

Seminar über gewöhnliche
Differentialgleichungen
*Chaos in eindimensionalen diskreten
dynamischen Systemen:
Das Feigenbaum-Szenario*
Die logistische Abbildung

Jan Henrik Sylvester

10. Februar 2003

Die logistische Abbildung, Jan Henrik Sylvester 2

Inhaltsverzeichnis

1	Überblick	3
2	Grundlagen der logistischen Abbildung	3
3	Das Feigenbaum-Diagramm	6
4	Chaos für $a > 4$	7
5	Periodenverdopplung	10
6	Berechnung der Feigenbaum-Konstanten δ und des Feigenbaum-Punktes a_∞	12

1 Überblick

Es wird die logistische Abbildung

$$f_a(x) = ax(1 - x), x \in \mathbb{R}, a > 0$$

betrachtet.

Das Verhalten für $a \leq 1$ ist einfach zu beschreiben und nicht sehr interessant. Ansonsten streben Startwerte außerhalb $[0, 1]$ gegen $-\infty$. Deshalb werden nur die Bereiche $a > 1, x \in [0, 1]$ betrachtet.

Das Verhalten im Bereich $1 < a < 3$ wird genau untersucht. Es stellt den „langweiligen“ Parameterbereich dar.

Im *Feigenbaumdiagramm* können die Endzustände für alle Parameter $1 < a < 4$ angesehen werden. Dabei erscheint es für $a > 3$ interessant zu werden.

Zunächst wird das Chaos für $a > 4$ beschrieben. Die Menge der Punkte, die nicht gegen $-\infty$ iterieren ist eine Cantor-Menge.

Im Bereich $3 < a < 4$ wird Periodenverdopplung beobachtet. Diese wird auf einfache geometrische Weise beschrieben.

Dabei treten die universellen Feigenbaum-Konstanten auf, die den Übergang zum Chaos für viele Systeme beschreiben.

Zum Schluss wird noch eine Möglichkeit angegeben, den Feigenbaum-punkt a_∞ und die Feigenbaum-Konstante δ zu berechnen.

2 Grundlagen der logistischen Abbildung

Satz 2.1 *Es gilt:*

(a) $f_a(0) = f_a(1) = 0$ und $f_a(p_a) = p_a$ mit $p_a = \frac{a-1}{a}$.

(b) $0 < p_a < 1$ für $a > 1$.

Beweis:

$$f_a(x) = ax(1 - x) = x \stackrel{x \neq 0}{\iff} 1 - x = \frac{1}{a} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a} = x$$

Damit sind 0 und $p_a = \frac{a-1}{a}$ die Fixpunkte. □

$$f_a'(0) = a \qquad f_a'(p_a) = 2 - a$$

Für $0 \leq a < 1$ ist 0 stabiler und p_a instabiler Fixpunkt (Abb. 1). Für $a = 1$ ist 0 der einzige Fixpunkt und nicht hyperbolisch.

Es werden im folgenden nur Parameterwerte $a > 1$ betrachtet.

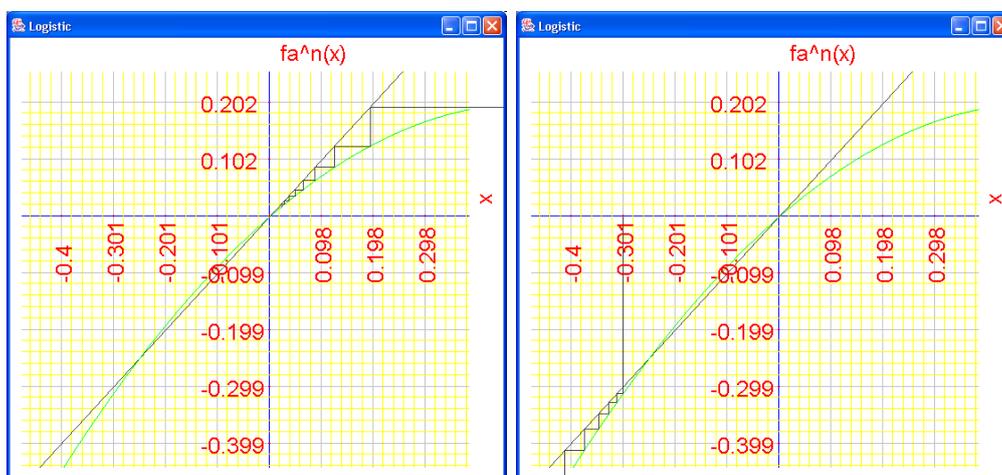


Abbildung 1: Der stabile und instabile Fixpunkt für $a = 0.8$

Satz 2.2 Für $a > 1$ und $x \notin [0, 1]$ gilt (Abb. 2)

$$f_a^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty.$$

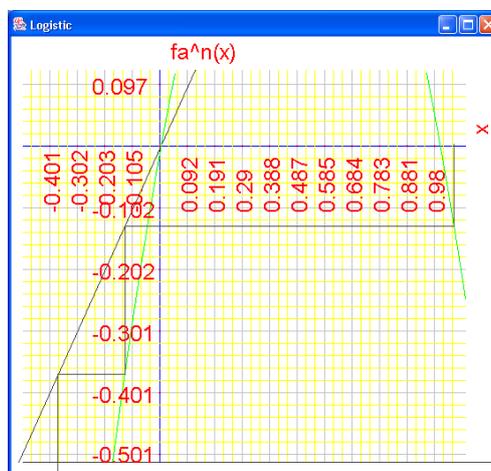


Abbildung 2: $x \notin [0, 1]$ verlässt das Intervall ($a = 2.5$)

Beweis:

$x < 0 \Rightarrow f_a(x) = ax(1 - x) < x \Rightarrow (f_a^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

Angenommen

$$f_a^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p < 0,$$

so gilt auch

$$\begin{aligned} f_a^{n+1} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(p) < p \cdot \frac{1}{2} \\ x > 1 &\Rightarrow f_a(x) < 0 \end{aligned}$$

In beiden Fällen gilt also die Aussage des Satzes. \square

$$f_a(x) = ax(1-x), x \in \mathbb{R}, a > 0$$

Für kleine Werte von a ist die Dynamik von f_a noch sehr einfach.

Satz 2.3 Für $1 < a < 3$ gilt:

1. f_a besitzt einen stabilen Fixpunkt (Attraktor) in $p_a = \frac{a-1}{a}$ und einen instabilen Fixpunkt (Repeller) in 0.
2. Für $0 < x < 1$ ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_a^n(x) = p_a.$$

Beweis:

1. Für $1 < a < 3$ ist $|f_a'(p_a)| = |2-a| < 1$ und $f_a'(0) = a > 1$.
2. 1. Fall: $1 < a \leq 2$.

$x \in (0, p_a) \Rightarrow f_a(x) > x$ Die Folge ist monoton wachsend, durch p_a beschränkt und konvergiert damit gegen p_a wegen

$$f_a^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p < p_a \Rightarrow f_a^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(p) > p \cdot \frac{1}{2}.$$

$x \in (p_a, \frac{1}{2}] \Rightarrow f_a(x) < x$ Also konvergiert $(f_a^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend gegen p_a .

$x \in (\frac{1}{2}, 1] \Rightarrow f_a(x) \in [0, \frac{1}{2})$ Die Behauptung folgt aus dem eben Bewiesenen.

2. Fall: $2 < a < 3$. Es gilt

$$\frac{1}{2} < p_a = 1 - \frac{1}{a} < 1 \quad \text{und} \quad |f_a'(p_a)| = a - 2 \in (0, 1).$$

Wegen der strengen Monotonie für $x \geq \frac{1}{2}$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$f_a^{2k} \left(\left[\frac{1}{2}, p_a \right] \right) = \left[p_a, f_a \left(\frac{1}{2} \right) \right] \quad \text{und} \quad f_a^{2k+1} \left(\left[\frac{1}{2}, p_a \right] \right) = \left[p_a, f_a^{2k+1} \left(\frac{1}{2} \right) \right],$$

da $f_a^2\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2} \cdot p_a$ attrahiert den kritischen Punkt $c = \frac{1}{2}$ und damit das gesamte Intervall $\left[\frac{1}{2}, p_a\right]$, da mit den oben ausgeführten Beziehungen für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \left[\frac{1}{2}, p_a\right]$ gilt

$$|f_a^n(x) - p_a| \leq \left| f_a^n\left(\frac{1}{2}\right) - p_a \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Mit dem gegenüberliegenden Urbild $\hat{p}_a = \frac{1}{a}$ von p_a gilt

$$f_a^2\left(\left[\hat{p}_a, p_a\right]\right) \in \left[\frac{1}{2}, p_a\right].$$

Für $x \in (0, \hat{p}_a)$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $f_a^k(x) \in [\hat{p}_a, p_a]$, und für $x \in (p_a, 1)$ gilt $f_a(x) \in (0, p_a)$. (Abb. 3)

□



Abbildung 3: Aus jedem Intervall iteriert die Folge nach \hat{p}_a, p_a

$$f_a(x) = ax(1 - x), x \in \mathbb{R}, a > 0$$

Zusammenfassung: Für die Parameterintervalle $0 \leq a < 1$ und $1 < a < 3$ besitzt die Abbildung f_a einen attraktiven Fixpunkt, zunächst ist es die 0, im zweiten Intervall der Punkt $p_a = \frac{a-1}{a}$.

3 Das Feigenbaum-Diagramm

Es wird nun der Attraktor gegen den Parameterwert aufgetragen. Es entsteht das Feigenbaum-Diagramm, das nach dem amerikanischen Physiker Mitchell

J. Feigenbaum benannt ist, dessen bahnbrechende Arbeit aus dem Jahr 1978 Aussagen über das Verzweigungsverhalten einer ganzen Familie von Funktionen macht. Beim Betrachten (Abb. 4) des Bereiches $1 \leq a \leq 4$ fällt auf, dass es erst für $a > 3$ interessant wird. Insbesondere sind Periodenverdopplungen für $3 < a < 3.57$ zu beobachten. Für $3.825 < a < 3.86$ ist ein Fenster im Chaos mit der Periode 3 zu sehen.

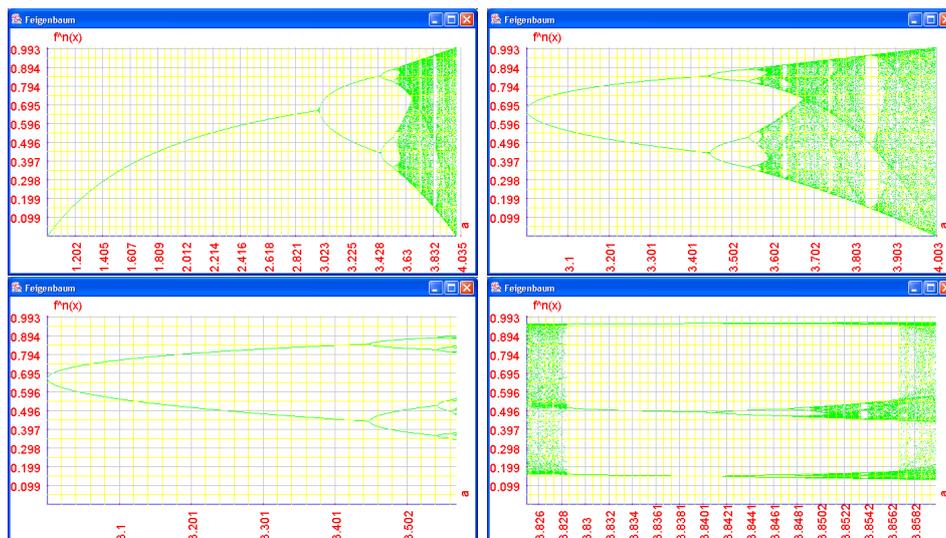


Abbildung 4: Verschiedene Abschnitte aus dem Feigenbaum-Diagramm

4 Chaos für $a > 4$

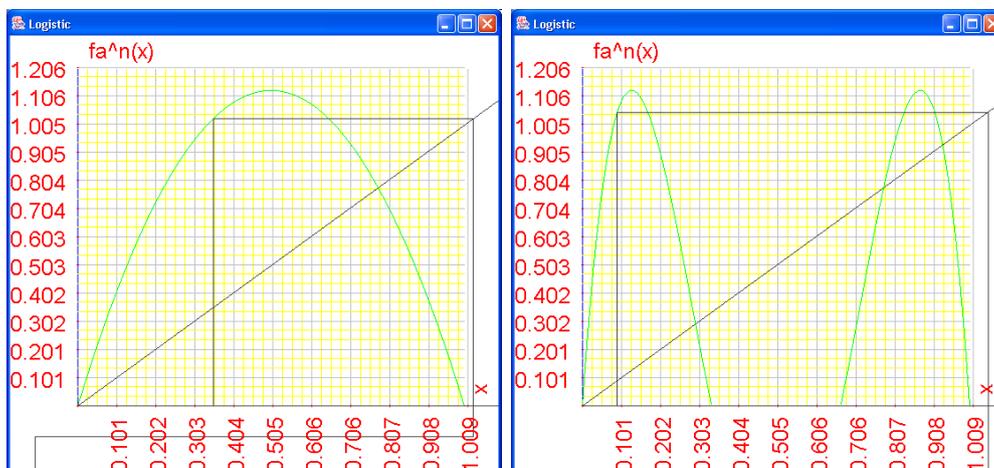
Bevor der im Feigenbaum-Diagramm interessant aussehende Bereich $3 < a < 4$ betrachtet wird, wird zunächst auf das Chaos für $a > 4$ eingegangen.

Da das Maximum $\frac{a}{4}$ von f_a im Punkt $c = \frac{1}{2}$ größer ist als 1, verlassen bestimmte Punkte (Abb. 5) das Intervall

$$I = [0, 1]$$

nach einem Iterationsschritt. Die Menge dieser Punkte sei

$$\begin{aligned} A_0 &= \{x \in I \mid f_a(x) \notin I\} \\ &= \{x \in I \mid f_a(x) > 1\} \\ &= f_a^{-1}(1, \infty), \end{aligned}$$

Abbildung 5: $f_a(A_0)$ und $f_a^2(A_1)$ verlassen das Intervall

welche als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung offen ist. Für $x \in A_0$ gilt $f_a^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ nach Satz 2.2. Die Urbildmenge

$$f_a^{-1}(I) = I \setminus A_0$$

ist kompakt. Die weiteren Schritte, um induktiv für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Menge A_n zu definieren, sind:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in I \mid f_a(x) \in A_0\}, \\ f_a^{-2}(I) &= f_a^{-1}(f_a^{-1}(I)) \\ &= \{x \in I \mid f_a(x) \in f_a^{-1}(I)\} \\ &= \{x \in I \mid f_a(x) \in I \setminus A_0\} \\ &= \{x \in I \mid f_a(x) \notin A_0 \wedge x \notin A_0\} \\ &= I \setminus (A_1 \cup A_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \{x \in I \mid f_a^2(x) \in A_0\}, \\ f_a^{-3}(I) &= \{x \in I \mid f_a(x) \in f_a^{-2}(I)\} \\ &= \{x \in I \mid f_a(x) \in I \setminus (A_0 \cup A_1)\} \\ &= I \setminus (A_0 \cup A_1 \cup A_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n &= \{x \in I \mid f_a^n(x) \in A_0\} \\ &= \{x \in I \mid f_a^k(x) \in I \text{ für } k \leq n \text{ und } f_a^{n+1}(x) \notin I\} \end{aligned}$$

Die Punkte in A_n verlassen das Intervall im $(n + 1)$ -ten Schritt, und es gilt wie oben $f_a^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ nach Satz 2.2.

Für $a > 4$ müssen somit nur die Punkte der Menge

$$\Lambda_a = I \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \right),$$

betrachtet werden, da für genau diese unter Iteration das Intervall $I = [0, 1]$ nie verlassen wird. Am Graphen macht man sich die Abbildung der Intervalle klar, wobei Monotonieüberlegungen dieses konkretisieren.

A_n besteht aus 2^n disjunkten offenen Intervallen und $A_0 \cup \dots \cup A_n$ aus

$$\sum_{k=0}^n 2^k = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1.$$

$I \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_n)$ besteht aus 2^{n+1} abgeschlossenen Intervallen, welche f_a^{n+1} streng monoton auf I abbildet, so dass der Graph von f_a^{n+1} die Diagonale graph $\mathbb{1}_{[0,1]}$ genau 2^{n+1} mal kreuzt, also f_a^{n+1} genau 2^{n+1} Fixpunkte hat.

Satz 4.1 Für jedes n hat f_a 2^n periodische Punkte der Periode n , das heißt,

$$\# \text{Per}_n(f_a) = 2^n,$$

und es gilt $\text{Per}_n(f_a) \subset I \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_{n-1})$. Dies gilt, wohlgemerkt, für $a > 4$.

Definition 4.2 Eine Menge $\Lambda \subset I$ heißt Cantor-Menge, wenn sie abgeschlossen, vollständig unzusammenhängend und perfekt ist. Eine Menge Λ ist vollständig unzusammenhängend, falls sie keine Intervalle enthält, und sie ist perfekt, falls jeder Punkt in Λ Häufungspunkt von Λ ist.

Satz 4.3 Gegeben sei das ddS $([0, 1], f_a)$ mit $f_a(x) = ax(1 - x)$, $x \in [0, 1]$ und $a > 4$. Dann ist die oben rekursiv konstruierte Menge

$$\Lambda_a = I \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \right)$$

eine Cantor-Menge.

Beweis: [Metzler, S. 37-38]

□

5 Periodenverdopplung

An dieser Stelle werden intuitive geometrische Erklärungen für die Periodenverdopplung von f_a im Parameterbereich $3 \leq a \leq 4$ auf dem Weg ins Chaos gegeben.

Solange $f_a'(p_a) < 0$ für den Fixpunkt $p_a = \frac{a-1}{a}$ erfüllt ist, besitzt dieser ein „Gegenüber“ \hat{p}_a mit $f_a(\hat{p}_a) = p_a$ und $\hat{p}_a < p_a$. Am Graphen wird deutlich, dass beim Passieren des Punktes $a = 3$ ein neuer Fixpunkt von f_a^2 im Intervall $[\hat{p}_a, p_a]$ entsteht, welcher somit ein stabiler Punkt der Periode 2 von f_a ist. (Abb. 6)

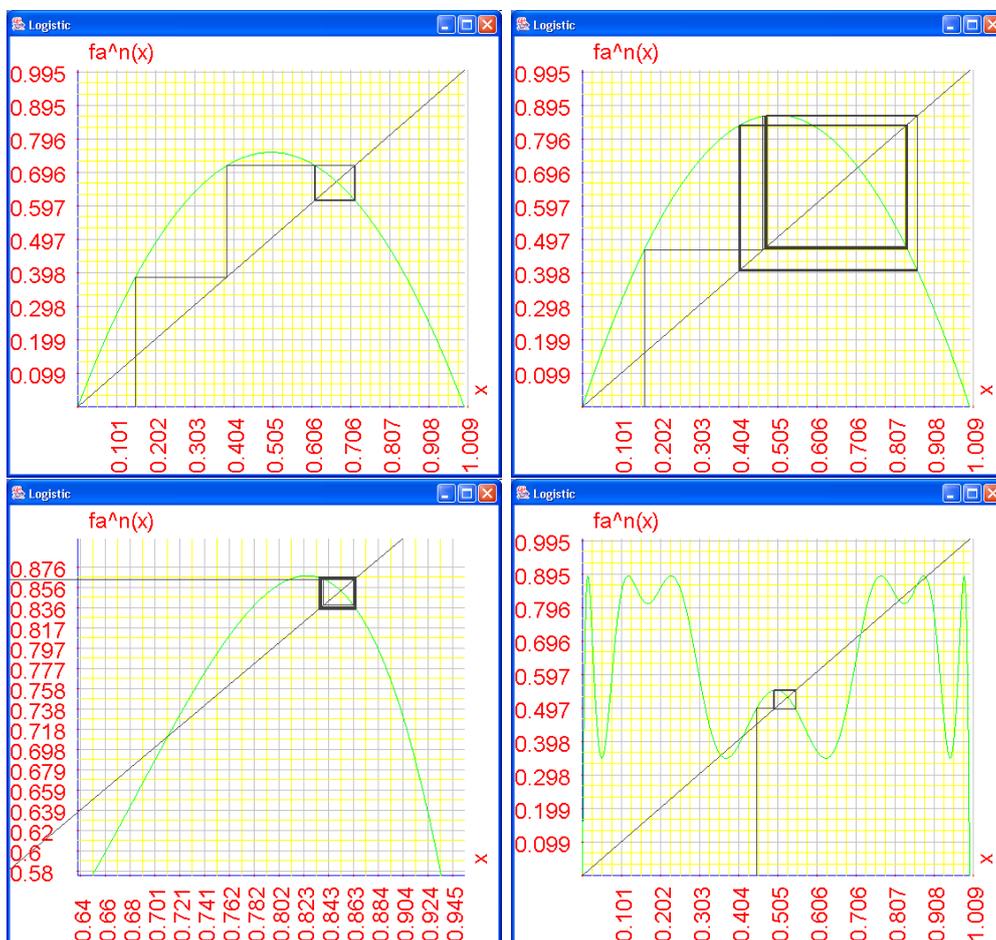


Abbildung 6: 2er-Periode bei $a = 3.025$. 4er-Periode bei $a = 3.47$ ist 2er-Periode von f_a^2 . 2er-Periode von f_a^4 bei $a = 3.56$

Betrachtet man einen quadratischen Ausschnitt im Intervall $[\hat{p}_a, p_a]$, so ähnelt f_a^2 dort sehr stark f_a über dem Intervall $[0, 1]$. Deshalb entsteht mit

wachsendem a eine 4er-Periode von f_a und die bisher stabile 2er-Periode wird instabil. In immer kleiner werdenden Boxen mit den Graphen von f_a^4, f_a^8, \dots erscheinen weitere Periodenverdopplungen. Es ist Selbstähnlichkeit (Abb. 7) zu erkennen.

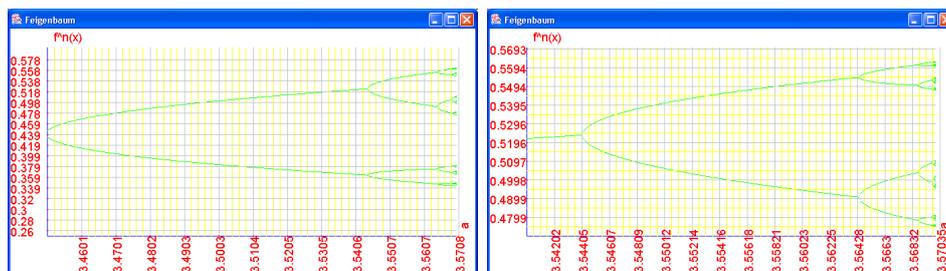


Abbildung 7: Diese Ausschnitte $3.45 < a < 3.57$ und $3.54 < a < 3.57$ ähneln dem von vorher $3 < a < 3.57$ sehr.

Satz 5.1 (Feigenbaum) Gegeben sei die Familie $([0, 1], f_a)$ von logistischen Abbildungen $f_a(x) = ax(1 - x)$ für $0 < a < 4$. Wir bezeichnen mit a_n die Bifurkationspunkte, das heißt, in a_n wird ein bis dahin stabiler periodischer Orbit der Länge 2^{n-1} instabil und gleichzeitig wird ein stabiler periodischer Orbit der Länge 2^n geboren. Mit A_n bezeichnen wir diejenigen Parameterwerte, an denen der 2^n -periodische Orbit den Punkt $c = \frac{1}{2}$ enthält, und schließlich mit d_n den Abstand von $c = \frac{1}{2}$ zum nächstgelegenen Punkt dieser 2^n -Periode. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = -\alpha$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+10} - a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n+1} - A_n} = \delta$$

mit den Feigenbaum-Konstanten

$$\alpha = 2.5029078750957 \dots,$$

$$\delta = 4.669201609103 \dots$$

Beweis: Bei Feigenbaum. Eine Darstellung wird in einem der folgenden Referate angegeben. \square

Der Satz von Feigenbaum gilt nicht nur für die quadratische Familie $f_a(x) = ax(1 - x), x \in [0, 1], a \in [0, 4]$, und zu ihr konjugierte parameterabhängige unimodale Funktionenfamilien, wie zum Beispiel $g_b(x) = 1 - bx^2, x \in [-1, 1], b \in [0, 2]$, sondern ist auf jede Familie S -unimodaler Abbildungen mit einem eindeutigen Maximum im kritischen Punkt c , welches

quadratisch ist, anwendbar. Das heißt, $f(x) - f(c) \approx (x - c)^2$ für x aus einer geeigneten Umgebung von c , zum Beispiel $g_a(x) = ax^2 \sin(\pi x)$.

Für jede solche Klasse sind die Konstanten δ und α die selben. Das Feigenbaum-Diagramm ist bis auf Streckung identisch.

Der Feigenbaum-Punkt

$$a_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 3.5699456,$$

bei dem der Übergang ins Chaos stattfindet ist jedoch keine universelle Konstante.

6 Berechnung der Feigenbaum-Konstanten δ und des Feigenbaum-Punktes a_∞

Feigenbaum hat ein einfaches Prädiktor-Korrektur-Verfahren zur Berechnung des Feigenbaum-Punktes $a_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ vorgeschlagen.

Ausgehend von den Startwerten

$$\begin{aligned} A_0 &= 2 \\ A_1 &= 1 + \sqrt{5} \\ \delta_1 &= 4, \end{aligned}$$

werden für $n = 2, 3, 4 \dots$ die Werte von

$$A_n = A_{n-1} + \delta_{n-1}^{-1}(A_{n-1} - A_{n-2})$$

und nach einer Korrektur von A_n noch

$$\delta_n = \frac{A_{n-1} - A_{n-2}}{A_n - A_{n-1}}$$

berechnet, die wegen $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta$ (Satz 5.1) eine gute Näherung ergeben.

Die Korrektur ergibt sich dadurch, dass der Parameter A_n durch die Existenz eines superstabilen Orbits der (kleinsten) Periode 2^n , der die Zahl $c = \frac{1}{2}$ enthält, charakterisiert wird. Also ist A_n ein Lösung der Gleichung

$$f_a^{2^n} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad g(a) = f_a^{2^n} \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} = 0.$$

Man löst diese nichtlineare Gleichung mit dem Newton-Verfahren, wobei A_n als Startwert $A_n^{(k)}$ verwendet wird. Der Iterationsschritt

$$A_{n+1}^{(k)} = A_{n+1}^{(k-1)} - \frac{g \left(A_{n+1}^{(k-1)} \right)}{g' \left(A_{n+1}^{(k-1)} \right)}$$

wird für $k = 1, 2, 3, \dots$ so lange ausgeführt, bis der relative Fehler

$$\frac{A_{n+1}^{(k+1)} - A_{n+1}^{(k)}}{A_{n+1}^{(k)}}$$

etwa im Rahmen der Maschinengenauigkeit liegt, was bereits nach wenigen (< 10) Schritten der Fall ist, wie sich herausstellen wird.

$g(a)$ sowie $g'(a)$ (wobei $g' = \frac{dg}{da}$, wie Ableitung nach a ist) können iterativ berechnet werden aus

$$x_0 = \frac{1}{2}; x_{k+1} = ax_k(1 - x_k), k = 0, \dots, 2^n - 1, \text{ und } g(a) = x_{2^n} - \frac{1}{2}.$$

$g'(a)$ ergibt sich dann aus

$$x'_0 = 0, x'_{k+1} = x_k(1 - x_k) + a(1 - 3x_k)x'_k; k = 0, \dots, 2^n - 1, \text{ und } g'(a) = x'_{2^n}.$$

Das Ergebnis eines solchen Programms ist in der folgenden Tabelle (Abb. 8) wiedergegeben, wo die Spalte # die Anzahl der Newton-Iterationen bis zur Abbruchbedingung

$$\left| \frac{A_n^{(k-1)} - A_n^{(k)}}{A_n^{(k)}} \right| \leq 10^{-14}$$

angibt.

δ_n verbessert sich dabei nur bis zum Schritt $n = 11$. Danach sind die Werte für A_n im Quotienten, aus dem δ_n berechnet wird, so nah beieinander, dass sich δ_n wieder verschlechtert. Dieses kann noch über die Variation der Abbruchbedingung verändert werden, jedoch nicht im wesentlichen. Durch die hohe Anzahl von Zwischenschritten kann kein Ergebnis erwartet werden, dass wirklich im Rahmen der Rechengenauigkeit liegt. Für A_n wird das Ergebnis stets besser, nur nicht mehr, nachdem der Wert δ_n bei $n = 20$ ganz aus dem Rahmen fällt.

Der Algorithmus wurde wie folgt implementiert:

```
double aN2 = a0;
double aN1 = a1;
double deltaN1 = delta1;
for (int n = 2; n <= nMax; n++) {
    double aN = aN1 + (aN1 - aN2) / deltaN1;
    int no = 0;
    for (double lastAN = aN - 1.;
        no < noMax && Math.abs((lastAN - aN) / aN) > minADelta; no++) {
```

n	A_n	#	δ_n
0	2.0		
1	3.2360679774997		4.0
2	3.4985616993277	6	4.7089430135405
3	3.5546408627688	4	4.6807709980106
4	3.5666673798562	4	4.6629596111141
5	3.5692435316371	3	4.6684039259180
6	3.5697952937499	3	4.6689537409485
7	3.5699134654223	3	4.6691571814003
8	3.5699387742333	2	4.6691910032119
9	3.5699441946080	2	4.6691994611322
10	3.5699453554864	2	4.6692011701107
11	3.5699456041110	1	4.6692017591473
12	3.5699456573588	2	4.6691988467382
13	3.5699456687628	2	4.6692200618118
14	3.5699456712052	2	4.6691837926204
15	3.5699456717283	1	4.6690224902625
16	3.5699456718404	1	4.6677577222563
17	3.5699456718644	5	4.6666728308306
18	3.5699456718694	2	4.7681862269641
19	3.5699456718705	9	4.6824938067712
20	3.5699456718705	2	-151.375

Abbildung 8: Die Ausgabe des Programms zur Berechnung des Feigenbaum-punktes a_∞ und der Feigenbaum-Konstante δ .

```

lastAN = aN;
double x = .5;
double xBar = 0.;
long pow2N = 2 << (n - 1);
for (long k = 0; k < pow2N; k++) {
    xBar = x * (1. - x) + aN * (1. - 2. * x)* xBar;
    x = aN * x * (1 - x);
}
x -= .5;
aN -= x / xBar;
}
deltaN1 = (aN1 - aN2) / (aN- aN1);
System.out.println(outTableLine(Integer.toString(n),

```

```
        Double.toString(aN),  
        Integer.toString(no),  
        Double.toString(deltaN1)));  
    aN2 = aN1;  
    aN1 = aN;  
}
```

Literatur

[Metzler] W. Metzler, Nichtlineare Dynamik und Chaos, Kapitel 3