Partielle Differentialgleichungen

Vorlesung

Teil I

Reiner Lauterbach
Jens Struckmeier

$$\boxed{\Delta u = f}$$

Universität Hamburg, WS 2012/13

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Partielle Differentialgleichungen treten sowohl innerhalb der mathematischen Theorie an vielen Stellen, wie auch in Anwendungen aus allen Bereichen der Wissenschaft auf. In dieser Vorlesung stehen weder die Anwendungen innerhalb noch außerhalb im Zentrum des Interesses. Wir wenden uns der Theorie partieller Differentialgleichungen zu und werden einige wichtige moderne Aspekte behandeln. Vollständigkeit ist dabei nicht das Ziel, dies wäre utopisch: diese Theorie hat sich über viele Jahrhunderte entwickelt und wird weltweit von einer großen Anzahl von Mathematikern weiter entwickelt. Daher soll unser Ziel sein einen Einstieg zu finden in die Theorie, ein Einstieg der es möglich machen soll selbst weiter zu arbeiten.
In den Anwendungen gibt es einen ganzen Zoo von Gleichungen, die mit verschiedensten Namen verbunden sind. Wir wollen im ersten Teil einige wenige von diesen Namen kennen lernen um grundlegende Phänomene zu studieren. Dann soll aber eine systematische Entwicklung eines Teiles der Theorie partieller Differentialgleichungen erfolgen.

In den Übungen werden wir uns mit einigen Beispielen partieller Differentialgleichungen beschäftigen, auch mit Darstellungsformeln für Lösungen wichtiger Gleichungstypen. Es zeigt sich, dass die Kenntnis von Lösungsdarstellungen auch im Kontext abstrakterer Methoden sinnvoll ist. Daher werden wir neben der Entwicklung einer, an manchen Stellen durchaus abstrakten Theorie, uns immer wieder mit konkreten Gleichungen befassen.

Der erste Teil dieser Vorlesung baut auf einigen früheren Vorlesungen, die an der Universität Augsburg, der Freien Universität Berlin und hier an der Universität Hamburg gehalten wurden, auf. Hoffentlich stellt es in manchen Punkten eine Verbesserung gegenüber den früheren Versionen dar. Dank gilt allen Hörern und Mitarbeitern die durch Fragen und Anmerkungen diese Vorlesung mitgestaltet haben. Hervorgehoben seien Dr. Christian Leis, der eine frühere Vorlesung an der FU Berlin begleitet hat und der auch die

damaligen Übungsaufgaben mitgestaltet hat und Dr. Henning Bruhn, der eine Vorgängerversion kritisch gehört und gelesen hat und durch eine Vielzahl von Anmerkungen und Verbesserungsvorschlägen nachfolgende Versionen sehr beeinflusst hat.

Es gibt eine Reihe sehr guter Bücher zu diesem Thema, einige seien hier genannt, ebenso wie geeignete weiterführende Literatur zu verschiedenen Themenbereichen: JOST [15], EVANS [7], FRIEDMAN, [9, 8], STRAUSS [19], das es auch in deutscher Übersetzung gibt, GILBARG & TRUDINGER [10], TAYLOR [20]. Der erste Teil der Vorlesung basiert vor allem auf den Werken von Friedman, von Evans und von Gilbarg und Trudinger, so dass diese wohl der gewählten Darstellung am ehesten entsprechen. An manchen Stellen gibt es auch einen engen bezug zu dem Werk von Jost, wobie dies eher zufällig so entstanden ist. Im letzten Kapitel des ersten Teiles folgen wir bei der Darstellung der Theorie von Halbgruppen teilweise Kato [16], daneben wird auch Friedman [9] und das wichtige Werk von Henry [12] benutzt. Wir werden an den entsprechenden Stellen darauf verweisen.

Erforderliche Vorkenntnisse sind natürlich die Vorlesungen Analysis I-II, die Höhere Analysis und die Lineare Algebra I-II, wobei insbesondere die Höhere Analysis von zentraler Bedeutung ist. Ich werde einige Elemente der Funktionalanalysis hier ansprechen, setze aber weitgehend Grundkenntnisse in Funktionalanalysis voraus. Sie können diese entweder im Skript (Lauterbach [**?**]) oder auch in einem der zahlreichen Werke nachlesen, erwähnen will ich Alt [3], Werner [22], Rudin [17], T. Kato [16] und Yosida [23]. An einigen Stellen ist das Buch von Adams [2] eine gute Ergänzung zur Vorlesung, allerdings werden alle benötigten Aspekte hier behandelt werden.

An manchen Stellen werden elementare Kenntnisse aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen benutzt. Dies sind im wesentlichen Existenz- und Eindeutigkeitssätze. Man findet diese in jedem Buch über gewöhnliche Differentialgleichungen, siehe z.B. Amann [4], Arnol'd [5] und Heuser [13].

An wenigen Stelle werden wir die Elemente aus der Theorie von Fourierreihen benötigen, eine sehr schöne und geeignete Präsentation findet sich im Buch von Dym und McKean [6] oder im dem grundlegenden Werk über reelle Analysis von Hewitt und Stromberg [14]. Für die historischen Anmerkungen wurden folgende Quellen genutzt:

1. Die Internetseite von St. Andrews College:
   http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/ history/Indexes/HistoryTopics.html

2. Die Brockhaus Enzyklopädie [1]

Teil I

Elliptische und Parabolische Gleichungen

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel machen wir einige einführende Bemerkungen über partielle Differentialgleichungen. Danach betrachten einige Beispiele und zeigen daran Techniken, wie sie in der Theorie partieller Differentialgleichungen benötigt werden.

Inhalt

1.1 Einführung

Nachdem Isaac Newton[1] und Gottfried Wilhelm Leibniz[2] unabhängig Theorien geschaffen hatten, die die Grundlage der Analysis geworden sind, hat Leonhard Euler[3] die Bedeutung des Funktionsbegriffes erkannt und Gleichungen für Funktionen aufgeschrieben, vor allem um Probleme der realen Welt zu verstehen. Funktionen als eigenständige Größen aufzufassen, ebnete den Weg für neuartige und weitreichende Entwicklungen. So kann man damit Variationsprobleme formulieren. Joseph Louis Lagrange[4] erkannte, dass die Bewegung eines Körpers die Energie minimiert. Damit kann man das problem der Bewegung eines Körpers als Variationsproblem aufschreiben. Dies ist vergleichbar der Charakterisierung des Weges des Lichtes, wie sie schon von Pierre de Fermat[5], gegeben wurde. Extremalprobleme in euklidischen

[1]Isaac Newton (4.1.1643–31.3.1727) Berühmtester englischer Mathematiker, Physiker und Astronom, einer der wenigen Naturwissenschaftler, dem die Ehre zuteil wurde, in Westminster Abbey begraben zu werden, legte die Grundlagen des Verständnisses des Schwerkraft und damit der klassischen Mechanik, die er auf axiomatische Grundlagen stellte. Daneben hatte er als erster Einsicht in die Farbenlehre und begründete die moderne Optik. In der Mathematik war er einer der Wegbereiter der Differentialrechnung. Er erklärte Ebbe und Flut, vor allem auch den 12 stündigen Rhythmus und versuchte aus der Höhe der beobachteten Flut die Lage des gemeinsamen Schwerpunktes des Erde/Mond Systems zu berechnen. In seinem Werk Prinicipia Mathematicae wird dieser Schwerpunkt irrtümlich als außerhalb der Erde liegend angegeben.

[2]Gottfried Wilhelm Leibniz (1.7.1646–14.11.1716) war Philosoph, Mathematiker und Naturforscher. Seine Leistungen wurden nicht anerkannt. Er war einer der Begründer der Analysis und erzielte Erfolge bei der Summation von Reihen. Er erkannte, dass Differentiation und Integration sich umkehren und kannte Kettenregel und andere Differentiationsregeln. Auch er nutzte die neue Theorie, um Probleme der Realität zu lösen, u.a. Belastung eines Balkens. Die Entwicklung der Logik wurde durch seine Arbeiten begonnen.

[3]Leonhard Euler (15.4.1707–18.9.1783) hinterließ ein äußerst umfangreiches wissenschaftliches Werk und erzielte in allen mathematischen Bereichen bahnbrechende Fortschritte. Er wurde zum Wegbereiter eines modernen Funktionenbegriffes und legte damit den Grundstein zum Studium von Differentialgleichungen. Die Herausgabe seines vollständigen Werkes ist bis heute nicht abgeschlossen. Er verbrachte längere Zeit an der Akademie der Wissenschaften in Potsdam und am Hofe der Zarin in St. Petersburg.

[4]Joseph Louis Lagrange (25.1.1736–10.4.1813) war Mathematiker, Physiker und Astronom. Er arbeitete zunächst über Variationsprobleme. Auf Einladung von Friedrich II verbrachte er 20 Jahre in Berlin und verfasste hier unter anderem sein Werk *Mécanique analytique*. Neben seinen Beiträgen zur Analysis (nach ihm sind eine Restgliedformel und der Multiplikator benannt) stammen auch algebraische Erkenntnisse von ihm.

[5]Pierre de Fermat (20.8.1601–12.1.1665) französischer Jurist und Mathematiker. Er verfasste Arbeiten zur Geometrie und Zahlentheorie. Bekannt ist vor allem der nach ihm

Räumen werden durch Bedingungen an die Ableitung gelöst. Für Variationsprobleme übernehmen Funktionenräume die Rolle des euklidischen Raumes, die Bedingungen an die Ableitung führen oft auf partielle Differentialgleichungen. Damit hat man eine reiche Quelle verschiedenster partieller Differentialgleichungen. Wir werden darauf zurückkommen.

Partielle Differentialgleichungen sind, grob gesprochen, Gleichungen für Funktionen mehrerer Veränderlicher, in denen die Funktion und ihre partiellen Ableitungen vorkommen. Dabei lässt man i.a. nicht zu, dass die Funktion mit mehreren Argumenten (oder Integrale der Funktion usw.) in der Gleichung auftreten. Damit hat die einfachste partielle Differentialgleichung für eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Form

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1.1}$$

Wie man es schon von den gewöhnlichen Differentialgleichungen kennt, bestimmt die Gleichung allein noch nicht die Lösung. Bei partiellen Differentialgleichungen kommen noch weitere Fragen dazu: auf welchem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ soll die Lösung definiert sein? Wie glatt soll die Funktion sein? Sind alle Ableitungen, die in der Gleichung auftreten an allen Stellen erklärt? Bei den partiellen Differentialgleichungen, und das werden uns gleich die ersten Beispiele zeigen, gibt es keine einheitliche Methode, um alle Gleichungen zu behandeln. Vielmehr gibt es eine Fülle von Werkzeugen, die bei speziellen Gleichungen und Gleichungstypen weiterhelfen. Oft sind diese Gleichungen aus angewandten Wissenschaften und werden benannt nach demjenigen, der als erster diese Gleichungen als Modell für einen realen Vorgang aufgeschrieben hat. All dies hat die Theorie partieller Differentialgleichungen mit der gewöhnlicher Differentialgleichungen gemeinsam, nur ist die Heterogenität in Fragestellungen und Methoden viel größer.
Bevor wir die oben genannte, einfachste Gleichung lösen, kommen wir zu Beispielen aus der Physik. Partielle Differentialgleichungen kommen allerdings nicht nur in der Physik, sondern z.B. auch in der Chemie, in der Biologie, in der Metereologie, der Klimaforschung und in den Wirtschaftswissenschaften (z.B. Black-Scholes-Gleichung[6]) vor.

---

benannte große Satz von Fermat, der vor kurzem von Andrew Wiles bewiesen wurde.

[6]nach Fischer Scheffey Black (11.1.1938-30.8.1995) und Myron Samuel Scholes (geb. 1.7.1941), letzterer hat zusammen mit Robert C.Merton (geb. 31.7.1943) für das finanztheoretischen Modell, das durch diese Gleichungen beschrieben wird, den Nobelpreis für die Wirtschaftswissenschaften im Jahr 1997 erhalten.

In vielen Anwendungen werden Lösungen solcher Gleichungen mittels numerischer Verfahren näherungsweise gelöst. Algorithmen zur Lösung hochdimensionaler bzw. komplexer partieller Differentialgleichungen sind für die Mathematik eine große Herausforderung. Ziel muss neben dem Finden und Programmieren eines solchen Algorithmuses auch sein die Konvergenz- und Approximationseigenschaften zeigen zu können.

1.2 Die Wärmeleitungsgleichung

Hier geht es darum, die Wärmeleitung in einem Medium zu modellieren. Dabei setzen wir voraus, dass ein Gebiet Ω des $\mathbb{R}^3$ von einem Medium ausgefüllt sei und an jedem Punkt $x \in \Omega$ eine Temperatur

$$u_0(x) \tag{1.2}$$

vorgegeben sei. Wir interessieren uns für die Funktion $u(t,x)$ von zwei Veränderlichen, welche jedem $x \in \Omega$ und jedem Zeitpunkt $t > 0$ die Temperatur an dieser Stelle und zu diesem Zeitpunkt zuordnet. Dabei machen wir eine von zwei üblichen zusätzlichen Annahmen: am Rand herrscht eine von außen gegebene Temperatur oder der Rand ist vollkommen isoliert, d.h.:

1. Für $x \in \partial\Omega$ ist $u(t,x)$ durch eine gegebene Umgebungstemperatur bestimmt. Oft wird diese Bedingung normalisiert, so dass man fordert

$$u(t,x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.3}$$

   Wir sprechen von Dirichlet–Randbedingungen[7].

2. Die andere, häufig gestellte Bedingung am Rand unseres Mediums ist, dass kein Wärmefluss durch den Rand stattfindet (totale Isolation), d.h., dass am Rand kein Temperaturgradient auftritt, und damit, dass

$$\frac{\partial u}{\partial n}(t,x) = 0 \tag{1.4}$$

   ist, wobei n den äußeren Normaleneinheitsvektor an den Rand von Ω im Punkt $x \in \partial\Omega$ bedeutet. In diesem Fall sprechen wir von Neumannschen Randbedingungen[8].

[7]Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13.2.1805-5.5.1859) Er bewies den großen Fermatschen Satz für $n = 5$. Bekannt sind vor allem die nach ihm benannten Reihen, die in der Zahlentheorie eine wichtige Rolle spielen und sein Beitrag zur Variationsrechnung.

[8]Franz Ernst Neumann (11.9.1798-23.5.1895) arbeitete vor allem zur mathematischen Physik.

3. Natürlich können auch Mischformen dieser Randbedingungen auftreten.

Nun kommen wir zur Modellierung im Inneren des Gebietes. Mit c sei die spezifische Wärme unseres Materials bezeichnet, mit γ das spezifische Gewicht. Dann stehen Temperaturänderung δu und Wärmeänderung δQ in einem Volumen V im Zusammenhang $\delta u \, c \, \gamma \, V = \delta Q$ oder

$$\delta u = \frac{\delta Q}{c\gamma V}. \tag{1.5}$$

Bei der Übersetzung von realen Problemen in die Sprache der Mathematik werden immer wieder solche Grundgleichungen, die aus der jeweiligen Fachwissenschaft kommen, benötigt. Sie werden oft als *konstitutive Gleichungen* bezeichnet. Sei nun $B_\varepsilon(x_0)$ eine Kugel, die so klein gewählt sei, dass die Temperatur in dieser Kugel als konstant angesehen werden kann, d.h.

$$\int_{B_\varepsilon(x_0)} u(x)\, dx = u(x_0)V.$$

Dann ist

$$u(t+h,\omega_0) - u(t,\omega_0) = \frac{Q(t+h)-Q(t)}{c\gamma V}, \tag{1.6}$$

wobei Q nun die Wärmemenge in $B_\varepsilon(x_0)$ beschreibt. Nun nehmen wir an, dass die Veränderung der Wärme in der Kugel proportional zum Wärmefluss durch die Oberfläche ist, also

$$Q(t+h) - Q(t) = \tau h \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \langle \nabla u,\ n\rangle do, \tag{1.7}$$

wobei τ die Proportionalitätskonstante (*Wärmeleitzahl*) und n die äußere Normale zur Kugel darstellt. ∇ bezieht sich auf die partielle Ableitung bezüglich x. Nimmt man an, dass die Funktion u genügend glatt ist, so folgt aus dem Satz von Gauß[9], dass

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \langle \nabla u,\ \nu\rangle do = \int\limits_{B_\varepsilon(x_0)} \operatorname{div} \nabla u(t,x)\, dx. \tag{1.8}$$

[9]Carl Friedrich Gauß (30.4.1777–23.2.1855) zeigte schon als Kind mathematische Genialität und wurde vom Großherzog Wilhelm Ferdinand gefördert. Im Jahr 1797 bewies er den Fundamentalsatz der Algebra. Sein wissenschaftliches Werk umfasst bedeutende Beiträge zu allen Bereichen der Mathematik, insbesondere Algebra, Zahlentheorie, reelle und komplexe Analysis und Differentialgeometrie. Darüberhinaus war er für lange Zeit Direktor des Göttinger Observatoriums.

Damit ergibt sich insgesamt, dass

$$\frac{1}{h}(u(t+h,x_0)-u(t,x_0)) = \frac{\tau}{c\gamma V}\int_{B_\varepsilon(x_0)} \Delta u(t,x)\,dx. \tag{1.9}$$

Mit $k = \frac{\tau}{c\gamma}$ erhält man durch Grenzübergang $(h,\varepsilon \to 0)$ die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u. \tag{1.10}$$

Im weiteren steht Δ für den Laplace-Operator[10], d.h.

$$\Delta u = \operatorname{div}\nabla u = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(x).$$

Eine Lösung dieser Gleichung, zusammen mit der Anfangsbedingung (1.2) und einer der Randbedingungen (1.3) oder (1.4) beschreibt für uns die Wärmeleitung in Ω. Eine Lösung dieser Gleichung, die nicht von $t \in \mathbb{R}$ abhängt, heißt stationäre Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Sie modelliert eine Temperaturverteilung in unserem Medium, die sich im Gleichgewicht befindet, so dass kein Wärmefluss auftritt. Nun wollen wir die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit Dirichletschen Randbedingungen auf $[-\pi,\pi]$ mit $k=1$ lösen. Wir wenden dabei das Verfahren der *Trennung der Veränderlichen* an und entwickeln $u(t,x)$ für jedes t in eine Fourierreihe[11], d.h. wir machen den Ansatz

$$u(t,x) = a_0(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu(t)\cos(\nu x) + b_\nu(t)\sin(\nu x))$$

[10] Pierre Simon Laplace (28.3.1749–5.3.1827) war während der französischen Revolution engagiert und wechselte danach mehrfach die politische Richtung. Seine mathematischen Untersuchungen betreffen partielle Differentialgleichungen, Kugelflächenfunktionen, Himmelsmechanik, Strömungsmechanik und die Wahrscheinlichkeitstheorie.

[11] Jean Baptiste Joseph de Fourier (21.3.1768–16.5.1830) war einer der Begründer der mathematischen Physik. Er beschäftigte sich mit der Wärmeleitung und trug zur Theorie partieller Differentialgleichungen bei. Er nahm am Feldzug Napoléons in Ägypten teil, war als Diplomat tätig und machte nebenbei mathematische Forschung. Nach der Rückkehr wurde er von Napoléon zum Präfekten des Departements d'Isère ernannt. Dies hinderte ihn nicht an einer weiteren fruchtbaren wissenschaftlichen Arbeit.

mit ausreichend glatten Funktionen $a_\nu(t),\ b_\nu(t)$.
Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}u &= a_0'(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(a_\nu'(t)\cos(\nu x) + b_\nu'(t)\sin(\nu x)\right) \\
&= \Delta u \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty}(-\nu^2)\left(a_\nu(t)\cos(\nu x) + \sin(\nu x)\right).
\end{aligned}$$

Multiplikation dieser Gleichung mit Funktionen $\cos(\overline{\nu}x)$ $(\overline{\nu} \geq 0)$, $\sin(\overline{\nu}x)$, $(\nu > 0)$ ergibt unter Ausnutzung der Orthogonalitätsrelationen für die trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\nu x)\cos(\overline{\nu}x)dx &= \delta_{\nu,\overline{\nu}}\pi, \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\nu x)\sin(\overline{\nu}x)dx &= \delta_{\nu,\overline{\nu}}\pi, \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\nu x)\cos(\overline{\nu}x)dx &= 0
\end{aligned}$$

eine unendliche Folge *gewöhnlicher* Differentialgleichungen für die Funktionen $a_\nu(t)$

$$\frac{da_\nu}{dt}(t) = -\nu^2 a_\nu(t)$$

und entsprechendes auch für die Funktionen $b_\nu(t)$. Als Lösung erhält man

$$a_\nu(t) = a_\nu^0 e^{-\nu^2 t}.$$

Damit ergibt sich als eine Lösung der *partiellen Differentialgleichung* (1.10)

$$u(t,x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu^2 t}\left(a_\nu^0\cos(\nu x) + b_\nu^0\sin(\nu x)\right),$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, a_\nu^0,\ b_\nu^0$. Diese erhält man aus der Fourierentwicklung des Anfangswertes $u_0(x)$. Aus der Dirichletschen-Randbedingung folgert man (für $t \to \infty$ konvergiert $u(t,x)$ gegen a_0), dass $a_0 = 0$ ist.

Aufgabe 1.2.1
Bei einer stationären Temperaturverteilung erwartet man, dass die Temperatur $u(x)$ an der Stelle x gleich dem Mittelwert der Temperaturen in einer umgebenden Kugel ist:
Es sei Ω offen und $x_0 \in \Omega$, $\varepsilon > 0$, so dass die Kugel $B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$, und u eine stationäre Lösung der Wärmeleitungsgleichung in Ω. Man zeige:

$$u(x_0) = \frac{1}{\mu(B_\varepsilon(x_0))} \int_{B_\varepsilon(x_0)} u(x)dx. \tag{1.11}$$

Dabei ist $\mu(B_\varepsilon(x_0))$ das Lebesgue-Maß der Kugel $B_\varepsilon(x_0)$).

1.3 Die Wellengleichung

In diesem Abschnitt wollen wir die Differentialgleichung für die schwingende Saite ableiten. Dabei sei zwischen $a, b \in \mathbb{R}$ eine Saite eingespannt, und $u(t, x)$ bezeichne die Auslenkung der Saite zum Zeitpunkt $t > 0$ an der Stelle $x \in [a, b]$. Wie zuvor sei $u_0(x)$ die Konfiguration der Saite zum Zeitpunkt 0 und entsprechend der Befestigung am Rande setzen wir Dirichlet–Randbedingungen (keine Auslenkung am Rand) voraus. Nach Newton ist die an einem Körper angreifende Kraft gleich dem Produkt aus Masse des Körpers und dessen Beschleunigung. Sei nun ein Stück der Länge $\varepsilon > 0$ der Saite (spezifisches Gewicht γ) gegeben, wir betrachten die Bewegung des Mittelpunktes x_0. Die Masse ist nun $\gamma\varepsilon$, die Beschleunigung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x_0)$ und damit ist die angreifende Kraft gleich $\gamma\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x_0)$. Diese ist gegeben durch die Spannung, welche längs der Saite wirkt. Sei ξ ein Punkt auf der Saite in der Ausgangslage, dann ist die Länge $L(\xi)$ der ausgelenkten Saite bis zum Punkt der über ξ liegt, gegeben durch $L(\xi) = \int_a^\xi \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, y)\right)^2}\, dy$, die infinitesimale Längenänderung ist also

$$\frac{dL(\xi)}{d\xi} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, \xi)\right)^2}. \tag{1.12}$$

Falls $\frac{\partial u}{\partial x}(t, \xi)$ klein ist, ist diese Größe nach Taylor näherungsweise gleich $1 + \frac{\partial u}{\partial x}(\xi)$. Auf das Stück der Länge ε wirkt also eine Kraft proportional zu $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0 + \varepsilon/2) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0 - \varepsilon/2)$. Also gilt mit der Proportionalitätskonstante

τ (Hookesches Gesetz[12])

$$\frac{\partial^2 u}{dt^2} = \frac{1}{\gamma}\varepsilon^{-1}\tau\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0 + \varepsilon/2) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0 - \varepsilon/2)\right). \tag{1.13}$$

Mit dem Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ erhält man

$$\frac{\partial^2 u}{dt^2} = \eta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \eta = \frac{\tau}{\gamma}. \tag{1.14}$$

Die soeben hergeleitete Gleichung nennt man *eindimensionale Wellengleichung.*

Aufgabe 1.3.1
Man löse die Wellengleichung wie oben die Wärmeleitungsgleichung unter der Annahme Dirichletscher Randbedingungen und bei einer Ausgangsauslenkung $u_0(x)$. Sollte damit die Lösung nicht eindeutig bestimmt sein, überlege man sich weitere sinnvolle Bedingungen um eine eindeutige Lösbarkeit zu garantieren.

1.4 Elliptische Gleichungen zweiter Ordnung

Definition 1.4.1
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Ein linearer Differentialoperator zweiter Ordnung *hat die Form*

$$Lu(x) = \sum_{i,j} a^{ij}(x)u_{x_i,x_j}(x) + \sum_i b^i(x)u_{x_i}(x) + c(x)u(x),\ a^{ij} = a^{ji},\ x \in \Omega. \tag{1.15}$$

(Für den Moment sei $u \in C^2(\Omega;\mathbb{R})$.)

Definition 1.4.2

1. *L heißt im Punkt $x \in \Omega$* elliptisch, *wenn die Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\ldots,n}$ positiv definit ist, d.h. wenn Zahlen $\lambda(x),\ \Lambda(x)$ existieren mit*

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq \langle\xi, A(x)\xi\rangle \leq \Lambda(x)|\xi|^2 \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

[12] Robert Hooke (18.7.1635-3.3.1703) war Naturforscher und ab 1665 Professor für Geometrie in London. Er arbeitete an der Luftpumpe, normierte die Temperaturmessung und führte aufgrund mikroskopischer Beobachtungen den Begriff der Zelle ein.

2. *L heißt stark elliptisch, wenn ein $\lambda_0 > 0$ existiert mit $\lambda_0 \leq \lambda(x)$ für alle $x \in \Omega$.*

3. *Ist $\frac{\Lambda}{\lambda}$ auf Ω beschränkt, so nennt man L gleichmäßig elliptisch.*

4. *Ist L stark elliptisch und gleichmäßig elliptisch, so nennen wir L gleichmäßig* stark elliptisch.

Neben den Annahmen, die sich auf die zweiten Ableitungen beziehen, benötigen wir oft noch Voraussetzungen, die die erste und zweite Ableitung in Beziehung setzen. Eine solche, in vielen Fällen nützliche, Annahme ist

$$\frac{|b^i(x)|}{\lambda(x)} \leq \text{const.} < \infty, \ i = 1, \ldots, n, \ x \in \Omega. \tag{1.16}$$

Die Eindeutigkeit der Lösung elliptischer Randwertprobleme folgt aus einem Maximumprinzip. Solche Prinzipien sind aus der Funktionentheorie bekannt. Die Verbindung wird hergestellt, da holomorphe Funktionen w die Cauchy[13]–Riemannschen[14] Differentialgleichungen lösen. Die Realteile $u = \text{Re}\ w$ dieser holomorphen Funktionen sind harmonische Funktionen und damit Lösungen von $\Delta u = 0$.

Satz 1.4.3 (Maximumprinzip)
Es sei L elliptisch im beschränkten Gebiet Ω, ferner gelte (1.16). Unter der Annahme $c = 0$ folgt aus $Lu \geq 0$ für ein solches $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R}) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$, dass u sein Maximum auf dem Rand $\partial\Omega$ annimmt. Genauer gilt

$$\sup \left\{ u(x) \;\middle|\; x \in \Omega \right\} = \sup \left\{ u(x) \;\middle|\; x \in \partial\Omega \right\}.$$

[13] Augustin-Louis Cauchy (21.8.1789-22.5.1857) war Sohn eines hohen Beamten und genoss demzufolge eine gute Privatausbildung. Nach einem ingenieurwissenschaftlichen Studium eignete er sich nebenbei Werke von Lagrange an. Im Jahr 1811 löste er ein Problem, das Lagrange formuliert hatte. Er arbeitete über Integrale, Strömungsmechanik und Elastizitätstheorie. Speziell die Arbeiten zum letztgenannten Bereich machten ihn zu einem der bekanntesten Mathematiker seiner Zeit. Im weiteren arbeitete er auf vielen Gebieten, sein Hauptarbeitsgebiet wurde die Analysis mit der Theorie von Differentialgleichungen. Nach Gauß begann er mit komplexen Zahlen und der zugehörigen Analysis zu arbeiten. Cauchy war ungeheuer produktiv und dies sehen wir noch heute an vielen Konzepten, die seinen Namen tragen.

[14] Bernhard Riemann (17.9.1826-20.7.1866) war Sohn eines Pastors und studierte auch anfänglich Theologie. Seine Dissertation widmete sich den Grundlagen der Funktionentheorie. In seinem Habilitationsvortrag legte er den Grundstein für ein modernes Verständnis der Geometrie. Obwohl er nicht einmal vierzig Jahre alt wurde, hat er die Mathematik und Physik grundlegend beeinflusst.

Ganz ähnlich erhält man aus $Lu \le 0$

$$\inf \left\{ u(x) \;\middle|\; x \in \Omega \right\} = \inf \left\{ u(x) \;\middle|\; x \in \partial\Omega \right\}.$$

Bevor wir zum Beweis kommen, wollen wir noch ein Lemma aus der linearen Algebra bereitstellen.

Definition 1.4.4
Eine symmetrische $n \times n$-Matrix A heißt positiv semidefinit, *wenn für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$y^T Ay = \langle y, Ay \rangle \ge 0.$$

Lemma 1.4.5
Sind A, B positiv semidefinite $(n \times n)$–Matrizen, so ist $\operatorname{tr}(AB) \ge 0$. (Man beachte, dass das Produkt positiv semidefiniter Matrizen i. a. nicht positiv semidefinit ist.)

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass für je zwei Matrizen $A,\ B$ gilt $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. Ferner ist für eine positiv semidefinite Matrix A die Spur $\operatorname{tr}(A) \ge 0$. Zu jeder positiv semidefiniten Matrix B gibt es eine positiv semidefinite Quadratwurzel $B^{\frac{1}{2}}$. Also ist

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(B^{\frac{1}{2}} AB^{\frac{1}{2}}).$$

Da $B^{\frac{1}{2}} AB^{\frac{1}{2}}$ positiv semidefinit ist, ist deren Spur nicht negativ und damit ist das Lemma gezeigt. $\square$

Beweis von Satz 1.4.3.
Ist $Lu > 0$, so kann u im Inneren kein Maximum haben, denn sei $x_0 \in \Omega$ die Stelle an der $u(x_0)$ maximal ist, so ist $D_i u(x_0) = 0$ für alle i. Die Hessesche $\operatorname{Hess}(u(x_0))$ ist negativ semidefinit. Aufgrund der Elliptizität ist A positiv definit. Also gilt

$$Lu(x_0) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_0) D_{ij} u(x_0) = \operatorname{tr}(A \text{ Hess } u(x_0)) \le 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $Lu > 0$.

Nun ist nach (1.16) $\frac{|b^i|}{\lambda} \le b_0$, welches eine Konstante ist. Da $a^{11}(x) \ge \lambda(x)$ ist, gibt es eine genügend große Zahl $\gamma > 0$ mit

$$Le^{\gamma x_1} = (\gamma^2 a^{11} + \gamma b^1) e^{\gamma x_1} \ge \lambda(\gamma^2 - \gamma b_0) e^{\gamma x_1} > 0.$$

Also ist für alle $\varepsilon > 0$
$$L(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) > 0$$
in Ω. Aus dem ersten Teil folgt nun
$$\sup_{\Omega}(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) = \sup_{\partial\Omega}(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}).$$
Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung des Satzes. $\square$

Korollar 1.4.6
Es seien die Voraussetzungen wie oben erfüllt, zusätzlich gelte $c \leq 0$. Sei $u^+ = \max\{u, 0\}$. Dann ist
$$\text{(a)} \qquad \sup_{x\in\Omega} u(x) \leq \sup_{x\in\partial\Omega} u^+(x).$$
Gilt zusätzlich $Lu = 0$ in Ω, so ist
$$\text{(b)} \qquad \sup_{x\in\Omega} |u(x)| = \sup_{x\in\partial\Omega} |u(x)|.$$
Entsprechende Aussagen gelten für das Infimum und u^-.

Man vergleiche das Maximumprinzip für elliptische Differentialoperatoren mit dem Maximumprinzip der Funktionentheorie. Wie hängen diese Aussagen zusammen?

Korollar 1.4.7
Ist $c \leq 0$, $f \in C(\Omega; \mathbb{R})$ so hat
$$Lu = f \quad \text{in } \Omega \tag{1.17}$$
$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{1.18}$$
höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R}) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$.

1.5 Harmonische Funktionen

Definition 1.5.1
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$. u heißt harmonisch, *falls $\Delta u = 0$. Entsprechend heißt u* subharmonisch *falls $\Delta u \geq 0$ und* superharmonisch *falls $\Delta u \leq 0$ in Ω.*

In den Übungen hatten wir gesehen, dass harmonische Funktionen einer *Mittelwerteigenschaft* genügen: d.h. für $x \in \Omega$ gilt

$$u(x) = \frac{1}{\mu(B_\varepsilon(x))} \int\limits_{B_\varepsilon(x)} u(\xi) d\xi. \tag{1.19}$$

Zum Beweis dieser Aussage leitet man üblicherweise eine entsprechende Aussage für die Mittelwerte auf der Oberfläche einer kleinen Kugel her. Fast gleichlautende Aussagen erhält man auf gleichem Wege auch für sub- bzw. superharmonische Funktionen und dies begründet letztendlich auch die Namensgebung für diese Funktionen. Wir fassen diese Resultate zusammen im folgenden Satz.

Satz 1.5.2
Für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ und harmonisch (superharmonisch, subharmonisch), dann gelten die folgenden Mittelwert(un)gleichungen

$$\begin{aligned} u(x_0) &= (\geq, \leq) \quad \frac{1}{n\omega_n \rho^{n-1}} \int\limits_{\partial B_\rho(x_0)} u dF \\ u(x_0) &= (\geq, \leq) \quad \frac{1}{\omega_n \rho^n} \int\limits_{B_\rho(x_0)} u dx, \end{aligned}$$

wobei ω_n für das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ steht.

Die Umkehrung dieses Resultates ist erstaunlicherweise ebenfalls wahr, wir halten dies im folgenden Satz fest.

Satz 1.5.3
Ist $u \in C(\Omega; \mathbb{R})$ und genügt der Mittelwerteigenschaft, so ist u harmonisch.

Bevor wir zum Beweis (im nächsten Abschnitt) kommen, wollen wir eine einfache Folgerung aus diesem Satz ziehen.

Korollar 1.5.4
Ist $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine bezüglich der Norm der gleichmäßigen Konvergenz konvergente Folge harmonischer Funktionen, so ist der Grenzwert harmonisch.

Beweis. Folgt sofort aus der Charakterisierung harmonischer Funktionen durch die Mittelwerteigenschaft. □

Im letzten Abschnitt hatten wir Maximumprinzipien für Lösungen elliptischer Randwertprobleme abgeleitet, damit gelten diese natürlich auch für harmonische, bzw. subharmonische Funktionen. Wir wollen hier noch kurz zeigen, dass ähnliche Sätze auch für Funktionen mit Mittelwerteigenschaften gelten.

Satz 1.5.5 (Maximumprinzip und Mittelwerteigenschaft)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Gegeben sei $u \in C(\Omega; \mathbb{R})$ mit

$$u(x) \leq \frac{1}{\mu(B_\rho(x))} \int\limits_{B_\rho(x)} u(y)dy,$$

für jede kompakt in Ω liegende Kugel $B_\rho(x)$. Gibt es dann einen Punkt $y_0 \in \Omega$ mit $u(y_0) = \sup\{u(y) \mid y \in \Omega\}$, so ist u konstant.

Beweis. Sei $\Omega_{\max} = \{y \in \Omega \mid u(y) = u(y_0)\}$. $\Omega_{\max} \neq \emptyset$, $\Omega_{\max}$ ist relativ abgeschlossen in Ω. Können wir noch zeigen, dass $\Omega_{\max}$ offen in Ω ist, so folgt $\Omega_{\max} = \Omega$. Sei $x \in \Omega_{\max}$ und $\rho > 0$ mit $B_\rho(x) \subset \Omega$. Dann folgt

$$u(y_0) = u(x) \leq \frac{1}{\mu(B_\rho(x))} \int\limits_{B_\rho(x)} u(y)dy \leq \frac{1}{\mu(B_\rho(x))} \int\limits_{B_\rho(x)} u(y_0)dy = u(y_0).$$

Dann ist $u(y) = u(y_0)$ in $B_\rho(x)$ und wegen der Stetigkeit von u auch $u = u(y_0)$ auf $\overline{B_\rho(x)}$. □

1.6 Die Poissonsche Gleichung

Wir beginnen mit der sogenannten zweiten Greenschen Formel (vgl. Übungen, Blatt 2, Aufgabe 7c) für Funktionen $u, v \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet sei.

$$\int\limits_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dF. \tag{1.20}$$

Definition 1.6.1 (Fundamentallösung des Laplace-Operators)
Wir setzen für $x, a \in \mathbb{R}^n$ die Fundamentallösung *des Laplaceoperators als*

$$\Gamma_a(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(n-2)\omega_n} \dfrac{1}{\|x-a\|^{n-2}} & \textit{für } n \neq 2 \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln \|x-a\| & \textit{für } n = 2 \end{cases}$$

Die Fundamentallösung hat die folgenden (einfach zu überprüfenden Eigenschaften): für $x \to a$ gilt $\Gamma(x-a) \to -\infty$ und auf $\Omega \setminus \{a\}$ ist $x \mapsto \Gamma(x-a)$ harmonisch, d.h. sie löst die Gleichung

$$\Delta\Gamma(x-a) = 0 \quad \text{auf } \Omega \setminus \{a\}.$$

Nun wenden nwir die obige Formel (1.20) auf der Menge $\Omega \setminus B_\varepsilon(y)$ auf die Funktion $v(x) = \Gamma(x-y) = \Gamma_y(x)$ anwendet:

$$\int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon(y)} \Gamma(x-y)\Delta u(x)dx = \int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} \left(\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y)\right) dF$$
$$+ \int\limits_{\partial\Omega} \left(\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y)dF\right).$$

Das Integral über den Rand der ε-Kugel um y lässt sich in zwei Teile aufspalten und diese werden getrennt behandelt:

$$\int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu} dF = \tilde{\Gamma}(\varepsilon) \int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dF,$$

dabei steht $\tilde{\Gamma}$ für die Funktion $\tilde{\Gamma}(\|x\|) = \Gamma(x)$, da Γ nur von der Norm des Arguments abhängt. Das letzte Integral wird betragsmäßig durch

$$n\omega_n \varepsilon^{n-1} \max_{\partial B_\varepsilon(y)} \|\nabla u\|$$

abgeschätzt, wobei $\omega_n = \mu(B_1(0))$ ist. Man beachte, dass die Oberfläche der Einheitskugel durch $n\omega_n$ gegeben ist. Für $\varepsilon \to 0$ konvergiert dies gegen 0 und es bleibt das andere Integral. Hier beachtet man, dass für $x \in \partial B_\varepsilon(y)$ $\nabla\Gamma(x-y)$ colinear zu ν ist. Dabei ist zu beachten, dass die äußere Normale zu $\Omega \setminus B_\varepsilon(y)$ auf dem Rand der Kugel in die Kugel hineinzeigt, und damnit das Negative zur äuseren Normalen der Kugel im jeweiligen Punkt ist, daher ist $\frac{\partial\Gamma}{dn}(x-y) = -\tilde{\Gamma}'(\varepsilon)$. Man hat also

$$\int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} u(x)\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y)dF = -\tilde{\Gamma}'(\varepsilon)\int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} udF = \frac{-1}{n\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} u\,dF \to -u(y)$$

für $\varepsilon \to 0$. Damit erhalten wir die sogenannte *Greensche Darstellungsformel* [15]

$$u(y) = \int\limits_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\right)dF + \int\limits_{\Omega}\Gamma(x-y)\Delta u(x)\,dx.$$

Für harmonische Funktionen kann man u damit aus den **Randdaten** rekonstruieren. Da wir erwarten, dass Lösungen für elliptische Gleichungen zweiter Ordnung durch die **Randwerte** eindeutig festgelegt werden, werden wir diese Darstellung noch verfeinern.

Zunächst jedoch betrachten wir zwei Spezialfälle , die sich bereits aus dieser Darstellung ergeben. Erstens fällt für u mit kompaktem Träger das erste Integral weg und man erhält

$$u(y) = \int\limits_{\Omega}\Gamma(x-y)\Delta u(x)dx.$$

Zweitens ist für harmonisches u das zweite Integral Null und man behält nur

$$u(y) = \int\limits_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\right)dF.$$

Der zweite Fall erlaubt uns einen typischen Regularitätsschluss, wie wir ihn noch öfters sehen werden: ist u harmonisch, so hat man u durch obiges Integral gegeben. Die rechte Seite ist C^∞, ja sogar reell analytisch, also ist jede harmonische Funktion $u \in C^2(\Omega;\mathbb{R})$ reell analytisch. Damit erhält man Aussagen, die man für holomorphe Funktionen aus der Funktionentheorie kennt.

[15] George Green (14.7.1793-31.5.1841) war britischer Mathematiker und Physiker und zum größtenteil Autodidakt. Er hat aufsehenerregende Arbeiten zur Analysis und Magnetismus geschrieben. Ferner stammen wichtige Beiträge zur Potentialtheorie von ihm.

Die Darstellungsformel wird noch etwas vereinfacht, wenn man Γ modifiziert. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung. Der Raum $C^1(\overline{\Omega})$ besteht aus Funktionen, die C^1 auf einer offenen Menge sind, die $\overline{\Omega}$ enthält. Die Norm wird auf die übliche Weise erklärt. Hat man nun eine harmonische Funktion $h \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega; \mathbb{R})$, so folgt aus der Greenschen Formel (1.20)

$$\int_\Omega h \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \left(h\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial h}{\partial \nu} \right) dF.$$

Setzen wir nun

$$G = \Gamma + h$$

so ergibt sich die neue Greensche Darstellungsformel

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial G}{\partial \nu} - G\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dF + \int_\Omega G \Delta u \, dx.$$

Definition 1.6.2
Ist $h \in C(\Omega \times \Omega; \mathbb{R})$, $h(\cdot, y)$ harmonisch für alle $y \in \Omega$, so heißt $G(x, y) = \Gamma(x - y) + h(x, y)$ eine Greensche Funktion, *falls für jedes $y \in \Omega$ $G(\cdot, y)$ auf $\partial\Omega$ verschwindet.*

Satz 1.6.3
Existiert eine Greensche Funktion, so ist sie eindeutig.

Beweis. Dies folgt sofort aus dem Maximumprinzip und dem daraus folgenden Eindeutigkeitssatz. □

Bemerkung 1.6.4
Die **Bedeutung** *der Greenschen Funktion liegt darin, dass man mit ihrer Hilfe harmonische Funktionen in $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega; \mathbb{R})$ durch ihre* **Randwerte** *darstellen kann.*

Im Spezialfall $\Omega = B_R(0)$ kann man die Greensche Funktion explizit konstruieren. Man erhält

$$G(x, y) = \begin{cases} \tilde{\Gamma}(\|x - y\|) - \tilde{\Gamma}(\|y\| \|x - \overline{y}\|/R), & y \neq 0 \\ \tilde{\Gamma}(\|x\|) - \tilde{\Gamma}(R), & y = 0. \end{cases},$$

wobei $\overline{y} = \frac{R^2}{\|y\|^2} y$ die Spiegelung am Rand der Kugel vom Radius R sei.

Aufgabe 1.6.5
Man gebe eine geschlossene Formel für $G(x,y)$ auf $B_R(0)$ an und zeige $G(x,y) = G(y,x)$ und $G(x,y) \le 0$. Man berechne die äußere Normalenableitung.

Satz 1.6.6 (Poissonsche[16] Darstellungsformel)
Ist $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^1(\overline{B_R(0)})$ harmonisch, so erhält man folgende Poissonsche Darstellungsformel

$$u(y) = \frac{R^2 - \|y\|^2}{n\omega_n R} \int\limits_{\partial B_R(0)} \frac{u dx}{\|x-y\|^n}.$$

Beweis. Folgt sofort aus den vorherigen Aussagen. □

Ist $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B_R(0)})$, so existiert eine Folge $u_\nu \in C^2(B_R(0)) \cap C^1(\overline{B_R(0)})$, mit $u_\nu \to u$ für $\nu \to \infty$. Dann folgt aus einfachen Konvergenzüberlegungen, dass der obige Satz auch für Funktionen mit nur stetigen Randwerten gilt. Eine Umkehrung dieser Aussage enthält der nächste Satz.

Satz 1.6.7
Es sei $\varphi : \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = R\} \to \mathbb{R}$ stetig, dann definiert

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{R^2 - \|x\|^2}{n\omega_n R} \displaystyle\int\limits_{\partial B_R(0)} \dfrac{\varphi(y)dy}{\|x-y\|^n} & \text{für } \|x\| < R \\ \varphi(x) & \text{für } \|x\| = R \end{cases} \tag{1.21}$$

eine harmonische Funktion in $C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B_R(0)})$.

Beweis. Die Harmonizität von u folgt sofort aus der von G. Bleibt die Stetigkeit am Rand von $B_R(0)$ zu beweisen. Setzt man in die Poissonsche Darstellung die harmonische Funktion $u(x) = 1$ ein, so ergibt sich

$$1 = \int\limits_{\partial B_\rho(0)} \frac{R^2 - \|y\|^2}{n\omega_n R\|x-y\|^n} dF_x$$

[16] Siméon Denis Poisson (21.6.1781-25.4.1840) war französischer Mathematiker, dessen Familie ihn ursprünglich nicht den Weg in die Wissenschaft ebnete. Er studierte an der École Polytechnique und war Schüler von Lagrange und Laplace, auch die Aufmerksamkeit von Legendre konnte er früh auf sich ziehen. er machte eine schnelle wissenschaftliche Karriere in Paris. Seine wesentlichen mathematischen Beiträge betreffen die Theorie gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen, sowie die mathematische Physik.

für alle $y \in B_R(0)$. Für den Integranden schreiben wir kurz $K(x,y) = \frac{R^2-\|y\|^2}{n\omega_n R\|x-y\|^n}$. Wir benutzen für den Beweis der Stetigkeit am Rand die klassische $\varepsilon-\delta$-Methode. Seien $y_0 \in \partial B_R(0)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta_1 > 0$, so dass $\|y\| = R$ und $\|y - y_0\| < \delta_1$ impliziert, dass $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
|u(y) - u(y_0)| &= \left| \int_{\partial B_R(0)} K(x,y)\,(\varphi(x) - \varphi(y_0))\,dF_x \right| \\
&\leq \int_{\partial B_R(0)\cap\|x-y_0\|\leq\delta_1} + \int_{\partial B_R(0)\cap\|x-y_0\|\geq\delta_1} K(x,y)|\varphi(x) - \varphi(y_0)|dF_x \\
&\leq \varepsilon + \frac{2M(R^2 - \|y\|^2)R^{n-2}}{(\delta_1)^n}.
\end{aligned}$$

Nun gibt es ein $\delta_2 > 0$, so dass für $R - \|y\| < \delta_2$ gilt

$$\frac{2M(R^2 - \|y\|^2)R^{n-2}}{(\delta_1)^n} \leq \frac{2M(R - \|y\|)(R + \|y\|)}{\delta_1^n} \leq \frac{4MR\delta_2}{\delta_1^n} < \varepsilon$$

falls δ_2 hinreichend klein gewählt wurde. $\square$

Beweis von Satz 1.5.3.
Gegeben sei eine stetige Funktion $u \in C(\Omega; \mathbb{R})$, die auf jeder Kugel $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ der Mittelwerteigenschaft genügt. Nach dem vorhergehenden Satz existiert nun eine harmonische Funktion $h \in C^2(B_R(x_0))$, so dass $h = u$ auf dem Rand $\partial B_R(x_0)$. Die Differenz $w = u - h$ genügt nun auf $B_R(x_0)$ der Mittelwerteigenschaft und hat Randwerte 0. Das Maximumprinzip für Funktionen mit Mittelwerteigenschaft, siehe Satz 1.5.5, impliziert, dass $w = 0$. $\square$

1.7 Das klassische Dirichlet-Problem

Wir erweitern zunächst die Definition von subharmonischen Funktionen von C^2-Funktionen auf beliebige stetige Funktionen.

Definition 1.7.1
Eine stetige Funktion $u \in C(\Omega; \mathbb{R})$ heißt subharmonisch, *wenn zu jeder Kugel $B_\rho(x) \subset\subset \Omega$ und jeder harmonischen Funktion $h : B_\rho(x) \to \mathbb{R}$ gilt: ist $u \leq h$ auf $\partial B_\rho(x)$, so ist $u \leq h$ in $B_\rho(x)$. Entsprechend definieren wir den Begriff superharmonisch.*

Aufgabe 1.7.2
Ist $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$, dann ist u gemäß der neuen Definition genau dann subharmonisch falls $\Delta u \geq 0$.

Die wesentlichen Eigenschaften der neuen Funktionenklasse sind in den folgenden Sätzen enthalten.

Satz 1.7.3

1. *Ist u subharmonisch, dann genügt u dem starken Maximumprinzip, d.h. ist $y_0 \in \Omega$ mit $u(y_0) = \sup \{u(z) \mid z \in \Omega\}$, so ist u konstant.*

2. *Ist v superharmonisch auf einem beschränkten Gebiet Ω, $v \geq u$ auf $\partial\Omega$. Dann ist entweder $v > u$ in Ω oder $u = v$.*

Beweis. Wir beweisen zunächst die erste Aussage. Der Beweis beruht auf inzwischen bekannten Gedanken. Wir betrachten die Menge

$$\Omega_{max} = \{x \in \Omega \mid u(x) = u(y_0)\} .$$

Diese ist nach Annahme nichtleer und wegen der Stetigkeit von u relativ abgeschlossen. Wiederum müssen wir zeigen, dass Ω_{max} relativ offen ist.
Sei $x_0 \in \Omega_{max}$ und $B_\rho(x_0) \subset\subset \Omega$. Sei h harmonisch auf $B_\rho(x_0)$ mit $h = u$ auf $\partial B_\rho(x_0)$. Dann ist

$$u(x_0) \leq h(x_0) = \frac{1}{n\omega_n \rho^{n-1}} \int\limits_{\partial B_\rho(x_0)} h dF \leq u(x_0),$$

da $h(x) \leq u(x_0)$ auf $\partial B_\rho(\Omega; \mathbb{R})$. Also ist $u = h = u(x_0)$ auf $\partial B_\rho(x_0)$. Da dies für alle $0 < r < \rho$ gilt, ist Ω_{max} relativ offen in Ω und es gilt $\Omega = \Omega_{max}$.
Zum Beweis der zweiten Aussage bemerken wir, dass $u - v$ subharmonisch ist und ≤ 0. Gilt Gleichheit an einer Stelle, so gilt sie wegen der ersten Aussage überall. $\square$

Definition 1.7.4
Sei Ω ein Gebiet und $u \in C(\Omega;\mathbb{R})$ subharmonisch. Ferner sei $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ eine Kugel. Sei $h \in C^2(B_R(x_0))$ die harmonische Funktion auf $B_R(x_0)$ deren Randwerte mit denen von u auf $\partial B_R(x_0)$ übereinstimmt. Wir bezeichnen die Funktion

$$U(x) = \begin{cases} h(x) & x \in B_R(x_0) \\ u(x) & x \in \Omega \setminus B_R(x_0) \end{cases}$$

als harmonische Hebung *von u bezüglich $B_R(x_0)$.*

Satz 1.7.5
Die harmonische Hebung U bezüglich einer Kugel $B_R(x_0)$ einer subharmonischen Funktion $u \in C(\Omega;\mathbb{R})$ ist subharmonisch.

Beweis. Sei $\rho > 0$ und $B_\rho(y) \subset\subset \Omega$, $p \in C^2(B_\rho(y))$ harmonisch auf $B_\rho(y)$ mit $p \geq U$ auf $\partial B_\rho(y)$. Dann ist auf dem Rand $\partial B_\rho(y)$

$$p \geq U \geq u$$

und damit ist $p \geq u$, da u subharmonisch ist. Damit ist die Behauptung außerhalb von $B_R(x_0)$ gezeigt. Im Sonderfall $B_\rho(y) \subset B_R(x_0)$ ist die Behauptung trivial, ansonsten ist entweder $B_R(x_0) \subset B_\rho(y)$ oder $\partial(B_R(x_0) \cap B_\rho(y))$ besteht aus

$$((\partial B_R(x_0)) \cap B_\rho(y)) \bigcap (B_R(x_0) \cap \partial B_\rho(y))$$

und aus eventuell zwei weiteren Punkten. In jedem Fall ist auf $(\partial B_R(x_0)) \cap B_\rho(y)$ $U = u$ und daher $U \leq p$. Daher ist auf $\partial(B_R(x_0) \cap B_\rho(y))$ $U \leq p$. Da U, p in diesem Gebiet harmonisch sind, ist auch die Differenz $U - p$ harmonisch und wegen des Maximumprinzips im Inneren ≤ 0. □

Satz 1.7.6
Ist $\mathcal{U}$ eine Familie stetiger subharmonischer Funktionen aus einem Gebiet Ω. Ist $\mathcal{U}$ endlich, so ist

$$U(x) = \sup \{u(x) \mid u \in \mathcal{U}\}$$

subharmonisch. (Man beachte, dass diese Aussage für eine beliebige Menge $\mathcal{U}$ gilt, wenn man in der Definition stetig durch oberhalb stetig ersetzt, d.h., wenn zu jedem $x_0 \in \Omega$ und ein $\delta > 0$ existiert, so dass $x \in B_\delta(x_0)$ impliziert $u(x) \geq u(x_0) - \varepsilon$.

Beweis. Ist $B_\rho(y)$ gegeben und h harmonisch auf $B_\rho(y)$ mit $h \geq U$ auf $\partial B_\rho(y)$. Dann folgt $h \geq u$ für alle $u \in \mathcal{U}$ auf $B_\rho(y)$ und damit natürlich auch $h \geq U$. □

Bevor wir den wichtigsten Satz dieses Abschnittes beweisen können, benötigen wir noch ein technisches Hilfsmittel. Es ist Prototyp einer Klasse von Resultaten, die in der Theorie partieller Differentialgleichungen eine große Rolle spielen und unter dem Schlagwort „a-priori Abschätzung" läuft. Dabei versucht man ohne Kenntnis der Lösung u, allein aufgrund der Tatsache, dass u eine gewisse Gleichung erfüllt Abschätzungen für Normen von Ableitungen von u zu bekommen. Oft steckt gerade in diesen Abschätzungen viel Arbeit und es ist dann vergleichsweise einfach, unter Verwendung allgemeiner Sätze weiter zu kommen.

Satz 1.7.7
Ist u harmonisch im Gebiet Ω und $\Omega' \subset\subset \Omega$, dann gilt für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\sup_{\Omega'} |D^\alpha u| \leq \left(\frac{n|\alpha|}{d}\right)^{|\alpha|} \sup_{\Omega} |u|,$$

wobei $d = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ ist.

Beweis. Wir wissen bereits, dass jede harmonische Funktion $u \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ ist. Wählen wir eine spezielle Ableitung D^α aus, so gilt

$$\Delta D^\alpha u = D^\alpha \Delta u = 0.$$

Also ist jede Ableitung wieder harmonisch und genügt insbesondere der lokalen Mittelwerteigenschaft. Also hat man

$$\nabla u(y) = \frac{1}{\mu(B_R(0))} \int\limits_{B_R(y)} \nabla u dx = \frac{1}{\mu(B_R(0))} \int\limits_{\partial\mu(B_R(y))} u\,\nu\, dF$$

Insbesondere folgt nun durch Abschätzen des letzten Integrals durch

$$\sup |u(x)| \mu(\partial(B_R(0))),$$

dass

$$\|\nabla u\| \leq \frac{n}{R} \sup_{\partial B_R(y)} |u|.$$

Natürlich folgt durch Übergang $R \to d_y = \inf_{x \in \partial\Omega} \|y - x\|$, dass gilt

$$\|\nabla u\| \leq \frac{n}{d_y} \sup |u|.$$

Durch wiederholtes Anwenden dieser Formel für konzentrische Kugeln erhält man die behauptete Aussage. ∎

Die Methode zur Lösung des Dirichletschen Randwertproblems für harmonische Funktionen

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= g_0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

die der folgende Satz angibt geht auf Perron[17]zurück und wird als *Perronsche Methode* bezeichnet.

Satz 1.7.8 (Perron)
Es sei Ω ein beschränktes Gebiet und $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Setze

$$\mathcal{U} = \left\{ u \in C(\overline{\Omega}) \mid u \textit{ ist subharmonisch und } u \leq \varphi \textit{ auf } \partial\Omega \right\}.$$

Dann ist

$$U(x) = \sup \{ u(x) \mid u \in \mathcal{U} \}$$

harmonisch auf Ω.

Beweis. Wir beobachten zunächst, dass $\mathcal{U}$ nicht leer ist, denn jede Konstante $c < \inf_{\partial\Omega} \varphi$ ist in $\mathcal{U}$. Wegen des Maximumprinzips ist $u \in \mathcal{U}$ punktweise durch $\sup \varphi$ beschränkt und damit ist U definiert. Wähle $x \in \Omega$. Dann gibt es eine Folge $u_n \in \mathcal{U}$ mit $u_n(x) \to U(x)$. Nun sei $B_R(x) \subset\subset \Omega$ gewählt und U_n die harmonische Liftung von u_n bezüglich $B_R(x)$. Offenkundig ist $U_n \in \mathcal{U}$ für alle n und damit hat man auf $B_R(x)$ eine beschränkte Folge harmonischer Funktionen. Nach Satz 1.7.7 ist diese Folge für jedes $\rho < R$ auf $B_R(x)$ gleichgradig stetig und bei $x = 0$ konvergent. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli gibt es eine auf $B_\rho(x)$ konvergente Teilfolge U_{n_k}. Diese konvergiert gegen eine auf $B_\rho(x)$ harmonische Funktion v. Es gilt $v \leq U$ und $v(x) = U(x)$ (nach Konstruktion).

Wir zeigen nun $v = U$ auf $B_\rho(x)$. Ist $v(y) < U(y)$ für ein $y \in B_\rho(x)$, dann gibt es (wegen der Definition von U) ein $u \in \mathcal{U}$ mit $v(y) < u(y) \leq U(y)$.

[17]O. Perron (7.5.1880-22.2.1975) studierte lehrte vornehmlich in München, bedeutende Beiträge zur Theorie von Differentialgleichungen, Kettenbrüchen und zur Analysis. Er war dezidierter Gegner des Nationalsozialismus und versuchte in dieser Zeit nach Kräften bei Berufungen, Habilitationen und Promotionen die wissenschaftliche Qualifikation als wesentliches Entscheidungskriterium zu erhalten

Sei $v_k = \max\{u, U_k\}$. Mit der harmonischen Hebung V_k von v_k auf $B_R(x)$ bekommen wir eine Folge harmonischer Funktionen

$$U_k \leq V_k \leq U$$

mit $V_k \to V$ und V ist harmonisch in $B_\rho(x)$. Also sind v, V harmonisch auf $B_\rho(x)$ und es gilt $v \leq V$ und $v(x) = V(x)$. Dann ist aber $v - V \leq 0$ und harmonisch in $B_\rho(x)$, also wegen des Maximumprinzips identisch 0. Dies widerspricht aber der Definition von u. □

Damit haben wir alle Vorbereitungen getroffen, um für stetige Funktionen $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ Randwertprobleme der Form

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ u &= \varphi \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

zu studieren.

Definition 1.7.9
Die oben im Satz 1.7.8 konstruierte harmonische Funktion heißt Perronsche Lösung *des Randwertproblems*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ u &= \varphi \textit{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Die Frage der Annahme der Randwerte auf $\partial\Omega$ ist dabei noch offen. Wir werden sehen, dass es eine Frage der lokalen Geometrie des Randes ist, in welcher Weise die Randwerte angenommen werden.

Definition 1.7.10
Sei Ω ein beschränktes Gebiet, $\xi \in \partial\Omega$. Dann heißt eine Funktion $w \in C^0(\overline{\Omega})$ Schranke *oder* Barriere *bei ξ, falls*

1. *w superharmonisch auf Ω ist, und*

2. *$w > 0$ in $\overline{\Omega} \setminus \{\xi\}$ und $w(\xi) = 0$*

gilt. Eine lokale Schranke bei ξ ist eine Funktion, die auf einer Umgebung $B_\rho(\xi)$ definiert ist, so dass die Bedingungen auf $B_\rho(\xi) \cap \Omega$ erfüllt sind.

Lemma 1.7.11
Die Existenz einer lokalen Schranke impliziert die Existenz einer Schranke.

Beweis. Klar! □

Definition 1.7.12
Ein Randpunkt $\xi \in \partial\Omega$ heißt regulär, *falls es eine Schranke bei ξ gibt.*

Satz 1.7.13
Für die Perronsche Lösung u des obigen Randwertproblems gilt, dass $u(x) \to \varphi(\xi)$ konvergiert (für $x \to \xi$), falls ξ regulärer Punkt ist und φ bei ξ stetig ist.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $M = \sup|\varphi|$. Da ξ regulärer Punkt ist, existiert eine Schranke w. Dann gibt es ein $\delta > 0$, $k > 0$ mit $\|x - \xi\| < \delta$ impliziert $|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon$ und $kw(x) > 2M$, falls $\|x - \xi\| \geq \delta$. Dann sind $v_o = \varphi(\xi) + \varepsilon + w$ und $v_u = \varphi(\xi) - \varepsilon - w$ super- bzw. subharmonisch und $\geq \varphi$, bzw. $\leq \varphi$ auf $\partial\Omega$. Dann hat man in Ω

$$v_u \leq u \leq v_o$$

oder

$$|u(x) - \varphi(\xi)| \leq \varepsilon + kw(x).$$

Da $w(\xi) = 0$ folgt der Satz unmittelbar. □

Wir fassen die Resultate zum klassischen Dirichletproblem zusammen.

Satz 1.7.14
Das klassische Dirichletproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ u &= \varphi \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

ist für jede stetige Randfunktion φ genau dann lösbar, falls jeder Randpunkt regulär ist.

Beweis. Die eine Richtung wurde gerade gezeigt.

Für die Umkehrung wählen wir die spezielle Randfunktion

$$\varphi(x) = |x - \xi|.$$

Die zugehörige Lösung des klassischen Dirichletproblems ist harmonisch, und damit natürlich eine Schranke. Damit ist ξ regulär. □

Die Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \text{ in } \Omega \\ u &= \varphi \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

kann man jetzt angehen, indem man zurück zur Darstellungsformel mittels der Fundamentallösung geht. Wir wollen untersuchen inwieweit die Funktion

$$w(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y) f(y)\, dy,$$

die wir als *Newton-Potential* von f bezeichnen wollen, eine C^2-Funktion darstellt, für die gilt $\Delta u = f$. Zunächst geht es um Differenzierbarkeitseigenschaften.

Lemma 1.7.15
Es sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar und beschränkt. Dann ist das Newton-Potential von f stetig differenzierbar und es gilt

$$D_{x_i} w(x) = \int_\Omega D_{x_i} \Gamma(x-y) f(y)\, dy.$$

Beweis. Wir setzen

$$v(x) = \int_\Omega D_{x_i} \Gamma(x-y) f(y)\, dy$$

und wollen zeigen, dass $D_i w = v$ ist. Dazu betrachten wir eine Hilfsfunktion $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften

1. χ ist C^∞ glatt,
2. χ verschwindet auf $[-1,1]$ ist konstant 1 auf $\left\{ s \in \mathbb{R} \,\middle|\, |s| \geq 2 \right\}$ und für alle $s \in \mathbb{R}$ ist $0 \leq \chi(s) \leq 1$,
3. für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt $|\chi'(s)| \leq 2$.

Die Existenz einer solchen Funktion ist klar. Mit χ_ε bezeichnen wir die Funktion $\chi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\chi_\varepsilon(x,y) = \chi(\frac{\|x-y\|}{\varepsilon}).$$

Nun setzen wir

$$w_\varepsilon(x) = \int\limits_\Omega \Gamma(x-y)\chi_\varepsilon(x,y)f(y)\,dy.$$

Nun ist $w_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, ferner gilt $w_\varepsilon \to w$ gleichmäßig für $\varepsilon \to 0$ und ist für jede Folge $\varepsilon \to 0$ die Folge w'_ε gleichmäßig konvergent und damit ist w eine C^1-Funktion. Wir berechnen den Abstand

$$v(x) - D_{x_i}w_\varepsilon(x) = \int\limits_{\|x-y\|<2\varepsilon\cap\Omega} D_{x_i}[(1-\chi_\varepsilon(x,y))\Gamma(x-y)]f(y)\,dy.$$

Damit können wir abschätzen

$$\begin{aligned} |v(x) - D_{x_i}w_\varepsilon(x) &\leq \sup_{y\in\Omega}|f(y)| \int\limits_{B_{2\varepsilon}(x)} |D_{x_i}\Gamma(x-y)| + \frac{2}{\varepsilon}|\Gamma(x-y)|\,dy \\ &\leq \sup_{y\in\Omega}|f(y)| \begin{cases} \frac{2n\varepsilon}{n-2}, & n>2 \\ 4\varepsilon(1+|\ln(2\varepsilon)|), & n=2. \end{cases} \end{aligned}$$

Also konvergiert $D_{x_i}w_\varepsilon$ auch gegen v und $v = D_{x_i}w$. □

Definition 1.7.16
Wir nennen eine $f : \Omega \to \mathbb{R}$ Hölder stetig *auf $U \subset \Omega$ mit Exponenten $\alpha > 0$, falls f stetig ist und folgende Abschätzung gilt*

$$|f(x) - f(y)| \leq C\|x-y|^\alpha \text{ für alle} x, y \in U.$$

Gibt es zu jedem $x \in \Omega$ ein offene Umgebung U, so dass f auf U Hölder-stetig[18] *mit Exponenten α ist, so nennen wir f* lokal Hölder stetig *mit Exponenten α. Ist*

$$[f]_{\alpha,\Omega} = \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|^\alpha} < \infty,$$

[18]Ernst Hölder (2.4.1901–30.6.1990), der Sohn von Ludwig Otto Hölder, beschäftigte sich am Anfang seiner Laufbahn mit Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten und mit Himmelsmechanik. Später beschäftigte er sich vornehmlich mit Variationsmethoden und partiellen Differentialgleichungen.

so nennen wir f global Hölder stetig. *Mit* $C^{0,\alpha}(\Omega;\mathbb{R})$ *bezeichnen wir den Raum der auf* Ω *global Hölder stetigen Funktionen, dieser ist mit der Norm*

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}} = \sup_{x\in\Omega} |f(x)| + [f]_{\alpha,\Omega}$$

eine Norm, die $C^{0,\alpha}(\Omega;\mathbb{R})$ *zum Banachraum macht. Allgemein setzen wir*

$$C^{k,\Omega} = \left\{ f \in C^k(\Omega;\mathbb{R}) \;\middle|\; \right\} D^\alpha f \in C^{0,\alpha}(\Omega;\mathbb{R}) \text{ für } |\alpha| = k.$$

Lemma 1.7.17
Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *beschränkt und lokal Hölder stetig mit einem Exponenten* $\alpha \leq 1$, *so ist das Newtonsche Potential* w *von* f *in* $C^2(\Omega;\mathbb{R})$ *und es gilt* $\Delta w = f$. *Ist* Ω_0 *ein Gebiet mit* $\Omega \subset \Omega_0$, *so dass auf* Ω_0 *der Gaußsche Integralsatz gilt und ist* $\tilde{f}$ *die triviale Fortsetzung von* f *auf* Ω_0 *so gilt für* $x \in \Omega$

$$D_{x_ix_j} w(x) = \int\limits_{\Omega_0} D_{x_ix_j}\Gamma(x-y)(\tilde{f}(y) - f(x))\,dy - f(x) \int\limits_{\partial\Omega_0} D_{x_i}\Gamma(x-y)\nu_j\,dF.$$

Beweis. Für die zweite Ableitung der Fundamentallösung erhält man eine Abschätzung der Form

$$|D_{x_ix_j}\Gamma(x-y)| \leq \frac{1}{n\omega_n}\|x-y\|^n.$$

Daher existiert das Integral

$$q_{ij}(x) = \int\limits_{\Omega_0} D_{x_ix_j}\Gamma(x-y)(\tilde{f}(y) - f(x))\,dy - f(x) \int\limits_{\partial\Omega_0} D_{x_i}\Gamma(x-y)\nu_j\,dF,$$

wegen der Hölderstetigkeit von f. Wir setzen $v = D_{x_i} w$ und für $\varepsilon > 0$

$$v_\varepsilon(x) = \int\limits_{\Omega} D_{x_i}\Gamma(x-y)\chi_\varepsilon(x,y)f(y)\,dy,$$

wobei χ, χ_ε wie im letzten Beweis gewählt werden. Offensichtlich ist v_ε differenzierbar, also erhalten wir ($\tilde{f} = 0$ außerhalb Ω)

$$\begin{aligned} D_{x_j} v_\varepsilon(x) &= \int\limits_{\Omega_0} D_{x_j}(D_{x_i}\Gamma(x-y)\chi_\varepsilon(x,y))\tilde{f}(y)\,dy \\ &= \int\limits_{\Omega_0} D_{x_j}(D_{x_i}\Gamma(x-y)\chi_\varepsilon(x,y))(\tilde{f}(y) - f(x)\,dy + f(x)\int\limits_{\Omega_0} D_{x_j}(D_{x_i}\Gamma(x-y)\chi_\varepsilon(x,y))\,dy \\ &= \int\limits_{\Omega_0} D_{x_j}(D_{x_i}\Gamma(x-y)\chi_\varepsilon(x,y))(\tilde{f}(y) - f(x))\,dy + f(x)\int\limits_{\partial\Omega_0} D_{x_j}(D_{x_i}\Gamma(x-y)\chi_\varepsilon(x,y))\nu_j(y)\,dF \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} |u(x) - D_j v_\varepsilon(x)| &= \left| \int\limits_{B_{2\varepsilon}(x)} D_{x_j}[(1-\chi_\varepsilon(x,y)D_{x_i}\Gamma(x-y)](f(y)-f(x))\,dy \right| \\ &\le [f]_{\alpha, B_{2\varepsilon}(x)} \int\limits_{B_{2\varepsilon}(x)} \left(|D_{ij}\Gamma(x-y)| + \frac{2}{\varepsilon}|D_i\Gamma(x-y)| \right) \|x-y\|^\alpha\,dy \\ &\le \left(\frac{n}{\alpha} + 4 \right) [f]_{\alpha, B_{2\varepsilon}(x)} (2\varepsilon)^\alpha. \end{aligned}$$

Also konvergiert für $\varepsilon \to 0$ $D_i v_\varepsilon$ gleichmäßig auf Kompakta gegen u und v_ε auch gleichmäßig gegen $v = D_i w$ konvergiert, haben wir $u = D_{ij} w$ und $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$. Wählen wir nun

$$\Omega_0 = B_R(0)$$

für ein hinreichend großes $R > 0$, so ergibt sich für $\Delta w = \sum_i q_{ii}(x)$, wegen der Harmonizität von Γ fällt das erste Integral jeweils weg und wir erhalten die Summe der Randintegrale

$$\Delta w = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} f(x) \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\|x-y\|=R} \nu_i(y)\nu_i(y)\,dF = f(x).$$

$\square$

Satz 1.7.18
Wir betrachten ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dessen Randpunkte alle regulär sind (bzgl. des Laplace-Operators), dann ist das klassische Dirichletproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \text{ in } \Omega \\ u &= \varphi \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

für Hölder stetiges f und eine stetige Randfunktion φ eindeutig lösbar.

Beweis. Sei w das Newton-Potential von f, setze $v = u - w$. Dann ist

$$\Delta v = \Delta u - \Delta w = f - f = 0.$$

und auf dem Rand gilt

$$v = \varphi - w.$$

Also suchen wir eine Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \text{ in } \Omega \\ v &= \varphi - w \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dieses Problem besitzt eine eindeutige Lösung und diese überträgt sich mittels der angegebenen Konstruktion auf die Lösung u. $\square$