5.1.4 Selbstadjungierte Operatoren

Wegen der Isomorphie zwischen H und H' gibt es für Abbildungen zwischen Hilberträumen H_1 und H_2 eine spezielle Darstellung für die duale Abbildung.

Definition 5.1.4.1. *Es seien H_1, H_2 zwei Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$. Die Abbildung $T^* \in \mathcal{L}(H_2; H_1)$ heißt* adjungiert *zu T, falls für alle $x \in H_1$, $y \in H_2$ gilt*

$$\langle Tx, y\rangle_{H_2} = \langle x, T^* y\rangle_{H_1}.$$

Die erste Beobachtung ist im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 5.1.4.2. *Die adjungierte Abbildung existiert und ist eindeutig.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt einfach aus der Beobachtung $z \perp x$ für alle x gilt, so ist $z = 0$. Die Existenz ist ein wenig komplizierter: Für festes $y \in H_2$ ist

$$x \mapsto \langle Tx, y\rangle_{H_2}$$

stetig und linear. Also gibt es ein $y^* \in H_1$ mit

$$\langle Tx, y\rangle_{H_2} = \langle x, y^*\rangle_{H_1}.$$

Die Zuordnung $y \mapsto y^*$ ist linear und beschränkt. Also hat man die Aussage. □

Definition 5.1.4.3. *Es sei H ein Hilbertraum. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ heißt* selbstadjungiert, *falls $T^* = T$.*

Satz 5.1.4.4. *Ist $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert, so ist*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{x \in H, \|x\|_H = 1} |\langle Tx, x\rangle_H|.$$

Beweis. Für $\|x\|_H = 1$ hat man

$$|\langle Tx, x\rangle_H| \leq \|Tx\|_H \|x\|_H = \|Tx\|_H \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H)} \|x\|_H = \|T\|_{\mathcal{L}(H)}$$

und daraus folgt $\sup_{x \in H, \|x\|_H = 1} |\langle Tx, x\rangle_H| \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H)}$.

Für die Umkehrung setzen wir $\alpha = \sup_{x \in H, \|x\|_H = 1} |\langle Tx, x\rangle_H|$ und wählen ein $z \in H$ mit $Tz \neq 0$. Sei

$$\lambda = \sqrt{\frac{\|Tz\|_H}{\|z\|_H}},$$

und setze

$$u = \frac{1}{\lambda} Tz.$$

Dann ist (unter Verwendung der Parallelogrammgleichung)

$$\begin{aligned}
\|Tz\|_H^2 &= \langle T(\lambda z), u\rangle_H \\
&= \frac{1}{4}\left(\langle T(\lambda z+u), \lambda z+u\rangle_H - \langle T(\lambda z-u), \lambda z-u\rangle_H\right) \\
&\leq \frac{1}{4}\alpha\left(\|\lambda z+u\|_H^2 + \|\lambda z-u\|_H^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\alpha\left(\|\lambda z\|_H^2 + \|u\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\alpha\left(\lambda^2\|z\|_H^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|Tz\|_H^2\right) \\
&= \alpha\|z\|_H\|Tz\|_H.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 5.1.4.5. *Eigenwerte selbstadjungierter Operatoren sind reell und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.*

Beweis. Ist

$$Tx = \lambda x,\ \ x \neq 0$$

so ist

$$\langle Tx, x\rangle_H = \lambda\|x\|_H^2,$$

also λ reell. Sind x_1, x_2 Eigenvektoren zu λ_1, λ_2, so ist

$$\lambda_1\langle x_1, x_2\rangle_H = \langle Ax_1, x_2\rangle_H = \langle x_1, Ax_2\rangle_H = \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle_H.$$

Also $\langle x_1, x_2\rangle_H = 0$. □

Wie schon früher bezeichnen wir mit $E_\lambda = \ker(T - \lambda\mathbb{1}_H)$ und entsprechend $R_\lambda = \mathrm{BILD}(T - \lambda\mathbb{1}_H)$. Mit dieser Bezeichnung gilt für einen selbstadjungierten Operator T das folgende Lemma.

Lemma 5.1.4.6.

$$H = E_\lambda \oplus \bar{R}_\lambda.$$

Beweis. Zunächst überlegen wir uns, dass $E_\lambda \perp \bar{R}_\lambda$. Ist $x \in E_\lambda,\ y \in R_\lambda$, also $y = (T - \lambda\mathbb{1}_H)z$, so hat man

$$\langle x, y\rangle_H = \langle x, (T - \lambda\mathbb{1}_H)z\rangle_H = \langle (T - \bar{\lambda}\mathbb{1}_H)x, z\rangle_H = 0,$$

denn für nichtreelles λ ist $E_\lambda = E_{\bar{\lambda}} = \{0\}$ und für reelles λ ist offenkundig $E_\lambda = E_{\bar{\lambda}}$. Durch Approximation beweist man, $E_\lambda \perp \bar{R}_\lambda$. Zu zeigen bleibt $E_\lambda + \bar{R}_\lambda = H$. Angenommen $x \perp E_\lambda + \bar{R}_\lambda$. Dann ist für $z \in H$

$$\langle x, (T - \lambda\mathbb{1}_H)z\rangle_H = 0.$$

Also hat man

$$\langle (T - \bar{\lambda}\mathbb{1}_H)x, z\rangle_H = 0$$

Da z beliebig war folgt nun $(T - \bar{\lambda}\mathbb{1}_H)x = 0$. Dann ist $x \in E_{\bar{\lambda}}$. Dann ist $H = E_{\bar{\lambda}} + \bar{R}_\lambda$. Aufgrund der obigen Überlegung ist dann auch $H = E_\lambda \oplus \bar{R}_\lambda$. □

Korollar 5.1.4.7. *Ist $E_\lambda = \{0\}$, so ist $\bar{R}_\lambda = H$ und $\Sigma_T^R = \emptyset$.*

Lemma 5.1.4.8. *Gilt für ein $\lambda \in \mathbb{C}$, $c > 0$ und alle $x \in H$*

$$\|(T - \lambda\mathbb{1}_H)x\|_H \geq c\|x\|_H,$$

so ist $\lambda \in P_T$.

Beweis. Offenkundig impliziert die Voraussetzung $E_\lambda = \{0\}$ und damit $\bar{R}_\lambda = H$. Die vorausgesetzte Ungleichung besagt auch, dass $(T_\lambda - \mathbb{1}_H)$ offen ist, also ist der Operator surjektiv. □

Korollar 5.1.4.9. *$\lambda \in \mathbb{C}$ ist genau dann in Σ_T falls es eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit*

$$\|x_n\|_H = 1 \text{ und } \lim_{n\to\infty} \|Tx_n - \lambda x_n\|_H = 0.$$

Satz 5.1.4.10. *Ist T selbstadjungiert, so ist $\Sigma_T \subset \mathbb{R}$.*

Beweis. Angenommen $\lambda = \mu + i\nu$. Angenommen $y = (T - \lambda\mathbb{1}_H)x$, dann ist

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle_H &= \langle Tx, x\rangle_H - \bar{\lambda}\langle x, x\rangle_H \\ \langle y, x\rangle_H &= \overline{\langle x, y\rangle_H} \\ &= \langle Tx, x\rangle_H - \lambda\langle x, x\rangle_H \end{aligned}$$

und

$$\langle x, y\rangle_H - \langle y, x\rangle_H = 2\nu i\|x\|_H^2.$$

Also folgt

$$2|\nu|\|x\|_H^2 \leq |\langle x, y\rangle_H| + |\langle y, x\rangle_H| = 2|\langle x, y\rangle_H| \leq 2\|x\|_H\|y\|_H.$$

Wir schließen

$$\nu\|x\|_H \leq \|y\|_H = \|(T - \lambda)x\|_H$$

und mit Lemma 5.1.4.8 ist $\lambda \in P_T$. □

Definition 5.1.4.11. *Sei H ein Hilbertraum, T selbstadjungiert, so nennen wir*

$$M = \sup_{x\in H, \|x\|_H=1} \langle Tx, x\rangle_H$$

die obere Schranke *und*

$$m = \inf_{x\in H, \|x\|_H=1} \langle Tx, x\rangle_H$$

die untere Schranke *von T.*