^2 = n^2$ ergibt

$$2m^2 = n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow m^2 = 2k^2 \Rightarrow m^2 \text{ gerade} \Rightarrow m \text{ gerade}$$

Widerspruch zur Annahme, dass n und m teilerfremd sind.

Die Annahme $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ ist also **falsch** $\quad\Rightarrow\quad$ $\sqrt{2}$ ist irrational!

1.2 Mengen

Bezeichnungen:

$A, B, \ldots, M, N, \ldots$ Mengen

$a \in M :\Leftrightarrow a$ ist ein Element der Menge M

$a \notin M :\Leftrightarrow \neg(a \in M)$

Definition von Mengen:

a) Aufzählung der Elemente $M := \{1, 2, 3, 4\}$

b) Charakterisierende Eigenschaft der Menge,

$$M := \{x \in \Omega \mid A(x)\}$$

Bedeutung der verwendeten Symbole:

:=	“wird definiert durch”
A(x)	Aussageform, definiert für Elemente aus dem Grundbereich Ω

Teilmengen von Mengen:

$$M \subset N \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, x \,:\, (x \in M \Rightarrow x \in N)$$

Gleichheit von Mengen:

$$M = N \quad \Leftrightarrow \quad M \subset N \wedge N \subset M$$

Leere Menge: Menge, die kein Element enthält (eindeutig)
Bezeichnung: $\emptyset$

Ordnungseigenschaft:

$$\begin{aligned}
&a) \quad M \subset M \\
&b) \quad M \subset N \wedge N \subset M \quad \Rightarrow \quad M = N \\
&c) \quad M \subset N \wedge N \subset P \quad \Rightarrow \quad M \subset P
\end{aligned}$$

Verknüpfung von Mengen:

$$
\begin{array}{llll}
M \cup N & := & \{x \,|\, x \in M \vee x \in N\} & \text{(Vereinigung)} \\
M \cap N & := & \{x \,|\, x \in M \wedge x \in N\} & \text{(Durchschnitt)} \\
M \setminus N & := & \{x \,|\, x \in M \wedge x \notin N\} & \text{(Differenz)} \\
M \times N & := & \{(a,b) \,|\, a \in M \wedge b \in N\} & \text{(Cartesisches Produkt)} \\
\mathcal{P}(M) & := & \{X \,|\, X \subset M\} & \text{(Potenzmenge)}
\end{array}
$$

Bemerkungen:

a) Gilt $M \cap N = \emptyset$, so nennt man M und N **disjunkt**.

b) Verknüpfung von endlich viele Mengen

$$\begin{aligned}
\bigcup_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \\
&:= \{a \,|\, \exists\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a \in A_i\} \\
\bigcap_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \\
&:= \{a \,|\, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a \in A_i\} \\
\prod_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \\
&:= \{(a_1, \ldots, a_n) \,|\, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a_i \in A_i\}
\end{aligned}$$

Bemerkungen:

c) Für geordnete Paare bzw. n–Tupel gilt:

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \;\Leftrightarrow\; a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2$$

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \;\Leftrightarrow\; \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} : x_i = y_i$$

d) Wichtige Cartesische Produkte:

die **Euklidische Ebene**

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

der **dreidimensionale Euklidische Raum**

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

der **n–dimensionale Euklidische Raum**

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{\text{n–fach}} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

Beispiele:

a) Kreisscheibe mit Radius 1

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$$

b) Streifen

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 5 \leq x^2 + 1 \leq 17\}$$

c) Intervalle in $\mathbb{R}$: Sei $a \leq b$; $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{lcll} [a, b] & := & \{x \,|\, a \leq x \leq b\} & \text{abgeschlossenes Intervall} \\ (a, b) & := & \{x \,|\, a < x < b\} & \text{offenes Intervall} \\ [a, b) & := & \{x \,|\, a \leq x < b\} & \text{halboffenes Intervall} \\ (a, b] & := & \{x \,|\, a < x \leq b\} & \text{halboffenes Intervall} \end{array}$$

Beispiele:

d) Querschnitt eines T–Trägers

$$
\begin{aligned}
M &:= M_1 \cup M_2 \\
M_1 &:= \left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right] \times [-\gamma, 0] \\
M_2 &:= \left[-\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right), \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)\right] \times [0, \delta]
\end{aligned}
$$