Jede Norm auf einem Raum erzeugt mittels der eben definierten Metrik eine Topologie. Damit wird die folgende Definition nahegelegt.

Definition 2.1.1.3. *Ist X ein linearer Raum und sind $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ zwei Normen auf X, welche die gleiche Topologie erzeugen, so nennen wir die beiden Normen* äquivalent.

Für die Äquivalenz zweier Normen gibt es ein einfaches Kriterium, das wir im folgenden Satz angeben.

Satz 2.1.1.4. *Zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ auf dem linearen Raum X sind genau dann äquivalent, wenn es reelle Zahlen $0 < m \leq M < \infty$ gibt, so dass alle $x \in X$ die folgende Ungleichung erfüllen:*

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1. \tag{2.1.1.1}$$

Beweis. Ist die Ungleichung (2.1.1.1) erfüllt so gilt offenbar auch die Ungleichung

$$\frac{1}{M}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \frac{1}{m}\|x\|_2.$$

Ist nun U in der Topologie zu $\|\cdot\|_2$ offen, so gibt es zu jedem $x \in U$ eine Normkugel $B_\varepsilon^{\|\cdot\|_2}(x) \subset U$. Ist $\delta < \frac{\varepsilon}{M}$ so ist

$$B_\delta^{\|\cdot\|_1}(x) \subset B_\varepsilon^{\|\cdot\|_2}(x) \subset U$$

und U ist in der Topologie zu $\|\cdot\|_1$ offen. Damit ist $\mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{T}_1$. Die umgekehrte Inklusion folgt auf gleiche Weise.

Sind nun die Topologien gleich, so muss jede Kugel $B_\varepsilon^{\|\cdot\|_1}$ auch eine Kugel $B_\delta^{\|\cdot\|_2}$ enthalten (und umgekehrt). Daraus leitet man leicht die entsprechenden Abschätzungen her. □

2.1.2 Banachräume

Definition 2.1.2.1. *Ein vollständiger normierter Raum wird als* Banachraum[1] *bezeichnet.*

Beispiel 2.1.2.2. 1. Der vollständige, metrische, lineare Raum (ℓ^1, d_{ℓ^1}) wird mit

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1} = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$$

zum Banachraum.

[1] Stefan Banach (30.3.1892–31.8.1945) polnischer Mathematiker. Er war der Begründer der Theorie linearer, normierter Räume und ihren linearen Abbildungen. Seine Arbeiten sind die Grundlage der modernen Funktionalanalysis. Er und seine Schüler zeigten viele Anwendungen der Funktionalanalysis auf.

2. Der vollständige, metrische, lineare Raum $(\ell^\infty, d_{\ell^\infty})$ wird mit

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^\infty} = \sup\left\{|x_j| \;\middle|\; j \in \mathbb{N}\right\}$$

zum Banachraum.

3. Als nächstes Beispiel betrachten wir den Raum

$$bv = \left\{\mathbf{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \;\middle|\; |x_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| < \infty\right\}$$

mit der Norm

$$\|\mathbf{x}\|_{bv} = |x_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n|.$$

Wir stellen fest: bv ist ein Banachraum.

Punktweise Addition und Multiplikation mit Skalaren macht den Raum zum linearen Raum, die Eigenschaften einer Norm sind leicht nachzuprüfen, bleibt als einziges, die Vollständigkeit zu beweisen. Dazu ordnen wir einer Folge

$$\mathbf{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in bv$$

die Folge

$$\xi = \{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \text{ mit } \xi_1 = x_1 \text{ und } \xi_j = x_j - x_{j-1}, j > 1$$

zu. Die Folge ξ ist in ℓ^1. Damit kann man die Vollständigkeit von bv aus der von ℓ^1 schließen.

Definition 2.1.2.3. *Es seien $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ zwei normierte Räume, eine lineare Abbildung $L : V \to W$ hat eine* obere Schranke*, falls*

$$M = \sup_{v\in V, v\neq 0} \frac{\|Lv\|_W}{\|v\|_V} < \infty$$

ist. M wird als obere Schranke *von L bezeichnet. L heißt* beschränkt*, falls es ein $K > 0$ gibt, so dass für alle $v \in V$ gilt:*

$$\|Lv\|_W \leq K\|v\|_V.$$

Lemma 2.1.2.4. *Eine lineare Abbildung zwischen zwei normierten Räumen ist genau beschränkt, wenn sie eine obere Schranke hat.*

Beweis. Trivial! □

Lemma 2.1.2.5. *Sind $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ zwei normierte Räume, so ist eine lineare Abbildung $L : V \to W$ genau dann stetig, wenn sie beschränkt ist.*

Abbildung 10: Stefan Banach (30.3.1892–31.8.1945)

Beweis. Sei L stetig, $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit

$$d(v,0) < \delta \text{ impliziert } d(Lv, L0) = d(Lv, 0) < \varepsilon.$$

Ist $v \neq 0$ nun beliebig in V, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\|\lambda v\|_V = \frac{\delta}{2},$$

also einerseits

$$\|L(\lambda v)\|_W < \varepsilon,$$

und andererseits

$$\|v\| = \frac{\delta}{2|\lambda|}$$

oder auch

$$\frac{1}{|\lambda|} = \frac{2}{\delta}\|v\|.$$

Die linke Seite des ersten Ausdrucks wird zu

$$|\lambda|\|Lv\|_W \leq \varepsilon.$$

Also erhalten wir

$$\|Lv\|_W < \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \frac{2\varepsilon}{\delta}\|v\|_V.$$

Also folgt aus der Stetigkeit (im Ursprung) die Beschränktheit.

Wir kommen zur Gegenrichtung. Wir zeigen zunächst die Stetigkeit im Nullpunkt. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, $M = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{\|Lv\|_W}{\|v\|_V}$ und

$$\delta = \frac{\varepsilon}{M}.$$

Ist nun

$$0 < d(v,0) = \|v\|_V < \delta,$$

so folgt

$$\|Lv\|_W \leq M\|v\| < M\delta = \varepsilon.$$

Dies zeigt die Stetigkeit bei 0. Stetigkeit an einem anderen Punkt erhält man einfach. Sei $Lv_0 = w_0$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass es eine Umgebung $U_\delta(v_0)$ gibt, so dass $LU_\delta(v_0) \subset U_\varepsilon(w_0)$. Die Addition in W ist stetig, also gibt es eine Umgebung $U_\tau(0)$, so dass $w_0 + U_\tau(0) \subset U_\varepsilon(w_0)$ ist. Stetigkeit von L bei 0 gibt uns eine Umgebung $U_\sigma(0) \subset V$ mit $LU_\sigma(0) \subset U_\tau(0)$. Wiederum die Stetigkeit der Addition in V gewährleistet die Existenz von $U_\delta(v_0)$ mit $U_\delta(v_0) - v_0 \subset U_\sigma(0)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} LU_\delta(v_0) &= L(v_0 - v_0 + U_\delta(v_0)) \\ &= Lv_0 + L(-v_0 + U_\delta(v_0)) \\ &\subset w_0 + L(U_\sigma(0)) \\ &\subset w_0 + U_\tau(0) \\ &\subset U_\varepsilon(w_0). \end{aligned}$$ □

Beispiel 2.1.2.6. Wir betrachten erneut das zweite Beispiel in 1.2.1.2. Der dort eingeführte Raum ist normiert, wir schreiben

$$\|f\|_\infty = \max\left\{|f(x)| \;\Big|\; x \in \Omega\right\}$$

für $f \in C(\Omega; \mathbb{R})$.

Dies definiert eine Norm, die den Raum zum vollständigen normierten Raum macht. Ist $[a,b] = \Omega \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so ist

$$L : C(\Omega; \mathbb{R}) \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_\Omega f(s)ds$$

eine stetige lineare Abbildung, warum?

$$|L(f)| = \left| \int_\Omega f(s)ds \right| \leq (b-a)\|f\|_\infty.$$

Also ist L beschränkt mit $K = b - a$. Eine andere stetige lineare Abbildung auf $C([a,b]; \mathbb{R})$ ist die Abbildung

$$ev_{x_0} : f \mapsto f(x_0), \text{ für } x_0 \in [a,b].$$

Die Linearität ist leicht einzusehen. Da $|f(x_0)| \leq \|f\|_\infty$ hat man eine endliche Schranke ≤ 1. Wir werden bald sehen, dass es eine wichtige Aufgabe darstellt, die Existenz hinreichend vieler stetiger linearer Abbildungen zu zeigen.

Außerdem wollen wir uns fragen, ob es möglich ist, alle linearen Funktionale auf einem normierten Raum zu charakterisieren.

Satz 2.1.2.7. *Sind V, W normierte lineare Räume, so macht*

$$\|L\|_{\mathcal{L}(V;W)} = \sup\left\{\frac{\|Lv\|_W}{\|v\|_V} \,\middle|\, v \neq 0\right\}$$

die Menge

$$\mathcal{L}(V;W) = \{L : V \to W \mid L \textit{ ist stetig und linear}\}$$

zum normierten linearen Raum. Ist W vollständig, so ist auch dieser Raum vollständig. Die Norm $\|L\|_{\mathcal{L}(V;W)}$ wird auch als Operatornorm *bezeichnet.*

Aufgabe 2.1.2.8. Man zeige, dass

$$\|L\|_{\mathcal{L}(V;W)} = \sup_{v\in V, \|v\|=1}\left\{\|Lv\|_W \,\middle|\, \|v\|_V = 1\right\}.$$

Beweis von Satz 2.1.2.7. Offenkundig ist dieser Raum ein linearer Raum. Wir müssen die Eigenschaften einer Norm nachprüfen. Dies ist sehr einfach. Damit haben wir einen normierten linearen Raum. Sei nun $\{L_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in diesem Raum, für $v \in V$ setzen wir $w_j = L_j v$. Wir wollen zeigen, dass $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in W ist. Ist $v = 0$, so ist nichts zu zeigen, wir nehmen also an, $v \neq 0$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|L_m - L_n\|_{\mathcal{L}(V;W)} < \varepsilon$ für $m, n > N$. Dann ist

$$\|w_m - w_n\|_W = \|L_m v - L_n v\|_W = \|(L_m - L_n)v\|_W \leq \|L_m - L_n\|_{\mathcal{L}(V;W)}\|v\|_V \leq \varepsilon\|v\|_V.$$

Also existiert, falls W vollständig ist, punktweise der Grenzwert $Lv = \lim_{j\to\infty} L_j v$. Dies definiert eine lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} L(v+w) &= \lim_{j\to\infty} L_j(v+w) \\ &= \lim_{j\to\infty} (L_j v + L_j w) \\ &= \lim_{j\to\infty} L_j v + \lim_{j\to\infty} L_j w \\ &= Lv + Lw. \end{aligned}$$

Und ein entsprechendes Argument zeigt $L(\lambda v) = \lambda L v$.
Um die restlichen Schritte zu beweisen, überlegen wir zunächst

$$\left|\|L_j\|_{\mathcal{L}(V;W)} - \|L_k\|_{\mathcal{L}(V;W)}\right| \leq \|L_j - L_k\|_{\mathcal{L}(V;W)}$$

und daraus folgt, dass die Folge $\{\|L_j\|_{\mathcal{L}(V;W)}\}_j$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist. Also folgt, dass diese Folge gegen eine Zahl $M > 0$ konvergiert. Nun müssen wir zeigen, dass L stetig, d. h. beschränkt ist. Sei $\varepsilon > 0$. Für $\|v\| = 1$ und hinreichend große $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \|Lv\|_W &= \|Lv - L_j v + L_j v\|_W \\ &\leq \|Lv - L_j v\|_W + \|L_j v\|_W \\ &\leq \varepsilon + \|L_j\|_{\mathcal{L}(V;W)} \end{aligned}$$

Dieser letzte Ausdruck konvergiert für $j \to \infty$ gegen $M+\varepsilon$ und wir haben gezeigt, dass für $\|v\| = 1$ gilt

$$\|Lv\|_W \leq M.$$

Also ist L beschränkt und damit stetig.

Es bleibt zu zeigen $L_j \to L$ in der Topologie, die von der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(V;W)}$ induziert wird. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $j, k > N$ impliziert $\|L_j - L_k\|_{\mathcal{L}(V;W)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Nun sei $v \in V$, $\|v\|_V \leq 1$ und $N < k(v) \in \mathbb{N}$ mit

$$\|Lv - L_{k(v)}v\|_W \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für $v \in V$ betrachten wir

$$\begin{aligned} \|Lv - L_j v\|_W &\leq \|Lv - L_{k(v)}v\|_W + \|L_{k(v)}v - L_j v\|_W \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist für $j > N$

$$\|L - L_j\|_{\mathcal{L}(V;W)} = \sup_{\|v\|_V = 1} \|Lv - L_j v\|_W \leq \varepsilon. \qquad \square$$

Beispiel 2.1.2.9. Auf ℓ^1 betrachten wir die *Shiftoperatoren*

$$sh^+ : \ell^1 \to \ell^1 : \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

mit $\xi_1 = 0$ und $\xi_n = x_{n-1}$ für $n > 1$ und

$$sh^- : \ell^1 \to \ell^1 : \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

mit $\xi_n = x_{n+1}$ für $n \geq 1$. Die Operatoren $sh^\pm$ sind beschränkt mit Schranke 1. sh^+ ist injektiv, aber nicht surjektiv, sh^- ist surjektiv, aber nicht injektiv. Der linearen Algebra folgend, wollen wir schon mal die Frage stellen ob man die Gleichungen

$$sh^\pm \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

für (gewisse) $\lambda \in \mathbb{K}$ lösen kann? Wir bemerken, dass man auf genau gleiche Weise den Shiftoperator für beliebige (auch noch zu definierende) Folgenräume definieren kann.

Bemerkung 2.1.2.10. Ein Spezialfall des Raumes $\mathcal{L}(V;W)$ ergibt sich im Falle $V = W$. Wir schreiben dann nur $\mathcal{L}(V)$.

Wir sammeln noch ein paar algebraische Eigenschaften der Räume $\mathcal{L}(V;W)$.

Satz 2.1.2.11. *Es gilt:*

1. *Ist $S \in \mathcal{L}(V;W), T \in \mathcal{L}(W,Z)$, so ist $TS \in \mathcal{L}(V,Z)$ und es gilt*
$$\|TS\|_{\mathcal{L}(V,Z)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(W,Z)}\|S\|_{\mathcal{L}(V;W)}.$$
2. *Ist V normiert und vollständig, so ist $\mathcal{L}(V)$ eine* Banachalgebra[2].

Beweis.
$$\begin{aligned}
\|TS\|_{\mathcal{L}(V,Z)} &= \sup_{v\in V, v\neq 0} \frac{\|TSv\|_Z}{\|v\|_V} \\
&= \sup_{v\in V, v\neq 0} \frac{\|TSv\|_Z}{\|Sv\|_W}\frac{\|Sv\|_W}{\|v\|_V} \\
&\leq \sup_{v\in V, v\neq 0} \frac{\|TSv\|_Z}{\|Sv\|_W} \sup_{v\in V, v\neq 0} \frac{\|Sv\|_W}{\|v\|_V} \\
&\leq \sup_{w\in W, w\neq 0} \frac{\|Tw\|_Z}{\|w\|_W} \sup_{v\in V, v\neq 0} \frac{\|Sv\|_W}{\|v\|_V} \\
&= \|T\|_{\mathcal{L}(W,Z)}\|S\|_{\mathcal{L}(V;W)}.
\end{aligned}$$
□

Definition 2.1.2.12.
1. *Eine stetige lineare Abbildung mit Bild im Skalarenkörper wird als* lineares Funktional *bezeichnet.*
2. *Die Menge aller linearen Funktionale auf einem normierten Raum X bildet den Banachraum X', dieser wird als* Dualraum *von X bezeichnet.*

2.2 Hahn-Banach-Sätze

Wir hatten bereits Beispiele von stetigen linearen Abbildungen, auch von solchen mit Bild im Skalarenkörper, gesehen. Es wird sich herausstellen, dass gerade diese speziellen linearen Abbildungen eine große Rolle spielen. Insbesondere wird es wichtig sein, dass „genügend viele“ solcher Abbildungen existieren, also dass der Dualraum hinreichend viele Elemente enthält. Die Voraussetzungen dafür schafft der Satz von Hahn[3]-Banach. Neben der Frage der Existenz von stetigen

[2] Eine Banachalgebra $\mathcal{B}$ ist ein Banachraum mit einer zusätzlichen Verknüpfung, die eine Ringstruktur definiert, so dass für alle Skalare $x \in \mathbb{K}$, $T, S \in \mathcal{B}$ gilt $x(TS) = (xT)S = T(xS)$ und $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$.

[3] Hans Hahn (27.9.1879–24.7.1934) studierte in Wien und Göttingen. Er lehrte zunächst in Bonn, später in Wien. Er führte unabhängig von Banach normierte lineare Räume ein und bewies vor Banach den wichtigen Fortsetzungssatz für lineare Funktionale, um den es in diesem Abschnitt geht.