Kapitel 8

Euler Charakteristik

In diesem kurzen Kapitel wollen wir nur zweidimensionale Räume und Mannigfaltigkeiten betrachten. Eine Verallgemeinerung auf höher dimensionale Situationen ist möglich, jedoch muss man dann den Index anders definieren als wir es hier tun.

8.1 Die Drehung eines Vektorfeldes

Wir beginnen mit Überlegungen im $\mathbb{R}^2$ weisen aber gleich darauf hin, dass es Verallgemeinerungen auf 2-Mannigfaltigkeiten gibt, die mittels Karten auch einfach durchzuführen sind und die wir stillschweigend als gegeben ansehen werden und Verallgemeinerungen auf höher dimensionale Räume gibt, die aber wesentliche neue Ideen benötigen und auf die wir auch nicht eingehen wollen.

Definition 8.1.1 *Gegeben sei ein Vektorfeld in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^2$. Es sei C ein geschlossener Jordan Bogen. Ferner sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ eine (bis auf die Endpunkte) injektive Parametrisierung des Bogens, so dass v keine Ruhelage auf C habe. Dann ist die Abbildung*

$$r : t \mapsto \frac{1}{\|v(\gamma(t))\|} v(\gamma)$$

eine Abbildung $[0,1] \to S^1$ mit $r(0) = r(1)$. Es sei

$n_C(v)$ die Anzahl der Umläufe von r auf dem Einheitskreis in mathematisch positiver Richtung.

Wir nennen $n_C(v)$ die Drehung des Vektorfeldes *längs C.*

Es ist $n_C(v) \in \mathbb{Z}$ und daher folgt sofort die folgende Aussage.

Satz 8.1.2 *$n_C(v)$ ist stetig in v und C, d.h. es gibt Konstanten $a, b > 0$, so dass $\|v_1 - v_2\| < a$ impliziert*

$$n_C(v_1) = n_C(v_2),$$

und $\|\gamma_1 - \gamma_2\| < b$ impliziert

$$n_{C_1}(v) = n_{C_2}(v).$$

Beweis. Offensichtlich. □

Eine Konsequenz ist die folgende Beobachtung: ist $v(0) \neq 0$, so ist für jede Kurve in hinreichend kleinen Umgebung $n_C(v) = 0$. Man sieht dies indem man die Kurve auf einen Punkt zusammenzieht, und der konstante Vektor dreht sich eben nicht um den Mittelpunkt.

Definition 8.1.3 *Ist* 0 *isolierte Ruhelage des Vektorfeldes* v *so nennen wir die für hinreichend kleine Kurven definierte Drehung* $n_C(v)$ *den* Index *von* v *bei* 0*, d.h.*

$$\operatorname{ind}(v, 0) = n_C(v)$$

mit $C = \partial B_\varepsilon(0)$*. Entsprechend definieren wir den Index bzgl. jedes anderen Punktes.*

Ist nun v ein Vektorfeld, C ein geschlossener Jordan Bogen, so dass v auf C keine Ruhelage hat, so setzen wir

$$j_C(v) = \sum_{u \in K, v(u)=0} \operatorname{ind}(v, u)$$

und bezeichnen dies als Indexsumme von v bezüglich C. Die Indexsumme ist invariant gegenüber Deformationen der Kurve und Störungen des Vektorfeldes, solange keine Ruhelagen auf C liegen. Nun wollen wir für einige Vektorfelder die Drehungen bestimmen, wir betrachten lineare Vektorfelder im $\mathbb{R}^2$ der Form $v(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Im ersten Fall sieht man leicht, dass das Vektorfeld sich genau einmal in mathematisch positiver Richtung dreht, das gleiche Resultat ergibt sich im dritten Fall. Im zweiten Fall ergibt sich beim Umlauf in mathematisch positiver Richtung genau eine Drehung des Vektors, allerdings in mathematisch negativer Weise. Aufgrund der Invarianz der Dreheigenschaften bei Störungen des Vektorfeldes und der Kurve schließt man leicht, dass bei nichtlinearen Vektorfeldern mit **isolierten** Nullstellen der Index immer durch den Index des linearisierten Feldes gegeben ist. Damit überträgt sich das Konzept auf geradlinige Weise auf kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten.

Satz 8.1.4 *Die Summe aller lokalen Indizes eines Vektorfeldes auf einer kompakten* 2*-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist unabhängig vom Vektorfeld.*

Beweis. Siehe ein Buch über Differentialtopologie, die Idee eines Beweises findet sich auch bei Arnold [3]. □

Definition 8.1.5 *Die im letzten Satz definierte Zahl heißt* Euler Charakteristik *der Mannigfaltigkeit.*

Beispiel 8.1.6 *Die Euler Charakteristik der zweidimensionalen Sphäre ist* 2*, die des zweidimensionalen Torus ist* 0*. Um die zweite Aussage zu begründen gibt man ein Vektorfeld ohne Ruhelage auf dem Torus an (davon gibt es eine große Auswahl). Für die* 2*-Sphäre betrachten wir das* $Nord - Süd$*-Feld, das jeweils am Nordpol und am Südpol einen kritischen Punkt (einen stabilen und einen instabilen) hat, alle Längengrade sind verbindende Orbits. Die Linearisierungen am Nord- und Südpol sind* $\pm\mathbb{1}$ *und die lokalen Indizes jeweils* 1*.*

8.2 Eine Anwendung auf die Eulersche Polyederformel

Ein Polyeder im $\mathbb{R}^3$ ist ein Körper, der von endlich vielen ebenen Flächen (und deren Schnittgeraden und einzelnen Punkten) begrenzt wird. Dabei sei F die Anzahl der Flächenstücke, K die Anzahl der Kanten und P die Anzahl der Eckpunkte. Euler entdeckte die grundlegende Formel für konvexe Polyeder

$$F - K + P = 2.$$

Wir wollen diese nun beweisen.

Satz 8.2.1 *Für ein konvexes Polyeder gilt*

$$F - K + P = 2.$$

Beweis. Durch Anwendung einer endlichen Anzahl stetiger, stückweise affine linearer Abbildungen läßt sich erreichen, dass das konvexe Polyeder auf ein Polyeder Q mit gleicher Ecken-, Kanten- und Flächenanzahl abgebildet werden, so dass alle Eckpunkte auf einer Kugel mit Radius 1 liegen. Wir betrachten nun die Funktion

$$h : S^2 \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{dist}(x, Q)^2.$$

Diese Funktion hat für jede Ecke ein Minimum, für jede Kante einen kritischen Punkt mit indefiniter Linearisierung und für jeden Flächenmittelpunkt ein Maximum. Es sei $v(x)$ das zugehörige Gradientenfeld. Dann ist der lokale Index aufgrund der oben gemachten Beobachtungen für jedes Maximum und jedes Minimum jeweils 1, für die indefiniten kritischen Punkte -1. Wie oben gesehen ist die Euler Charakteristik der 2-Sphäre 2 und damit ergibt sich die gesuchte Formel. □

8.3 Aufgaben

Aufgabe 8.3.1 Man verifiziere die Eulersche Polyederformel für die Platonischen Körper, d.h. für Tetraeder, Oktaeder, Quader, Ikosaeder und Dodekaeder.

Aufgabe 8.3.2 Was ist der Index der Singularität von $\dot{z} = \bar{z}^2$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8.3.3 Was ist die Euler Charakteristik des zweidimensionalen projektiven Raumes (d.h. der Mannigfaltigkeit, die man erhält wenn man auf einem Kreis die jeweils gegenüberliegenden Randpunkte identifiziert, d.h. wenn eine Äquivalenzrelation einführt, so dass die Äquivalenzklassen von Nichtrandpunkten jeweils aus dem Punkt selbst bestehen und bei Randpunkten, der Punkt und der gebenüberliegende Punkt in einer Klasse liegen).

Aufgabe 8.3.4 Was ist die Euler Charakteristik der Kleinschen Flasche (d.h. der Mannigfaltigkeit, die man erhält wenn man auf einem Zylinder die jeweils gegenüberliegenden Randpunkte identifiziert, d.h. wenn eine Äquivalenzrelation einführt, so dass die Äquivalenzklassen von Nichtrandpunkten jeweils aus dem Punkt selbst bestehen und bei Randpunkten, der Punkt und der gebenüberliegende Punkt in einer Klasse liegen).