Kapitel 2

Räume der Funktionalanalysis

In diesem Kapitel widmen wir uns der Betrachtung einer Reihe von Räumen, die aber nicht nur als Sammlung von Beispielen für die bisherige Theorie gelten sollen, sondern sie sind auch für sich wichtig. Die Entwicklung der Mathematik ist über weite Strecken geprägt vom Wunsch Gleichungen zu lösen. Integral- und Differentialgleichungen können als Gleichungen in solchen Räumen interpretiert werden. Natürlich führen neue Aufgabenstellungen eventuell auf Formulierungen in neuen Räumen und daher ist es wichtig, Methoden und Beispiele von Räumen zu kennen.

Inhaltsangabe

2.1 Folgenräume

2.1.1 Konvergente Folgen

Wir betrachten in diesem Abschnitt Unterräume des Raumes beschränkter Folgen.

Definition 2.1.1.1
Es sei ℓ^∞ wie zuvor die Menge aller beschränkten Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$, mit c bezeichnen wir den Unterraum der konvergenten Folgen in Zeichen

$$c = \left\{ \mathbf{x} \in \ell^\infty \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} x_n \ \textit{ existiert} \right\}.$$

Wir definieren für $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\|\mathbf{x}\|_c = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \|\mathbf{x}\|_{\ell^\infty}.$$

Satz 2.1.1.2
$(c, \|\cdot\|_c)$ ist ein normierter linearer Raum. Der Raum ist bezüglich der induzierten Metrik vollständig.

Beweis. Da $c \subset \ell^\infty$ reicht es festzustellen, dass die algebraischen Operationen nicht aus c herausführen, das sind bekannte Sätze der Analysis. Damit ist $(c, \|\cdot\|_c)$ ein normierter linearer Raum. Die Vollständigkeit folgt, wenn wir zeigen, dass c ein abgeschlossener Unterraum ist. Also sei $\{\mathbf{x}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in c mit Grenzwert $\mathbf{x} \in \ell^\infty$. Zu zeigen ist, $\mathbf{x} \in c$.

Wäre $\mathbf{x} \notin c$, so hätte die Folge, da beschränkt mindestens zwei verschiedene Häufungspunkte a, b. Sei $\varepsilon < \frac{|b-a|}{2}$. Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ impliziert

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^n\|_c < \frac{\varepsilon}{5}$$

und $j, k > N$ impliziert

$$|x_j^n - x_k^n| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Wählt man nun $k, m > N$ mit

$$|x_k - a| < \frac{\varepsilon}{5} \text{ und } |x_m - b| < \frac{\varepsilon}{5},$$

so erhält mit

$$\begin{aligned} |a-b| &\leq |a - x_k + x_k - x_m + x_m - b| \\ &\leq |a - x_k| + |x_k - x_k^n|_+ \|x_k^n - x_m^n\|_c + |x_m^n - x_m| + |x_m - b| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Definition 2.1.1.3
Der Raum c_0 ist der Unterraum von c aller gegen 0 konvergenten Folgen.

Satz 2.1.1.4
c_0 ist ein abgeschlossener Unterraum von c.

Beweis. Offenkundig. □

Definition 2.1.1.5
Wir erinnern an die Definition des Raumes bv in 1.2.2.2.

Aufgabe 2.1.1.6
Man zeige: $bv \subset c$.

Aufgabe 2.1.1.7
Kann man für $\mathbf{x} \in bv$ die Werte $\|\mathbf{x}\|_{bv}$, $\|\|\mathbf{x}\|_c$ vergleichen?

Aufgabe 2.1.1.8

1. *Ist $x \mapsto \lim_{n\to\infty} |x_n|$ eine Norm auf c.*
2. *Ist $x \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n$ ein Element von c'.*

2.1.2 Die Räume ℓ^p

In diesem Abschnitt wollen wir u.a. einen wichtigen Satz beweisen, die Höldersche[1] Ungleichung für Folgenräume. Entsprechend der Bezeichnung aus Beispiel 1.1.5.6 definieren wir nun die Räume ℓ^p.

Definition 2.1.2.1
Es sei

$$\ell^p = \left\{ \mathbf{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

Wir setzen für $\mathbf{x} \in \ell^p$

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Hilfssatz 2.1.2.2
Für $p, q \in [1, \infty)$ *mit*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

und $a, b \geq 0$ *gilt*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Beweis. Wir betrachten für $x \in (0, \infty)$ die Funktion

$$g(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{1}{qx^q}.$$

Dann ist

$$g'(x) = x^{p-1} - x^{-q-1}.$$

Damit ist die Funktion monoton auf den Intervallen $(0, 1)$ und $(1, \infty)$. Die einzige Nullstelle der Ableitung liegt bei $x = 1$ und liefert den Funktionswert

[1] Ludwig Otto Hölder (22.12.1859–29.8.1937) arbeitete an den Universitäten Göttingen, Tübingen und Königsberg. Er trug zu vielen Gebieten der Mathematik bei, im Mittelpunkt seines Werkes steht die Algebra mit Untersuchungen spezieller Gruppen. In der Analysis stammen u.a. Arbeiten zur Potentialtheorie und ein Satz über das Verhalten holomorpher Funktionen in der Nähe wesentlicher Singularitäten von ihm. In der Mechanik führte er das Hamiltonsche Prinzip für nichtholonome Zwangsbedingungen ein.

$g(1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Damit ist $g \geq 1$. Setze $x = \frac{a^{\frac{1}{q}}}{b^{\frac{1}{p}}}$. Dies ergibt

$$1 \leq g(x) = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{pb} + \frac{b^{\frac{q}{p}}}{qa}.$$

Multiplikation mit ab ergibt

$$ab \leq \frac{a^{1+\frac{p}{q}}}{p} + \frac{b^{1+\frac{q}{p}}}{q}.$$

Nun kann man die ursprüngliche Gleichung

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ umschreiben zu } q + p = pq$$

oder

$$1 + \frac{p}{q} = p, \text{ bzw. } 1 + \frac{q}{p} = p.$$

Dies ergibt die gewünschte Formel

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

Satz 2.1.2.3 (Hölder)
Ist $1 < p < q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ so gilt für $\mathbf{x} \in \ell^p$ und $\mathbf{y} \in \ell^q$, dass $\{x_n y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ und

$$\|\{x_n y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1} \leq \|\mathbf{x}\|_{\ell^p} \|\mathbf{y}\|_{\ell^q}.$$

Beweis. Setze

$$s_n = \frac{|x_n|^p}{\|\mathbf{x}\|_{\ell^p}^p}, \quad t_n = \frac{|y_n|^q}{\|\mathbf{y}\|_{\ell^q}^q}.$$

Dann ist nach Hilfssatz 2.1.2.2

$$|s_n|^{\frac{1}{p}} |t_n|^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}|s_n| + \frac{1}{q}|t_n|.$$

Damit ist

$$\frac{1}{\|\mathbf{x}\|_{\ell^p}\|\mathbf{y}\|_{\ell^q}} \sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \frac{1}{p\|\mathbf{x}\|_{\ell^p}^p} \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p + \frac{1}{q\|\mathbf{y}\|_{\ell^q}^q} \sum_{j=1}^{n} |y_j|^q \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich in der rechten Ungleichung die Gleichheit und es folgt

$$\|\{x_n y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1} \leq \|\mathbf{x}\|_{\ell^p}\|\mathbf{y}\|_{\ell^q}.$$

□

Satz 2.1.2.4 (Minkowski)
Für $1 \leq p \leq \infty$ und $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell^p$ gilt

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p.$$

Beweis. Um die Dreiecksungleichung in $\mathbb{K}$ ins Spiel zu bringen, betrachten wir

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_{\ell^p}^p &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^p \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^{p-1}(|x_n|+|y_n|) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n||x_n+y_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n||x_n+y_n|^{p-1}.
\end{aligned}$$

Nun ist mit

$$q = \frac{p}{p-1}$$

die Folge

$$\{|x_n+y_n|^{p-1}\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$$

und daher folgt mit der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |x_n||x_n+y_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n||x_n+y_n|^{p-1} &\leq (\|\mathbf{x}\|_{\ell^p} + \|\mathbf{y}\|_{\ell^p})\|\{|x_n+y_n|^{p-1}\}_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^q} \\
&= (\|\mathbf{x}\|_{\ell^p} + \|\mathbf{y}\|_{\ell^p})\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j+y_j|^{(p-1)q}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= (\|\mathbf{x}\|_{\ell^p} + \|\mathbf{y}\|_{\ell^p})\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j+y_j|^{p}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= (\|\mathbf{x}\|_{\ell^p} + \|\mathbf{y}\|_{\ell^p})\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_{\ell^p}^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_{\ell^p}^p \leq (\|\mathbf{x}\|_{\ell^p} + \|\mathbf{y}\|_{\ell^p})\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_{\ell^p}^{p-1}.$$

Daraus ergibt sich das gewünschte Resultat unmittelbar. □

Daraus ergibt sich nun die folgende wichtige Aussage.

Satz 2.1.2.5
Es sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann gilt:

1. *$(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$ ist ein normierter Raum.*
2. *Dieser Raum ist vollständig, also ein Banachraum.*

Beweis. In der ersten Aussage sind alle Teilaussagen bis auf die Dreiecksungleich vollkommen elementar und letztere folgt aus der Minkowskischen Ungleichung Satz 2.1.2.4. Bleibt die zweite Aussage. Wir beginnen mit einer Cauchy-Folge $\{\mathbf{x}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$. Wiederum folgt sofort, dass für alle $j \in \mathbb{N}$ die Folge

$$\{x_j^n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ ist. Damit finden wir die Folge $\mathbf{x} = \{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_j = \lim_{n\to\infty} x_j^n.$$

Zu zeigen ist, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\in \ell^p \\ \mathbf{x} &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}^n. \end{aligned}$$

Für die erste Aussage, kann man die entsprechende Abschätzung aus dem zweiten Beispiel aus 1.1.5.6 fast wörtlich übernehmen. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $n, m > N$ impliziert

$$\|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^m\|_{\ell^p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei $n > N$, so existiert ein $r > n$ mit

$$\left(\sum_{j=r+1}^{\infty} |x_j^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt für alle $m > n$

$$\left(\sum_{j=r+1}^{\infty} |x_j^m|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,$$

denn

$$\left(\sum_{j=r+1}^{\infty} |x_j^m|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(sh^+)^r \mathbf{x}^m\|_{\ell^p} \leq \|(sh^+)^r \mathbf{x}^m - (sh^+)^r \mathbf{x}^n\|_{\ell^p} + \|(sh^+)^r \mathbf{x}^n\|_{\ell^p} < \varepsilon.$$

Da $\mathbf{x} \in \ell^p$, gibt es auch $s \geq r$ mit

$$\left(\sum_{j=s+1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gibt es ein $k \geq s$ mit $m > k$ impliziert

$$\left(\sum_{j=1}^{s} |x_j - x_j^m|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Dann ist für $m > k$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^m\|_{\ell^p} &\leq \left(\sum_{j=1}^{s} |x_j - x_j^m|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=s+1}^{\infty} |x_j - x_j^m|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \varepsilon + \|(sh^+)^s \mathbf{x}\|_{\ell^p} + \|(sh^+)^s \mathbf{x}^m\|_{\ell^p} \\
&< 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

2.1.3 Jamesräume

Wir betrachten Zerlegungen von $\mathbb{N}$

$$\mathfrak{Z} = \left\{ (n_1, n_2, \ldots, n_r) \;\middle|\; n_1 < n_2 < \cdots < n_r,\ r \in \mathbb{N} \right\}$$

und definieren damit den Unterraum $\mathfrak{J} \subset c_0$ als die Menge

$$\mathfrak{J} = \left\{ \mathbf{x} \in c_0 \;\middle|\; \sup \left\{ \left(\sum_{k=1}^{r-1} |x_{n_{k+1}} - x_{n_k}|^2 + |x_{n_r} - x_{n_1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mid Z \in \mathfrak{Z} \right\} < \infty \right\}.$$

Wir setzen für $\mathbf{x} \in J$

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{J}} = \sup \left\{ \left(\sum_{k=1}^{r-1} |x_{n_{k+1}} - x_{n_k}|^2 + |x_{n_r} - x_{n_1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mid Z \in \mathfrak{Z} \right\}.$$

Lemma 2.1.3.1
$(\mathfrak{J}, \|\cdot\|_{\mathfrak{J}})$ *ist ein Banachraum.*

Aufgabe 2.1.3.2

1. *Entscheiden Sie ob die Folge* $\mathbf{x} = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathfrak{J}$ *liegt. Wenn ja, was ist* $\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{J}}$*?*

2. *Geben Sie eine Folge in* c_0 *an, die nicht in* $\mathfrak{J}$ *liegt.*

Alle monotonen Nullfolgen sind in $\mathfrak{J}$*, Was ist* $\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{J}}$ *für ein solches* $\mathbf{x}$*.*

Definition 2.1.3.3
Dieser Raum wird als Jamesraum[2] *bezeichnet.*

Beweis. Wieder sind die meisten Punkte unmittelbar klar, wir wollen kurz auf die Implikation $\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{J}} = 0$ impliziert $\mathbf{x} = 0$, die Dreiecksungleichung ansprechen und danach auf die Vollständigkeit eingehen.

Ist $\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{J}} = 0$, so ist insbesondere

$$\sup \{|x_k - x_s| \mid s > k\} = 0,$$

d.h. die Folge ist konstant und da sie in c_0 liegt, ist $\mathbf{x} = 0$.

Wählen wir einen festen Vektor $Z = (n_1, \ldots, n_r)$ von r natürlichen Zahlen und betrachten

$$|\mathbf{x}|_Z = \left(\sum_{k=1}^{r-1} |x_{n_{k+1}} - x_{n_k}|^2 + |x_{n_r} - x_{n_1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

[2] Robert Clarke James, zeitgenössischer amerikanischer Mathematiker, promovierte am CalTech und lehrte an der Claremont Graduate University

Dann gilt offensichtlich

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|_Z \leq |\mathbf{x}|_Z + |\mathbf{y}|_Z.$$

Der Übergang zum Supremum erhält die Ungleichung und damit ist die Dreiecksungleichung gezeigt.

Wir kommen zur Vollständigkeit von $\mathfrak{Z}$. Wir betrachten also eine Folge $\{\mathbf{x}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Jede dieser Folgen liegt in c_0, daher gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jeder dieser Folgen ein $K(n)$, so dass $j \geq K(n)$ impliziert

$$|x_j^n| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass für

$$n, m > N \text{ gilt } \|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^m\|_{\mathfrak{Z}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Fixiere $n > N$. Dann gilt für $j > i > K(n)$ und für die Wahl

$$Z = \{i, j\}, \ (r = 2)$$

$$2|x_j^m - x_j^n - x_i^m + x_i^n|^2 \leq \|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^n\|_{\mathfrak{Z}}^2.$$

Mit $j \to \infty$ folgt, dass

$$|x_i^n - x_i^m|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Also ist für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Folge $\{x_i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und daher konvergent. Damit existiert eine Grenzfolge

$$\mathbf{x} = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

Fixiert man eine Zerlegung $Z \subset \mathbb{N}$, so gilt

$$|\mathbf{x}|_Z = \lim_{n\to\infty} |\mathbf{x}^n|_Z.$$

Angenommen

$$\left\{ |\mathbf{x}|_Z \;\middle|\; Z \in \mathfrak{Z} \right\} \text{ ist unbeschränkt,}$$

so gibt es ein Z mit

$$|\mathbf{x}|_Z > 1 + \sup\left\{ \|\mathbf{x}^n\|_{\mathfrak{Z}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dann hat man aber mit

$$|\mathbf{x}|_Z = \lim_{n\to\infty} |\mathbf{x}^n|_Z \leq \liminf_{n\to\infty} \|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{J}} \leq \sup\left\{ \|\mathbf{x}^n\|_{\mathfrak{J}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

einen Widerspruch. Also ist $\mathbf{x} \in \mathfrak{J}$. □

Satz 2.1.3.4 (James (1951))
Der Raum $\mathfrak{J}$ ist toplinear isomorph zu $\mathfrak{J}''$, aber $J : \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}''$ ist nicht surjektiv, die Kodimension des Bildes von $\mathfrak{J}$ unter der kanonischen Abbildung J ist 1.

2.1.4 Dualräume

Wir beginnen mit der Angabe der Dualräume zu ℓ^p für $1 \leq p < \infty$. Dies ist Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 2.1.4.1
Für $1 \leq p < \infty$ und $q \in (1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gibt es einen Isomorphismus

$$T : \ell^q \to (\ell^p)' : \mathbf{y} \mapsto \xi$$

mit

$$\xi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

T ist eine Isometrie.

Beweis. Die Abbildung T ist linear und beschränkt, letzteres folgt aus der Hölderschen Ungleichung. Sie ist injektiv, denn ist $\mathbf{y} \in \ell^q$ und

$$T\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x}) = 0$$

für alle $\mathbf{x} \in \ell^p$, so folgt mit $\mathbf{x}^i = \{x_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $x_n = \delta_{i,n}$ auch

$$0 = \xi(\mathbf{x}^i) = y_i.$$

Also ist $\mathbf{y} = 0$.

Bleibt die Surjektivität. Dazu sei $\xi \in (\ell^p)'$, wie zuvor setzen wir

$$y_i = \xi(\mathbf{x}^i)$$

und $\mathbf{y} = \{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Wir müssen zeigen, dass $\mathbf{y} \in \ell^q$ liegt. Setze für $N \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{y}^N = \{y_1, \ldots, y_N, 0, 0, \ldots\}$$

und

$$|\xi_N(\mathbf{x})| = \left|\sum_{i=1}^{N} y_i x_i\right| \leq \|\xi_N\|_{(\ell^p)'}.$$

Natürlich hat man mit der Hölderschen Ungleichung auch eine Abschätzung

$$\sum_{i=1}^{N} |y_i x_i| \leq \|\mathbf{y}^N\|_{\ell^q} \|\mathbf{x}\|_{\ell^p}.$$

Dies reicht nicht um eine gleichmäßige Abschätzung der $\|\mathbf{y}^N\|_{\ell^q}$ zu erreichen, also muss man genauer argumentieren. Dies beweist auch gleich, dass T eine Isometrie ist. Wir definieren eine geeignete Hilfsfolge

$$z_n = \begin{cases} \frac{|y_n|^q}{y_n}, & \text{falls } y_n \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist für festes $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} |z_i|^p &= \sum_{i=1}^{N} |y_i|^{p(q-1)} &&= \sum_{i=1}^{N} |y_i|^q \\
&= \sum_{i=1}^{N} y_i z_i &&= \sum_{i=1}^{N} z_i \xi(\mathbf{x}^i) \\
&= \xi\left(\sum_{i=1}^{N} z_i \mathbf{x}^i\right) &&\leq \|\xi\|_{(\ell^p)'} \left(\sum_{i=1}^{N} |z_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|\xi\|_{(\ell^p)'} \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Division ergibt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|\xi\|_{(\ell^p)'}.$$

Damit ist $\mathbf{y} \in \ell^q$ und

$$\|\mathbf{y}\|_{\ell^q} \leq \|\xi\|_{(\ell^p)'}.$$

Um nachzuprüfen, dass $T\mathbf{y} = \xi$ beachten wir, dass für alle $\mathbf{x}^i$ die Gleichheit

$$T\mathbf{y}(\mathbf{x}^i) = \xi(\mathbf{x}^i)$$

gilt. Damit gilt sie auf dem dichten Unterraum der von den $\mathbf{x}^i$ aufgespannt wird. Da beide Funktionale stetig sind, sind sie damit gleich. $\square$

Eine Modifikation dieses Beweises zeigt den folgenden Satz.

Satz 2.1.4.2
$(c_0)'$ ist isomorph zu ℓ^1, genauer gilt: Es gibt eine Abbildung

$$S : \ell^1 \to (c_0)' : \mathbf{y} \mapsto S\mathbf{y}, \text{ wobei für } \mathbf{x} \in c_0 \text{ gilt } S\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i.$$

Die nachfolgende Konstruktion hilft $(\ell^\infty)'$ zu bestimmen.

Definition 2.1.4.3
Es sei $\tilde{m}(\mathbb{N}; \mathbb{K})$ die Menge der auf $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ definierten additiven Abbildungen

$$\tilde{m}(\mathbb{N}; \mathbb{K}) = \left\{ \mu : \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{K} \;\middle|\; A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \right\}.$$

Wir setzen für $\mu \in \tilde{m}(\mathbb{N}; \mathbb{K})$

$$|\mu|(\mathbb{N}) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{m} |\mu(A_j)| \;\middle|\; \{A_j\}_{j=1}^{m}, \text{ paarweise disjunkt und } \bigcup_{j=1}^{m} A_j = \mathbb{N} \right\}. \tag{2.1.4.4}$$

Dann sei

$$m(\mathbb{N}; \mathbb{K}) = \left\{ \mu \in \tilde{m}(\mathbb{N}; \mathbb{K}) \;\middle|\; |\mu|(\mathbb{N}) < \infty \right\}.$$

Satz 2.1.4.5
Das Paar $\big(m(\mathbb{N}; \mathbb{K}), \|\cdot\|_{m(\mathbb{N};\mathbb{K})}\big)$, wobei $\|\mu\|_{m(\mathbb{N};\mathbb{K})} = |\mu|(\mathbb{N})$, ist ein normierter Raum, sogar ein Banachraum.

Beweis. Durch „mengenweise“ Addition und Multiplikation mit Skalaren wird $m(\mathbb{N}; \mathbb{K})$ zum linearen Raum. Die Eigenschaften einer Norm sind trivialerweise erfüllt. Wir gehen kurz durch die Liste: ist $|\mu|(\mathbb{N}) = 0$ und $A \subset \mathbb{N}$ mit $\mu(A) \neq 0$, so ist $\mathbb{N} = A \cup A^c$. $A \cap A^c = \emptyset$, also

$$|\mu|(\mathbb{N}) \geq |\mu(A)| + |\mu(A^c)| \geq |\mu(A)| > 0.$$

Die Homogenität ist offenkundig. Die Dreiecksungleichung folgt für $\mu_1, \mu_2 \in m(\mathbb{N};\mathbb{K})$: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und seien $C_1, \ldots, C_s$ Teilmengen von $\mathbb{N}$ mit

$$\bigcup_{i=1}^{s} C_i = \mathbb{N}, \quad C_i \cap C_j = \emptyset, \text{ falls } i \neq j$$

$$|\mu_1 + \mu_2|(\mathbb{N}) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{s} |\mu_1(C_i) + \mu_2(C_i)|.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\|\mu_1 + \mu_2\|_{m(\mathbb{N};\mathbb{K})} - \varepsilon &= |\mu_1 + \mu_2|(\mathbb{N}) - \varepsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{s} |\mu_1(C_i) + \mu_2(C_i)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{s} (|\mu_1(C_i)| + |\mu_2(C_i)|) \\
&\leq \sum_{i=1}^{s} |\mu_1(C_i)| + \sum_{i=1}^{s} |\mu_2(C_i)| \\
&\leq \|\mu_1\|_{m(\mathbb{N};\mathbb{K})} + \|\mu_2\|_{m(\mathbb{N};\mathbb{K})}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt nun

$$\|\mu_1 + \mu_2\|_{m(\mathbb{N};\mathbb{K})} \leq \|\mu_1\|_{m(\mathbb{N};\mathbb{K})} + \|\mu_2\|_{m(\mathbb{N};\mathbb{K})}.$$

Bleibt die Vollständigkeit zu untersuchen. Ist $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $m(\mathbb{N};\mathbb{K})$, so ist für jede Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ die reelle Folge

$$\{\mu_n(A)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

eine Cauchyfolge, dies sieht man wie folgt:

$$\|\mu_n - \mu_m\|_{m(\mathbb{N};\mathbb{K})} = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{r} |\mu_n(A_i) - \mu_m(A_i)| \;\middle|\; \bigcup_{i=1}^{r} A_i = \mathbb{N},\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \right\}.$$

Damit ist

$$\|\mu_n - \mu_m\|_{m(\mathbb{N};\mathbb{K})} \geq |\mu_n(A) - \mu_m(A)| + |\mu_n(A^c) - \mu_m(A^c)|$$

und $\{\mu_n(A)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge. Dann definieren wir

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A).$$

Wir müssen noch zeigen $|\mu|(\mathbb{N}) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Zu paarweise disjunkten Mengen A_i, $i = 1, \ldots, r$ mit $\bigcup_{i=1}^r A_i = \mathbb{N}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $m > N$ impliziert, dass

$$|\mu_m(A_i) - \mu(A_i)| < \frac{\varepsilon}{r}.$$

Dann ist für $m > N$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^r |\mu(A_i)| &= \sum_{i=1}^r |\mu(A_i) - \mu_m(A_i) + \mu_m(A_i)| \\
&\le \sum_{i=1}^r |\mu(A_i) - \mu_m(A_i)| + \sum_{i=1}^r |\mu_m(A_i)| \\
&< \sum_{i=1}^r \frac{\varepsilon}{r} + |\mu_m|(\mathbb{N}) \\
&\le \varepsilon + \sup_m \|\mu_m\|_{m(\mathbb{N};\mathbb{K})}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $|\mu|(\mathbb{N}) < \sup_m \|\mu_m\|_{m(\mathbb{N};\mathbb{K})}$ ist. Offensichtlich hat μ alle Eigenschaften einer Funktion in $m(\mathbb{N};\mathbb{K})$. □

Definition 2.1.4.6
Es sei $t \subset \ell^\infty$ die Menge der Treppenfolgen, *d.h.*

$$t = \left\{ \mathbf{x} \in \ell^\infty \;\middle|\; \mathbf{x}(\mathbb{N}) \text{ ist endlich} \right\}.$$

Lemma 2.1.4.7

1. *t liegt bzgl. $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$ dicht in ℓ^∞.*

2. *Für $\mathbf{x} \in t$ und $\mu \in m(\mathbb{N};\mathbb{K})$ setzen wir*

$$\mu(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^r \xi_i \mu(A_i)$$

wobei $A_i = \{j \in \mathbb{N} \mid x_j = \xi_i\}$. Dann ist

$$|\mu(\mathbf{x})| \le \|\mathbf{x}\|_{\ell^\infty} \|\mu\|_{m(\mathbb{N};\mathbb{K})}. \tag{2.1.4.8}$$

Beweis.

1. Sei $\mathbf{x} \in \ell^\infty$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei
$$m \leq x_n < M \ \forall n \in \mathbb{N}.$$
Wähle $n \in \mathbb{N}$, so dass $\varepsilon > \frac{(M-m)}{n}$. Setze
$$y_j = m + i\frac{M-m}{n}, \text{ falls } x_j \in \left[m + i\frac{M-m}{n}, m + (i+1)\frac{M-m}{n}\right).$$
Dann ist
$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\ell^\infty} < \frac{M-m}{n} < \varepsilon.$$

2. Die zweite Behauptung ist unmittelbar klar, denn die Mengen $\{A_i\}_{i=1}^m$ sind paarweise disjunkt, $\bigcup_{i=1}^m A_i = \mathbb{N}$ und daher ist
$$|\mu(\mathbf{x})| \leq \sum_{i=1}^m |\xi_i||\mu(A_i)| \leq \sum_{i=1}^m \|\mathbf{x}\|_{\ell^\infty}|\mu(A_i)| \leq \|\mathbf{x}\|_{\ell^\infty}\|\mu\|_{m(\mathbb{N};\mathbb{K})}.$$

□

Lemma 2.1.4.9
Sei $\mathbf{x} \in \ell^\infty$ und konvergiert eine Folge $\{\mathbf{x}^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset t$ in ℓ^∞ gegen $\mathbf{x}$, so existiert der Grenzwert
$$\lim_{n\to\infty} \mu(\mathbf{x}^n)$$
hängt nicht von der gewählten Folge ab.

Beweis. Zur Existenz des Grenzwertes bemerken wir, dass $\mu(\mathbf{x}^n)$ eine reelle Cauchy-Folge bildet. Dies folgt einerseits aus der Tatsache, dass $\mathbf{x}^n$ eine Cauchy-Folge in ℓ^∞ bildet und der Abschätzung in (2.1.4.8). Für die Eindeutigkeit reicht es zu zeigen: Konvergiert eine Folge $t \ni \mathbf{x}^n \to 0$ für $n \to \infty$, so konvergiert $\mu(\mathbf{x}^n) \to 0$. Dies folgt aber unmittelbar aus Lemma 2.1.4.7, speziell wieder aus der Abschätzung (2.1.4.8). □

Damit ist die folgende Definition gerechtfertigt.

Definition 2.1.4.10
Setze für $\mathbf{x} \in \ell^\infty$
$$\mu(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} \mu(\mathbf{x}^n),$$
wobei $t \ni \mathbf{x}^n \to \mathbf{x}$ in ℓ^∞ konvergiert.

Damit können wir nun folgende Isomorphie zeigen.

Satz 2.1.4.11
Die Abbildung

$$T : m(\mathbb{N}; \mathbb{K}) \to (\ell^\infty)' : T\mu(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x})$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. T ist eine lineare Abbildung. T ist injektiv, denn $T\mu(\mathbf{x}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in \ell^\infty$ bedeutet $\mu(\mathbf{x}) = 0$ für alle $\mathbf{x}$. Wäre $\mu(A) \neq 0$, so ist

$$\mu(\chi_A) = \mu(A) \neq 0.$$

Also folgt $\mu = 0$. T ist surjektiv. Gegeben sei ein $\xi \in (\ell^\infty)'$, setze für $A \subset \mathbb{N}$

$$\mu(A) = \xi(\chi(A)).$$

Dann ist (leicht nachzurechnen)

$$T\mu = \xi.$$

Aus der obigen Ungleichung in Lemma 2.1.4.7 folgt sofort, dass T beschränkt und demnach stetig ist. Aufgrund des Satzes von der offenen Abbildung ist T offen und daher T^{-1} ebenfalls stetig. □

Korollar 2.1.4.12
Die kanonische Abbildung $J : \ell^1 \to (\ell^\infty)'$ ist kein Isomorphismus.

Beweis. Die in Abschnitt 1.3.3 definierte additive, nicht σ-additive Abbildung liegt (offensichtlich ?!) nicht in $J(\ell^1)$. □

2.2 Mengenfunktionen und signierte Maße

2.2.1 Mengenalgebren

Definition 2.2.1.1
Es sei S eine Menge, eine Teilmenge $\mathfrak{R}$ der Potenzmenge heißt Ring, *falls gilt*

$$\begin{aligned}
&\emptyset \in \mathfrak{R} \\
&S_1,\ S_2 \in \mathfrak{R} \quad \Rightarrow S_1 \setminus S_2 \in \mathfrak{R} \\
&S_1,\ S_2 \in \mathfrak{R} \quad \Rightarrow S_1 \cup S_2 \in \mathfrak{R}
\end{aligned}$$

Definition 2.2.1.2
Es sei S eine Menge, eine Teilmenge $\mathfrak{A}$ der Potenzmenge wird als Algebra *bezeichnet, wenn $\mathfrak{A}$ ein Ring ist, und zusätzlich gilt $S \in \mathfrak{A}$*

Aufgabe 2.2.1.3
Man verifiziere die folgenden Aussagen.

1. *Ist $\mathfrak{A}$ eine Algebra auf S, so ist mit X auch $X^c \in \mathfrak{A}$.*
2. *Zu einer Teilmenge $D \subset \mathfrak{P}(S)$ gibt es einen eindeutig bestimmten Ring $\mathfrak{R}$ mit $D \subset \mathfrak{R}$ und jeder Ring der D enthält, enthält auch $\mathfrak{R}$.*

Ringe und Algebren erlauben die Bildung von endlichen Vereinigungen und Schnitten, wie man leicht nachprüft. Verlangt man zusätzlich, dass abzählbare Vereinigungen und Schnitte nicht aus dem Ring, bzw. der Algebra herausführen spricht man von *σ-Ring*, bzw. *σ-Algebra*. Diese spielen in der Maßtheorie eine große Rolle.

Bemerkung 2.2.1.4
Auf $\mathbb{N}$ ist die Menge aller endlichen Teilmengen ein Ring (aber keine Algebra). Die Mengen, die entweder endlich sind, oder endliches Komplement besitzen bilden eine Algebra.

Spezielle Ringe und Algebren entstehen in topologischen Räumen auf natürliche Weise.

Definition 2.2.1.5
Es sei $(S, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, die kleinste Algebra, welche $\mathfrak{T}$ enthält, wird als die Borelalgebra[3] *bezeichnet. Auf gleiche Weise definieren wir* Borelring, *und* Borelsche σ-Algebra *etc.*

Wir erinnern an den Begriff des Maßes.

Definition 2.2.1.6
Es sei S eine Menge mit einer Mengenalgebra $\mathfrak{A}$, eine Funktion

$$\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^{erw} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$$

heißt Maß, *falls gilt*

[3] Émile Félix Edouard Justin Borel(7.1.1871-3.2.1956) war bedeutender französischer Mathematiker, lehrte an der École Normale Superieur und an der Sorbonne und betätigte sich auch als Abgeordneter der Radikalsozialisten in der Politik. Seine mathematischen Leistungen betreffen die Analysis vor allem im Kontext der Maßtheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie.

1. $\mu(A) \geq 0$ *für alle* $A \in \mathfrak{A}$,
2. $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$ *für disjunkte Elemente in* $\mathfrak{A}$, *und*
3. $\mu(\emptyset) = 0$.

2.2.2 Signierte Maße

Wir wollen Räume von Maßen betrachten. Dazu muss man natürlich zulassen, dass Maße auch negative Werte annehmen, wir sprechen von einem signierten Maß. Also beginnen wir mit der folgenden Definition.

Definition 2.2.2.1
Es sei S *eine Menge,* $\mathfrak{A}$ *eine Mengenalgebra auf* S *und*

$$\nu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^{erw}$$

eine Abbildung. ν *wird als* signiertes Maß *bezeichnet, falls es die folgenden Eigenschaften besitzt:*

1. ν *ist additiv, also* $\nu(A_1 \cup A_2) = \nu(A_1) + \nu(A_2)$ *für disjunkte Mengen* $A_{1,2} \in \mathfrak{A}$
2. *es wird höchstens einer der Werte* $\pm\infty$ *angenommen und*
3. $\nu(\emptyset) = 0$.

Ein beschränktes signiertes Maß liegt vor, wenn die Werte $\pm\infty$ *nicht angenommen werden.*

Satz 2.2.2.2
Es sei S *eine Menge,* $\mathfrak{A}$ *eine Mengenalgebra auf* S*. Dann ist*

$$M(S, \mathfrak{A}) = \left\{ \mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \mu \text{ ist beschränktes signiertes Maß auf } S \right\}$$

mit der Norm

$$\|\mu\|_{M(S,\mathfrak{A})} = |\mu|(S)$$

ein Banachraum, wobei die totale Variation $|\mu|$ *des Maßes ähnlich definiert wird wie in Gleichung (2.1.4.4), sei* $A \in \mathfrak{A}$*:*

$$|\mu|(A) = \sup \left\{ |\mu(A_1) - \mu(A_2)| \;\middle|\; A_{1,2} \in \mathfrak{A}, A_1 \cap A_2 = \emptyset, A_1 \cup A_2 = A \right\}.$$

Beweis. Zunächst ist $M(S,\mathfrak{A})$ ein linearer Raum. Wir müssen die Eigenschaften einer Norm nachprüfen. Offensichtlich ist $\|\mu\|_{M(S,\mathfrak{A})} \geq 0$. Um zu zeigen, dass $\|\mu\|_{M(S,\mathfrak{A})} = 0$ impliziert $\mu = 0$, nehmen wir an, wir hätten ein Maß μ und eine Teilmenge $A \subset S$ mit

$$\|\mu\|_{M(S,\mathfrak{A})} = 0 \text{ und } \mu(A) \neq 0.$$

Offensichtlich ist $\|\mu\|_{M(S,\mathfrak{A})} \geq |\mu(S)| \geq 0$. Ist also $\|\mu\|_{M(S,\mathfrak{A})} = 0$ so ist $\mu(S) = 0$. Dann folgt, wegen $S = A \cup A^c$ $\mu(A) = -\mu(A^c)$ und damit

$$\|\mu\|_{M(S,\mathfrak{A})} \geq |\mu(A) - \mu(A^c)| = 2|\mu(A)| > 0.$$

Die Homogenität von $|\mu|(S)$ in μ ist klar, also müssen wir uns überlegen, ob die Dreiecksungleichung erfüllt ist. Sind $\mu_1, \mu_2 \in M(S,\mathfrak{A})$, $\varepsilon > 0$ und A_1, A_2 disjunkte Mengen, $A = A_1 \cup A_2$, so dass $|\mu_1 + \mu_2|(A) - \varepsilon < (\mu_1 + \mu_2)(A_1) - (\mu_1 + \mu_2)(A_2)$. Dann ist

$$\begin{aligned} |\mu_1 + \mu_2|(A) - \varepsilon &< (\mu_1 + \mu_2)(A_1) - (\mu_1 + \mu_2)(A_2) \\ &= \mu_1(A_1) - \mu_1(A_2) + \mu_2(A_1) - \mu_2(A_2) \\ &\leq |\mu_1|(A) + |\mu_2|(A). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Dreiecksungleichung sofort.

Die Vollständigkeit wird gezeigt wie für $m(\mathbb{N};\mathbb{K})$. □

2.3 Funktionenräume

2.3.1 Gleichmäßige Konvergenz

Wir beginnen mit einer beliebigen Menge S, einem Banachraum X über $\mathbb{K}$ und betrachten die Menge

$$B(S;X) = \left\{ f : S \to X \;\middle|\; \sup_{s \in S} \|f(s)\|_X < \infty \right\}.$$

Satz 2.3.1.1

1. *$B(S;X)$ ist ein linearer Raum.*
2. *$\|f\| = \sup_{s\in S} \|f(s)\|_X$ ist eine Norm auf $B(S;X)$.*
3. *$B(S;X)$ ist vollständig, d.h. es ist ein Banachraum.*

Beweis.

1. Die punktweise Addition und skalare Multiplikation machen $B(S, \mathbb{K})$ zum linearen Raum.

2. Die Eigenschaften einer Norm sind offensichtlich.

3. Für die Vollständigkeit betrachtet man eine Cauchyfolge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, überlegt sich, dass diese punktweise konvergent ist. Dies definiert eine punktweise Grenzfunktion f. Diese ist, wie man leicht sieht auch der Grenzwert der Folge.

□

Wir betrachten nun Räume von Treppenfunktionen. Es sei S ein topologischer Raum, $\mathfrak{B}$ die Borelsche Sigmaalgebra über S und X ein Banachraum mit einer entsprechenden Borelschen Sigmaalgebra $\mathfrak{B}_X$. Wir betrachten Funktionen

$$t : S \to X,$$

die $\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_X$ messbar sind (vgl. [22], Kapitel IX).

Definition 2.3.1.2
Eine Funktion $t : S \to X$ heißt Treppenfunktion, *wenn sie $\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_X$ messbar ist und nur endlich viele Werte annimmt. Der Raum der Treppenfunktionen werde mit $T(S; X)$ bezeichnet.*

Lemma 2.3.1.3
Auf $T(S; X)$, wird durch

$$\|t\|_{T(S;X)} = \sup \left\{ |t(s)| \;\middle|\; s \in S \right\}$$

eine Norm definiert.

Beweis. Trivial! □

Definition 2.3.1.4
Der Abschluss von $T(S; X)$ wird mit $R(S; X)$ bezeichnet, die Elemente in $R(S; X)$ werden als Regelfunktionen *(*`engl.`*:* **regulated function***) bezeichnet.*

Lemma 2.3.1.5
Für kompakte Teilmengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$C(\Omega; X) \subset R(\Omega; X) \subset L^1(\Omega; X).$$

Definition 2.3.1.6
Es sei S ein kompakter, topologischer Raum, $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ ein σ-additives Borelmaß mit $\mu(S) = 1$ und X ein Banachraum.

1. *Wir setzen für $t \in T(S; X)$*

$$\int_S t \, d\mu = \sum_{x \in \mathbb{R}} x\mu(t^{-1}(x)).$$

2. *Für $f \in R(S; X)$ setzen wir*

$$\int_S f \, d\mu = \lim_{j \to \infty} \int_S t_j \, d\mu,$$

wobei $t_j \to f$ in $R(S; X)$.

Im folgenden sei $X = \mathbb{R}$, die Aussagen in größerer Allgemeinheit machen etwas mehr Arbeit.

Lemma 2.3.1.7

1. *Das Integral ist für Regelfunktionen wohldefiniert.*
2. *Das Integral hat folgende Eigenschaften:*
   (a) *ist $f \geq 0$, so ist $\int_S f \, d\mu \geq 0$. Ist $\int_S f \, d\mu = 0$, so ist $f = 0$, außerhalb einer Menge vom Maß 0.*
   (b) *Das Integral ist linear.*
   (c) *Es gelten die Lebesgueschen Konvergenzsätze.*
   (d) *Stetige Funktionen sind Regelfunktionen, und*
   (e) *die Einschränkung des Integrales auf stetige Funktionen stimmt mit dem Riemann-Integral überein.*

Beweis.

1. Für den ersten Punkt reicht es zeigen, ist eine Folge $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Regelfunktionen gegeben, die gleichmäßig gegen 0 konvergiert, so konvergiert die Folge der Integrale gegen 0. Dies ist aber aufgrund der Definition des Integrales für Treppenfunktionen eindeutig.

2. (a) Ist $f \geq 0$ und $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen f konvergente Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann gibt es auch eine Folge nichtnegativer Treppenfunktionen $\{|t_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen f konvergiert. Da das Integral über eine nichtnegative Treppenfunktion aufgrund der Definition nicht negativ ist, ist $\int\limits_S f\,d\mu$ Grenzwert einer Folge nicht negativer Zahlen und also nicht negativ.

   Ist das Integral über eine nicht negative Treppenfunktion 0, so ist das Maß der Menge an der Werte ungleich 0 angenommen werden, offensichtlich 0. Der Träger von f ist offensichtlich
$$\operatorname{supp} f = \bigcup \left\{ x \in S \;\middle|\; f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$
   Ist für alle $n \in \mathbb{N}$
$$\mu(\left\{ x \in S \;\middle|\; f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}) = 0$$
   so ist $\mu(\operatorname{supp} f) = 0$, was zu zeigen war. Wir nehmen also an, dass für eine dieser Mengen $\left\{ x \in S \;\middle|\; f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}$ gilt, dass das Maß ungleich 0 ist. Dann ist aber
$$\int\limits_S f\,d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(\left\{ x \in S \;\middle|\; f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}) > 0.$$

   (b) Die Linearität ist für Treppenfunktionen offensichtlich gegeben, sie überträgt sich einfach auf den Grenzwert.

   (c) siehe z.B. Bartle [4].

   (d) Eine stetige Funktion auf einem Kompaktum ist beschränkt, sei $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in S$. Sei $n \in \mathbb{N}$, setze
$$t_n(x) = m+(j+\frac{1}{2})\frac{M-m}{n}, \text{ falls } m+j\frac{M-m}{n} \leq f(x) < m+(j+1)\frac{M-m}{n}.$$
   Dann ist für n, so dass
$$0 < \frac{M-m}{n} < \frac{\varepsilon}{\mu(S)}$$
$$\|t_n - f\|_{R(S,\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

(e) siehe z.B. Bartle [4].

□

Definition 2.3.1.8
Das Integral auf $R(S;X)$ wird als Kurzweil[4]-Henstock[5] Integral definiert.

Bemerkung 2.3.1.9
Räume von Regelfunktionen spielen in der Modellierung von Eigenschaften von Materialien eine gewisse Rolle. Sie scheinen an manchen Stellen der Beschreibung mittels Sobolevräumen überlegen zu sein.

2.3.2 Räume stetiger und differenzierbarer Funktionen

Lemma 2.3.2.1
Ist S ein topologischer Raum, so ist

$$C(S;X) = \left\{ f \in B(S;X) \;\middle|\; f : S \to X \text{ ist stetig} \right\}$$

ein abgeschlossener Unterraum von $B(S;X)$ und demzufolge auch ein Banachraum.

Beweis. Zu zeigen ist nur, dass die Grenzfunktion einer konvergenten Folge stetiger Funktionen wieder stetig ist. Dies ist aber aus der Analysis I (siehe auch [20]) bekannt. □

Lemma 2.3.2.2
Ist (S,d) ein metrischer Raum, so ist

$$C^{unif}(S;X) = \left\{ f \in C(S;X) \;\middle|\; f : S \to X \text{ ist gleichmäßig stetig} \right\}$$

ein abgeschlossener Unterraum von $C(S;X)$ und demzufolge auch ein Banachraum.

Beweis. Zu zeigen ist nur, dass die Grenzfunktion einer konvergenten Folge gleichmäßig stetiger Funktionen wieder gleichmäßig stetig ist. Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

---

[4] Jaroslav Kurzweil, zeitgen. tschechischer Mathematiker, forscht und lehrt an der Karls-Universität in Prag.

[5] Henstock, amerikanischer zeitgen. Mathematiker

eine konvergente Folge gleichmäßig stetiger Funktionen und f die Grenzfunktion. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|f_n - f\|_{C(S;X)} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $d(x,y) < \delta$ impliziert $\|f_n(x) - f_n(y)\|_X < \frac{\varepsilon}{3}$. Dann ist

$$\|f(x) - f(y)\|_X < \varepsilon.$$

□

Im weiteren Verlauf dieses Abschnittes sei der zugrundeliegende Raum S entweder ein Gebiet im $\mathbb{K}^n$ oder eine (kompakte) $\mathbb{K}$-Mannigfaltigkeit. In jedem Fall ist ein Differenzierbarkeitsbegriff bekannt.

Definition 2.3.2.3
Mit

$$C^k(S;\mathbb{K}) = \left\{ f \in C(S;\mathbb{K}) \,\middle|\, |\alpha| \leq k \Rightarrow D^\alpha f \in C(S;\mathbb{K}) \right\}$$

bezeichnen wir die Menge der auf S k-mal stetig differenzierbaren Funktionen. Wir setzen

$$\|f\|_{C^k(S;\mathbb{K})} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \sup \left\{ |D^\alpha f(x)| \,\middle|\, x \in S \right\}.$$

Lemma 2.3.2.4
$(C^k(S;\mathbb{K}), \|\cdot\|_{C^k(S;\mathbb{K})})$ ist ein $\mathbb{K}$-Banachraum. Entsprechendes gilt auch für $C^k(\Omega;X)$ wobei X, Y $\mathbb{K}$-Banachräume sind und $\Omega \subset Y$ offen ist, allerdings ist dann $D^m f \in \mathcal{L}^m(Y;X) = \mathcal{L}(Y;\mathcal{L}^{m-1}(Y;X))$.

Beweis. Folgt aus den Sätzen der Analysis, siehe z.B. [20, 21, 22]. □

Verzichtet man auf die Beschränktheit, oder aber betrachtet man Mengen von unendlich oft differenzierbaren Funktionen, so gibt es keine natürliche Norm.

2.3.3 Lebesgue- und Sobolevräume

Die Räume, die wir nun einführen wollen, spielen u.a. in der Theorie partieller Differentialgleichungen eine bedeutende Rolle. Im folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein *Gebiet*, d.h. eine offene und zusammenhängende Teilmenge. Diese Menge kann soweit nichts anderes gesagt wird, beschränkt oder unbeschränkt sein. Wir gehen davon aus, dass die Lebesguealgebra messbarer Mengen bekannt ist und die Konstruktion des Lebesgueschen Maßes auf Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

Definition 2.3.3.1
Es sei $(\Omega, \mathcal{L}, \mu)$ der Lebesguesche Maßraum, X ein Banachraum. Wir führen für $1 \leq p < \infty$ den Raum

$$\mathcal{L}^p(\Omega; X) = \left\{ f : \Omega \to X \,\middle|\, f \text{ ist messbar und } \int\limits_\Omega \|f\|_X^p \, d\mu \text{ existiert.} \right\}$$

ein. Mit

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega;X)} = \left(\int\limits_\Omega \|f\|_X^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

definieren wir eine Abbildung $\mathcal{L}^p(\Omega; X) \to \mathbb{R}_+$.

Die eben definierte Abbildung ist keine Norm, denn es gibt nichtnegative Funktionen (wie schon bei den Regelfunktionen gesehen), die auf Nullmengen ungleich 0 sind, deren Integral aber 0 ist. Außerdem ist auch nicht klar, dass die eben definierten Räume überhaupt eine lineare Struktur tragen. Hier helfen die bereits von den Folgenräumen bekannten Hölder- und Minkowskiungleichungen weiter.

Definition 2.3.3.2
Wie zuvor sei $(\Omega, \mathcal{L}, \mu)$ der Lebesgue Maßraum. Eine Funktion $f : \Omega \to X$, X ein Banachraum heißt wesentlich beschränkt, wenn es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\mu(\left\{ x \in \Omega \,\middle|\, \|f(x)\|_X > M \right\}) = 0$$

ist. Wir nennen M eine wesentliche Schranke. Als wesentliches Supremum, in Zeichen ess sup $\|f\|_X$ *bezeichnen wir*

$$\operatorname{ess\,sup} \|f\|_X = \inf \left\{ M > 0 \,\middle|\, M \text{ ist wesentliche Schranke} \right\}.$$

Mit $\mathcal{L}^\infty(\Omega; X)$ bezeichnen wir die Menge aller wesentlich beschränkten Funktionen. Definiere $\mathcal{N}$, als die Menge der wesentlich beschränkten Funktionen mit Schranke 0. $L^\infty(\Omega; X) = \mathcal{L}^\infty(\Omega; X)/\mathcal{N}$.

Satz 2.3.3.3
$L^\infty(\Omega; X)$ ist ein linearer Raum,

$$\|[f]\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup} \|f\|_X, f \in [f]$$

ist eine Norm, die unabhängig von der Wahl von $f \in [f]$ ist. Mit dieser Norm wird $L^\infty(\Omega; X)$ zum Banachraum.

Beweis. Alle Aussagen außer der Vollständigkeit sind klar. Also betrachten wir eine Cauchyfolge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ wesentlich beschränkter Funktionen. Zu jeder Funktion gibt es eine Nullmenge N_k, so dass f_k außerhalb N_k durch M_k beschränkt ist. Die abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist eine Nullmenge, so setzen

$$N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k.$$

Auf $\Omega \setminus N$ sind alle f_k (durch M_k) beschränkt. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k > n$ gilt

$$\mu(\left\{x \in \Omega \;\middle|\; \|f_n(x) - f_k(x)\|_X > \varepsilon\right\}) = 0.$$

Wir bezeichnen diese Menge mit $N_{n,k}$. Sei

$$K = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in \Omega \;\middle|\; \|f_n(x) - f_k(x)\|_X > \varepsilon\right\}.$$

K ist einen Nullmenge, setze

$$M = \sup\{M_1, \ldots, M_{n-1}, M_n + \varepsilon\}.$$

Dann ist außerhalb $N \cup K$ für alle j

$$\|f_j(x)\|_X < M.$$

Für $j \leq n-1$ ist dies durch die Konstruktion offensichtlich. Ist $j \geq n$, so ist

$$\|f_j(x)\|_X \leq \|f_n(x)\|_X + \|f_j(x) - f_n(x)\|_X \leq M_n + \varepsilon.$$

Durch weiteres Verkleinern der Menge, kann man o.B.d.A. davon ausgehen, dass

$$\{f_j(x)\}_{j\in\mathbb{N}}, x \notin \tilde{N}$$

eine Cauchyfolge ist. Daher existiert punktweise der Grenzwert f. Bleibt nur noch zu zeigen, dass f der Grenzwert in $L^\infty(\Omega; X)$ ist. □

Lemma 2.3.3.4 (Hölder)
Es seien $p, q \in [1, \infty]$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Für $f \in \mathcal{L}^p(\Omega; X)$, $g \in \mathcal{L}^q(\Omega; X)$ gilt dann $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega; X)$ und es gilt

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1(\Omega;X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega;X)} \|g\|_{\mathcal{L}^q(\Omega;X)}.$$

Beweis. fg ist messbar. Wir betrachten vorweg die speziellen Fälle $p = 1, q = \infty$ und umgekehrt. Dann ist

$$\|f(x)g(x)\|_X \leq \|g\|_{L^\infty(\Omega;X)} \|f(x)\|_X \ \mu\text{-fast überall},$$

und es folgt die Behauptung unmittelbar. Ist eine der beiden Funktionen Null μ-fast überall, so ist die Behauptung auch unmittelbar klar. Wir betrachten also den Fall $1 < p < \infty$ und $\|f\|_{L^p(\Omega;X)} > 0$ und $\|g\|_{L^q(\Omega;X)} > 0$. Wir setzen

$$a = \frac{\|f(x)\|_X}{\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega;X)}}, \ b = \frac{\|g(x)\|_X}{\|g\|_{L^q(\Omega;X)}}$$

und erhalten mit Hilfssatz 2.1.2.2

$$\frac{\|f(x)g(x)\|_X}{\|f\|_{L^p(\Omega;X)} \|g\|_{L^q(\Omega;X)}} \leq \frac{\|f(x)\|_X^p}{p\|f\|_{L^p(\Omega;X)}^p} + \frac{\|g(x)\|_X^q}{q\|g\|_{L^q(\Omega;X)}^q}.$$

Die rechte Seite ist integrierbar, damit ist $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega; X)$ und die Integration beider Seiten ergibt

$$\frac{\int\limits_\Omega \|fg\|_X \, d\mu}{\|f\|_{L^p(\Omega;X)} \|g\|_{L^q(\Omega;X)}} \leq \frac{1}{p} \frac{\int\limits_\Omega \|f\|_X^p \, d\mu}{\|f\|_{L^p(\Omega;X)}^p} + \frac{1}{q} \frac{\int\limits_\Omega \|g\|_X^q \, d\mu}{\|g\|_{L^q(\Omega;X)}^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

□

Aufgabe 2.3.3.5
Man verallgemeinere das Lemma 2.3.3.4 auf eine beliebige endliche Anzahl von Faktoren.

Lemma 2.3.3.6
Sei $f : \Omega \to X$ messbar, $1 \leq p < \infty$ und $g \in \mathcal{L}(\Omega; \mathbb{R})$ mit

$$\|f\|_X^p \leq g \quad \mu\text{-fast überall.}$$

Dann ist $f \in \mathcal{L}^p(\Omega; X)$.

Beweis. Folgt sofort aus dem Majorantenkriterium und dessen Beweis, [22]. □

Lemma 2.3.3.7 (Minkowski)
Sind $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega; X)$, $1 \leq p \leq \infty$, so ist auch $f + g \in \mathcal{L}^p(\Omega; X)$ und es gilt

$$\|f+g\|_{\mathcal{L}^p(\Omega,X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega,X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(\Omega,X)}.$$

Beweis. Für $p = 1, \infty$ folgt dies sofort aus der punktweisen Dreiecksungleichung. Bleibt der Fall $1 < p < \infty$. Durch

$$\|f+g\|_X^p \leq (\|f\|_X + \|g\|_X)^p \leq 2^p \left(\|f\|_X^p + \|g\|_X^p\right)$$

zeigen wir, dass $\|f+g\|_X^p \in \mathcal{L}^p(\Omega; \mathbb{R})$ ist.
Wir haben punktweise μ-fast überall

$$\|f+g\|_X^p = \|f+g\|_X \|f+g\|_X^{p-1} \leq \|f\|_X \|f+g\|_X^{p-1} + \|g\|_X \|f+g\|_X^{p-1}.$$

Mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

folgt wegen $q(p-1) = p$, dass $\|f+g\|_X^{p-1} \in \mathcal{L}^q(\Omega; X)$ und

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \|f+g\|_X^p \, d\mu &\leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega,X)} \| \|f+g\|_X^{p-1} \|_{\mathcal{L}^q(\Omega,+)} \|g\|_{\mathcal{L}^q(\Omega,X)} \| \|f+g\|_X^{p-1} \|_{\mathcal{L}^q(\Omega,X)} \\
&\leq \left(\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega,X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(\Omega,X)}\right) \left(\int_\Omega \|f+g\|^p \, d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Verschwindet das Integral, so ist nichts zu zeigen, anderweitig dividieren wir durch das Integral rechts und erhalten die Behauptung. □

Definition 2.3.3.8
Mit $\mathfrak{N}$ bezeichnen wir die Menge der Funktionen

$$\mathfrak{N} = \left\{ f \in \mathcal{L}^p(\Omega; X) \;\middle|\; \int_\Omega \|f\|_X^p \, d\mu = 0 \right\}.$$

Lemma 2.3.3.9
$\mathfrak{N}$ ist ein Unterraum von $\mathcal{L}^p(\Omega; X)$.

Beweis. Offensichtlich! □

Definition 2.3.3.10
Wir setzen $L^p(\Omega; X) = \mathcal{L}^p(\Omega; X)/\mathfrak{N}$. *Ist* $f \in \mathcal{L}^p(\Omega; X)$, *so schreiben wir*

$$[f] = f + \mathfrak{N}$$

für die Klasse von f. *Wir setzen*

$$\|[f]\|_{L^p(\Omega;X)} = \left(\int_\Omega \|f\|_X^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Satz 2.3.3.11 (Fischer[6]-Riesz)
$L^p(\Omega; X)$ *ist für einen Banachraum* X *wieder ein Banachraum.*

Beweis. Als Quotient eines linearen Raumes ist der Raum wieder ein linearer Raum, vgl. Satz 1.5.5.3 und den dortigen Beweis. Alle weiteren Eigenschaften außer der Vollständigkeit sind klar. Sei also $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, wir müssen zeigen, dass diese Folge in $L^p(\Omega; X)$ konvergiert. Wir wählen eine Teilfolge $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ aus, mit

$$\|f_{k_l} - f_{k_j}\|_{L^p(\Omega;X)} \leq 2^{-i} \text{ für } l, j > i.$$

Dann ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_{L^p(\Omega;X)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1.$$

Setze

$$g_l = \sum_{j=1}^{l} \|f_{k_{J+1}} - f_{k_j}\|_X.$$

[5]Ernst Fischer (12.7.1875-14.11.1954) studierte in Wien und Berlin. Er arbeitete bei Minkowski in Zürich und Göttingen. Er war Professor in Brno, Erlangen und Köln. Aufgrund der faschistischen Rassegesetze wurde er vorzeitig in Ruhestand geschickt. Er bewies u.a. die Vollständigkeit von L^2. Neben der Analysis beschäftigte er sich auch mit Gruppentheorie und anderen algebraischen Fragen.

Das Lemma von Fatou (s. z.B. [22]) zusammen mit Lemma 2.3.3.4 impliziert nun

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega \lim_{l\to\infty} g_l^p\, d\mu &\le \liminf_{l\to\infty} \int\limits_\Omega g_l^p\, d\mu \\ &= \left(\liminf_{l\to\infty} \|g_l\|_{L^p(\Omega;X)}\right)^p \\ &\le \left(\sum_{j=1}^\infty \|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_{L^p(\Omega;X)}\right)^p \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Damit existiert μ-fast überall der Grenzwert $\lim_{l\to\infty} g_l(x)$ und damit ist $\{f_{k_l}(x)\}_{l\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall eine Cauchyfolge und es existiert μ-fast überall der Grenzwert $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_{k_j}(x)$. Wir müssen nun zeigen, dass f der L^p-Grenzwert der Folge ist. Also

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega \|f - f_k\|_X^p\, d\mu &\le 2^{p-1} \int\limits_\Omega \inf_{k_j>k} \left(\|f - f_{k_j}\|_X^p + \|f_{k_j} - f_k\|_X^p\right)\, d\mu \\ &\le 2^{p-1} \left(\int\limits_\Omega \inf_{k_j>k} \|f - f_{k_j}\|_X^p\, d\mu + \int\limits_\Omega \sup_{k_j>k} \|f_{k_j} - f_k\|_X^p\, d\mu\right) \\ &\le 0 + \varepsilon,\end{aligned}$$

solange nur k, k_j hinreichend groß sind. □

Lemma 2.3.3.12
Es sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^p(\Omega; X)$ mit $1 \le p < \infty$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

1. *Ist $f \in L^p(\Omega; X)$ und gilt $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L^p(\Omega;X)} = 0$, so gibt es eine Teilfolge $\{f_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, die μ-fast überall gegen f konvergiert.*

2. *Ist $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega; X)$ und ist $f : \Omega \to X$ μ-fast überall Grenzwert der Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, so ist $f \in L^p(\Omega; X)$ und $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L^p(\Omega;X)} = 0$.*

Beweis. Folgt sofort aus den früheren Überlegungen. □

Satz 2.3.3.13 (Vitali[7])
Sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^p(\Omega; X)$ mit $1 \leq p < \infty$. Es gelte $f_k \to f$ μ-fast überall. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

1. *$f \in L^p(\Omega; X)$ und $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L^p(\Omega;X)} = 0$.*

2. *Ist S_j eine Folge von messbaren Teilmengen von Ω mit $\lim_{j\to\infty} \mu(S_j) = 0$, so ist*
$$\lim_{j\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \int\limits_{S_j} \|f_k\|_X^p \, d\mu = 0$$
und zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein S_ε mit $\mu(S_\varepsilon) < \infty$, so dass
$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega\setminus S_\varepsilon} \|f_k\|_X^p \, d\mu \leq \varepsilon.$$

Beweis. Siehe Literatur. □

Satz 2.3.3.14 (Allgemeiner Lebesguescher Konvergenzsatz)
Es seien $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und f messbare Funktionen $\Omega \to X$ und sei $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L(\Omega, \mathbb{R})$ mit $g_k \to_{L(\Omega,\mathbb{R})} g$. Aus

$\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$ μ-fast überall und $\|f_k\|_X^p \leq g_k$ μ-fast überall und für alle $k \in \mathbb{N}$

folgt $f_k, f \in L^p(\Omega; X)$ und $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L^p(\Omega;X)} = 0$.

Beweis. Siehe Literatur. □

Im folgenden betrachten wir nur $\mathbb{K}$-wertige Funktionen, $L^p(\Omega)$ steht für $L^p(\Omega, \mathbb{K})$.

Definition 2.3.3.15
Es sei $u \in L^p(\Omega)$.

1. *Die Funktion $v \in L^p(\Omega)$ heißt die* schwache Ableitung *von u nach x_i, falls für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt*
$$\int_\Omega u \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \, dx = - \int_\Omega v\varphi \, dx.$$

[6] Giuseppe Vitali (26.8.1875-29.2.1932) war nach seinem Studium zunächst Lehrer und begann dann eine akademische Laufbahn in Padua und Bologna. Er bewies u.a. die Existenz nicht messbarer Mengen.

2. *Ist α ein Multiindex, $v \in L^p(\Omega)$, so sagen wir $v = D^\alpha u$ im* schwachen Sinn, *falls für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt*

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi \, dx.$$

Aufgabe 2.3.3.16
Man zeige, dass eine Funktion $u \in C^m(\Omega)$, deren Ableitungen alle in $L^p(\Omega)$ liegen, für $|\alpha| \leq m$ schwache Ableitungen $D^\alpha u$ besitzt und dass diese mit den klassischen Ableitungen zusammen fallen.

Lemma 2.3.3.17
Besitzt $u \in L^p(\Omega)$ eine schwache Ableitung $D^\alpha u$ und $D^\alpha u$ wiederum eine schwache Ableitung $D^\beta(D^\alpha u)$, so hat u auch eine schwache Ableitung der Form $D^{\alpha+\beta}u$ und es gilt $D^{\alpha+\beta}u = D^\beta(D^\alpha u)$.

Beweis. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann folgt

$$\int\limits_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega (D^\alpha u)\, \varphi dx$$

Ist $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ und schreiben wir $D^\beta \psi = \varphi$, so folgt

$$\int\limits_\Omega (D^\alpha u)\, \varphi dx = \int\limits_\Omega (D^\alpha u) \left(D^\beta \psi\right) dx = (-1)^{|\beta|} \int\limits_\Omega D^\beta(D^\alpha u)\psi dx$$

und insgesamt

$$\int\limits_\Omega u D^{\alpha+\beta} \psi dx = (-1)^{|\alpha+\beta|} \int\limits_\Omega D^\beta(D^\alpha u)\psi dx$$

□

Definition 2.3.3.18
Mit $W^{m,p}(\Omega)$ werde für $m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$ der Raum

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq m \; \exists\, v \in L^p(\Omega), \text{ so dass } v = D^\alpha u\}$$

bezeichnet. $W^{m,p}(\Omega)$ *heißt* Sobolevraum[8].

Satz 2.3.3.19
$W^{m,p}(\Omega)$ ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jedes $1 \leq p \leq \infty$ ein Banachraum mit Norm

$$\|u\|_{m,p}^{\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.3.3.20}$$

Beweis. Die Eigenschaften einer Norm sind für (2.3.3.20) leicht nachzuprüfen. Als einziges bleibt die Vollständigkeit zu beweisen. Dazu sei $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ eine Cauchy–Folge m-fach schwach differenzierbarer Funktionen, bezüglich der Norm (2.3.3.20). Ferner sei $u_\nu^\alpha = D^\alpha u_\nu$. Dann ist u_ν^α für jedes α eine Cauchy–Folge in $L^p(\Omega)$. Es existiert also ein $u^\alpha \in L^p(\Omega)$ mit $u_\nu^\alpha \to u^\alpha$. Für jedes $\nu,\ \alpha$ gilt aber

$$\int_\Omega u_\nu^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\nu D^\alpha \varphi dx.$$

Durch Grenzübergang auf beiden Seiten erhält man das erwünschte Resultat. □

Definition 2.3.3.21
Eine Glättungsfunktion (`engl.` **mollifier**) *ist eine Funktion $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit*

1. *$\rho = 0$ außerhalb $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$.*
2. *$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1$.*
3. *$\rho \geq 0$.*

[8]Sergej Lwowitsch Sobolev (6.10.1908–3.1.1989) erkannte aufgrund von physikalischen Überlegungen, dass es sinnvoll ist den Lösungsbegriff für partielle Differentialgleichungen abzuschwächen. Später konnte er diese verallgemeinerten Lösungen als Funktionale interpretieren und schuf damit die Grundlage der Theorie der Distributionen. Er war damit der Wegbereiter für den Gebrauch funktionalanalytischer Methoden in der Theorie partieller Differentialgleichungen. Diese sind heute auch aus der Numerik partieller Differentialgleichungen nicht mehr wegzudenken. Auch für diese Entwicklungen legte er den Grundstein in einer Arbeit mit W. I. Smirnow

Beispiel 2.3.3.22

$$\rho_c(x) = \begin{cases} ce^{-\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right)}, & \|x\| < 1 \\ 0, & \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

ist eine Glättungsfunktion, falls $c > 0$ so gewählt wird, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_c(x)dx = 1.$$

Definition 2.3.3.23
Für $u \in L^p(\Omega)$, $h > 0$ und eine Glättungsfunktion ρ ist

$$(J_h u)(x) = \frac{1}{h^n} \int\limits_{\Omega} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y)dy$$

die Regularisierung *von u. Diese ist für alle $x \in \Omega$ mit*

$$h < \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$$

definiert.

Bemerkung 2.3.3.24
Für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$ ist $u_h = J_h u \in C^\infty(\Omega')$, sofern $h < \operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$.

Lemma 2.3.3.25
Ist $u \in C(\Omega)$, so konvergiert $u_h \to u$ gleichmäßig auf jedem Kompaktum $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Beweis. Mit der Substitution

$$z = \frac{x-y}{h}$$

wird u_h zu

$$\begin{aligned} u_h(x) &= \frac{1}{h^n} \int\limits_{|x-y|\leq h} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y)dy \\ &= \int\limits_{|z|\leq 1} \rho(z)u(x-zh)dz. \end{aligned}$$

Daher gilt für $\Omega' \subset\subset \Omega$ mit $2h < \operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$

$$\begin{aligned}\sup_{\Omega'} |u_h(x) - u(x)| &\leq \sup_{\Omega'} \int_{|z|\leq 1} \rho(z)\, |u(x - zh) - u(x)|\, dz \\ &\leq \sup_{\Omega'} \sup_{|z|\leq 1} |u(x) - u(x - zh)|.\end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass $\int_{|z|\leq 1} \rho(z)u(x)dz = u(x)$.

Da u auf dem Kompaktum $\overline{\Omega''}$ mit

$$\Omega'' = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(z, \Omega') < h\}$$

gleichmäßig stetig ist, folgt die Behauptung. □

Lemma 2.3.3.26
Es sei $1 \leq p < \infty$. Ist $u \in L^p(\Omega)$ so konvergiert u_h für $h \to 0$ gegen u im Sinne der Konvergenz in $L^p(\Omega)$. Dabei vereinbaren wir, zur Vermeidung von Problemen mit der Definition der Funktion auf dem Gebiet Ω, stillschweigend, die Funktion durch Nullwerte auf ganz $\mathbb{K}^n$ fortzusetzen.

Beweis. Wir beweisen den Satz für $1 < p < \infty$, die Modifikationen für den Fall $p = 1$ sind nahezu offensichtlich (beachte: ρ ist beschränkt). Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$ mit $\operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > 2h$. Wir setzen

$$\Omega'' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x, \Omega')\} < h$$

und zeigen zunächst

$$\|u_h\|_{L^p(\Omega')} \leq \|u\|_{L^p(\Omega'')}$$

Mit der Hölder'schen Ungleichung erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} |u_h(x)|^p &\leq \left(\int\limits_{|z|\leq 1} \rho(z)|u(x-zh)|dz\right)^p \\ &= \left(\int\limits_{|z|\leq 1} \underbrace{\rho(z)^{\frac{p-1}{p}}}_{\in L^q(B_1(0))} \underbrace{\rho(z)^{\frac{1}{p}}|u(x-zh)|}_{\in L^p(B_1(0))} dz\right)^p \\ &\leq \left(\int\limits_{|z|\leq 1} \rho(z)dz\right)^{p-1} \int_{|z|\leq 1} \rho(z)|u(x-zh)|^p dz \\ &\leq \int\limits_{|z|\leq 1} \rho(z)|u(x-zh)|^p dz. \end{aligned}\right\} \tag{2.3.3.27}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega'} |u_h(x)|^p dx &\leq \int\limits_{|z|\leq 1} \left(\int_{\Omega'} |u(x-zh)|^p dx\right) \rho(z)dz \\ &\leq \int\limits_{B_h(\Omega')} |u|^p dx \end{aligned}$$

und damit

$$\|J_h u\|_{L^p(\Omega')} \leq \|u\|_{L^p(\Omega'')}.$$

Wir finden zu $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion w mit

$$\|u - w\|_{L^p(\Omega'')} < \varepsilon.$$

Für ein geeignetes $h > 0$ hat man mit Lemma 2.3.3.25 für die Glättung von w

$$\|w - w_h\|_{L^p(\Omega')} < \varepsilon.$$

Alles in allem ergibt sich

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^p(\Omega')} &\leq \underbrace{\|u - w\|_{L^p(\Omega')}}_{\leq\varepsilon} + \underbrace{\|w - w_h\|_{L^p(\Omega')}}_{\leq\varepsilon} + \|w_h - u_h\|_{L^p(\Omega')} \\ &\leq 2\varepsilon + \underbrace{\|w_h - u_h\|_{L^p(\Omega')}}_{\leq\|w-u\|_{L^p(\Omega'')}\leq\varepsilon} \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Um die Richtigkeit des Satzes bezüglich der Konvergenz in $L^p(\Omega)$ zu schließen, wenden wir das Ergebnis auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ an. Wir beachten dabei, dass die triviale Fortsetzung einer Funktion $u \in L^p(\Omega)$ durch

$$\tilde{u} = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt. □

2.4 Dualräume

2.4.1 $C([0,1],\mathbb{R})$

Wir wollen im Spezialfall den Dualraum zu $C(\Omega,\mathbb{R})$ bestimmen. Sei $\Omega = [0,1]$. In diesem Fall gibt es eine Darstellung der beschränkten, signierten Maße durch spezielle Funktionen. Es sei $Z = \{\zeta_0 = 0 < \zeta_1 < \cdots < \zeta_r = 1\}$ eine Zerlegung (vgl. [21]) des Intervalls. Für eine Funktion $f \in B([0,1],\mathbb{K})$ setzen wir

$$|f|_Z = \sum_{i=0}^{r-1} |f(\zeta_{i+1}) - f(\zeta_i)|.$$

Definition 2.4.1.1
Eine Funktion $f \in B([0,1],\mathbb{K})$ wird von beschränkter Variation *(*`alte Bezeichnung` **von beschränkter Schwankung***) genannt, falls*

$$\sup\left\{|f|_Z \;\middle|\; Z \text{ ist Zerlegung von } [0,1]\right\} < \infty$$

ist. Die Menge der Funktionen von beschränkter Schwankung wird mit $BV([0,1],\mathbb{K})$ bezeichnet. Wir setzen für $f \in BV([0,1];\mathbb{K})$

$$\|f\|_{BV([0,1];\mathbb{K})} = |f(0)| + \sup\left\{|f|_Z \;\middle|\; Z \text{ ist Zerlegung von } [0,1]\right\}.$$

Satz 2.4.1.2
Der Raum $(BV([0,1];\mathbb{K}), \|\cdot\|_{BV([0,1];\mathbb{K})})$ ist ein Banachraum.

Beweis. Übungen! □

Aufgabe 2.4.1.3
Jeder Funktion $f \in BV([0,1];\mathbb{R})$ ordnen wir für $0 \leq a \leq x \leq 1$ neue Funktionen

$$V_a^x f = \sup\left\{|f|_Z \;\middle|\; Z \text{ ist Zerlegung von } [a,x]\right\}$$

zu. Zeigen Sie:

1. *$V_0^x f$ ist monoton steigend.*
2. *Sind $x \leq y \in [0,1]$, so gilt $V_0^x f + V_x^y f = V_0^y f$;*

Aufgabe 2.4.1.4
Jede Funktion $f \in BV([0,1];\mathbb{R})$ kann als Differenz zweier monotoner Funktionen aufgefasst werden. (Jordanscher[9] Zerlegungssatz)

Definition 2.4.1.5
Für eine Funktion $f \in C([0,1];\mathbb{K})$ und eine Funktion $g \in BV([0,1];\mathbb{K})$ sagen wir, dass das Riemann-Stieltjes-Integral[10] *von f bzgl. g existiere, falls es eine Zahl a gibt, genannt das Riemann-Stieltjes-Integral von f bzgl. g, so dass für alle $\varepsilon > 0$ eine $\delta > 0$ existiert, so dass für Zerlegungen $Z = \{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_r\}$ der Feinheit kleiner δ gilt*

$$\left| a - \sum_{i=0}^{r} f(\zeta_i)(g(\zeta_{i+1}) - g(\zeta_i)) \right| < \varepsilon.$$

Wir schreiben auch

$$a = \int_0^1 f \, dg.$$

[9] Camille Marie Ennemond Jordan (5.1.1838-21.1.1922) wurde zunächst zum Bergbauingenieur ausgebildet. Im Jahre 1916 wurde er Präsident der französischen Akademie der Wissenschaften. Sein Werk umfasst neben der Normalform Beiträge zur Algebra (u.a. zur Galois-Theorie), zur Analysis, zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und zur Topologie der Ebene (Kurvensatz).

[10] Thomas Jan Stieltjes (29.12.1856-31.12.1894), niederländischer Mathematiker, mit einer sehr ungewöhnlichen Karriere, u.a. wurde ihm eine schon angebotene Stelle als Professor in Leiden nicht gegeben. Er wechselte nach Frankreich und starb in Toulouse. Seine Arbeitsgebiete umfassen alle Aspekte der Analysis, Kettenbruchentwicklungen und Zahlentheorie.

Wir nennen

$$\sum_{i=0}^{r} f(\zeta_i)(g(\zeta_{i+1}) - g(\zeta_i))$$

die Riemann-Stieltjes Summe *von f bezüglich g zur Zerlegung Z.*

Lemma 2.4.1.6
Ist $f \in C([0,1];\mathbb{R})$ und $g \in BV([0,1];\mathbb{R})$, so existiert das Riemann-Stieltjes Integral.

$$\int_0^1 f\, dg.$$

Beweis. Dazu reicht es zu zeigen, dass zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass wenn zwei Zerlegungen Z_1, Z_2 mit Feinheit höchstens δ gegeben sind, sich die zugehörigen Riemann-Stieltjes Summen sich höchstens um ε unterscheiden. Wir betrachten den Fall, dass eine Zerlegung die Verfeinerung der anderen ist, also oBdA $Z_1 \subset Z_2$. Setze (beachte f ist gleichmäßig stetig)

$$\delta > 0, \text{ so dass } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{V_0^1 g}.$$

Dann kann man den Betrag der Differenz der beiden Riemann-Stieltjes Summen in der Form

$$\left| \sum_{i=0}^{r_2-1} (f(\xi_i) - f(\eta_i))\,(g(\zeta_{i+1}) - g(\zeta_i)) \right|$$

schreiben, wobei $|\xi_i - \eta_i| < \delta$. Damit kann man abschätzen

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=0}^{r_2-1} (f(\xi_i) - f(\eta_i))\,(g(\zeta_{i+1}) - g(\zeta_i)) \right| &\leq \sum_{i=0}^{r_2-1} |f(\xi_i) - f(\eta_i)|\,|g(\zeta_{i+1}) - g(\zeta_i)| \\
&< \sum_{i=0}^{r_2-1} \frac{\varepsilon}{V_0^1 g}\,|g(\zeta_{i+1}) - g(\zeta_i)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{V_0^1 g} \sum_{i=0}^{r_2-1} |g(\zeta_{i+1}) - g(\zeta_i)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{V_0^1 g} V_0^1 g \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Damit hat man eine Abbildung

$$T : BV([0,1];\mathbb{R}) \to (C([0,1];\mathbb{R}))' : g \mapsto Tg$$

mit

$$Tg(f) = \int\limits_0^1 f\,dg.$$

Satz 2.4.1.7
Die soeben definierte Abbildung $T : BV([0,1];\mathbb{R}) \to (C([0,1];\mathbb{R}))'$ *ist linear, stetig und surjektiv. Zusätzlich gilt*

$$\|Tg\|_{(C([0,1];\mathbb{R}))'} = V_0^1 g.$$

Beweis. Die Linearität ist klar. T ist stetig, denn

$$|Tg(f)| \leq \|f\|_{C([0,1];\mathbb{R})} V_0^1 g.$$

Dazu müssen wir nur jede Riemann-Stieltjes Summe entsprechend abschätzen

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=0}^{r-1} f(\zeta_i)(g(\zeta_{i+1}) - g(\zeta_i))\right| &\leq \sup\left\{|f(x)| \;\Big|\; x \in [0,1]\right\} \sum_{i=0}^{r-1} |g(\zeta_{i+1}) - g(\zeta_i)| \\ &= \|f\|_{C([0,1];\mathbb{R})} V_0^1 g. \end{aligned}$$

Damit haben wir

$$\|Tg\|_{(C([0,1];\mathbb{R}))} \leq V_0^1 g.$$

Bevor wir hier die Gültigkeit des Gleichheitszeichens nachweisen, kommen wir zur Surjektivität. Sei $\tau \in (C([0,1];\mathbb{R}))'$. Da $C([0,1];\mathbb{R}) \subset L^\infty([0,1];\mathbb{R})$ gibt es nach Hahn-Banach ein Funktional

$$\Phi \in (L^\infty([0,1];\mathbb{R}))' \text{ mit } \Phi = \tau \text{ auf } C([0,1];\mathbb{R}) \text{ und } \|\Phi\|_{(L^\infty([0,1];\mathbb{R}))'} = \|\tau\|_{(C([0,1];\mathbb{R}))'}.$$

Betrachte die Funktion $\gamma(x) = \Phi(\chi_{[0,x]})$, die definiert ist, da $\chi_{[0,x]} \in L^\infty([0,1];\mathbb{R})$ ist. Der nächste Schritt besteht darin zu zeigen, dass $\gamma \in BV([0,1];\mathbb{R})$ ist. Sei $Z = \{\zeta_1 < \cdots < \zeta_r\}$ eine Zerlegung von $[0,1]$. Sei $\varepsilon_i = \operatorname{sgn}(\gamma(\zeta_{i+1}) - \gamma(\zeta_i))$.

Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{r-1}|\gamma(\zeta_{i+1})-\gamma(\zeta_i)| &= \sum_{i=0}^{r-1}\varepsilon_i(\gamma(\zeta_{i+1})-\gamma(\zeta_i))\\ &= \sum_{i=0}^{r-1}\varepsilon_i(\Phi(\chi_{[0,\zeta_{i+1}]})-\Phi(\chi_{[0,\zeta_i]}))\\ &= \Phi\left(\sum_{i=0}^{r-1}\varepsilon_i(\chi_{[0,\zeta_{i+1}]})-\chi_{[0,\zeta_i]}))\right)\end{aligned}$$

Nun ist die Norm der inneren Funktion

$$\left\|\sum_{i=0}^{r-1}\varepsilon_i(\chi_{[0,\zeta_{i+1}]}-\chi_{[0,\zeta_i]})\right\|_{L^\infty([0,1];\mathbb{R})} = 1$$

und damit kann man abschätzen

$$\sum_{i=0}^{r-1}|\gamma(\zeta_{i+1})-\gamma(\zeta_i)| \le \|\Phi\|_{(L^\infty([0,1];\mathbb{R}))'} = \|\tau\|_{(C([0,1];\mathbb{R}))'}. \tag{2.4.1.8}$$

Dies ist unabhängig von der Zerlegung, also ist $\gamma \in BV([0,1];\mathbb{R})$. Bleibt zu zeigen, dass $T\gamma = \tau$. Wir wissen bereits

$$\int_0^1 f\ d\gamma$$

existiert, daher können wir zum Berechnen des entsprechenden Ausdruckes eine uns genehme Zerlegung wählen. Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$

$$Z = \left\{\frac{i}{n}\ \middle|\ i = 0,\dots,n\right\}$$

und die Funktion

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(\frac{i}{n})\left(\chi_{[0,\frac{i+1}{n}]}(x)-\chi_{[0,\frac{i}{n}]}(x)\right).$$

f_n konvergiert gleichmäßig gegen f, also in der Norm von $L^\infty([0,1];\mathbb{R})$ und damit konvergiert

$$\Phi(f_n) \to \Phi(f) \text{ für } n \to \infty.$$

Andererseits ist

$$\Phi(f_n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n}) \left(\gamma\left(\frac{i+1}{n}\right) - \gamma\left(\frac{i}{n}\right)\right) \to \int_0^1 f \, d\gamma.$$

Aus Gleichung (2.4.1.8) folgt nun auch noch die Gleichheit $\|\tau\|_{(C([0,1];\mathbb{R})')} = V_0^1\gamma$. □

Wir haben hier einen der wenigen Fälle, bei denen das Hauptproblem die Injektivität der Abbildung ist. Die Frage ist also, wann ist das Riemann-Stieltjes Integral zweier Funktionen beschränkter Variation für jede stetige Funktion gleich. Offensichtlich kann man eine solche Funktion an einer Sprungstelle ändern, ohne den Wert des Riemann-Stieltjes Integrales zu verändern. Andererseits scheint es klar zu sein, dass an einer Stetigkeitsstelle von g eine solche Abänderung unzulässig ist. Wir führen auf $BV([0,1];\mathbb{R})$ eine Äquivalenzrelation ein, indem wir zwei Funktionen als äquivalent bezeichnen, wenn sie sich nur in Unstetigkeitspunkten unterscheiden. Die Einschränkung T_0 auf den Raum der Äquivalenzklassen

$$BV_0([0,1];\mathbb{K}) = \left\{[g] \;\middle|\; g \in BV([0,1];\mathbb{K}),\ g(0) = 0\right\}$$

ist injektiv und surjektiv.

2.4.2 $L^p(\Omega;\mathbb{K})$

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass der Dualraum zu $L^p(\Omega;\mathbb{K})$ für $1 \le p < \infty$ zu $L^q(\Omega;\mathbb{K})$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ toplinear isomorph ist.

Satz 2.4.2.1
Es sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{K}^n$, $1 \le p < \infty$ und q so gewählt, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist die Abbildung

$$T : L^q(\Omega) \to (L^p(\Omega))' : g \mapsto \int_\Omega g \cdot \, d\mu$$

ein toplinearer, isometrischer Isomorphismus

Beweis. Aus der Hölderschen Ungleichung folgt sofort, dass die angegebene Abbildung eine stetige lineare Abbildung ist. Um einzusehen, dass es sich um eine Isometrie handelt, beweisen wir, dass zu $g \in L^q(\Omega)$ ein $f \in L^p(\Omega)$ (mit $\|f\|_{L^p} = 1$) existiert, mit

$$\|g\|_{L^q(\Omega)} = \int_\Omega fg \; d\mu.$$

OBdA ist $g \neq 0$ oder auch $\|g\|_{L^q(\Omega)} \neq 0$. Mit g ist auch die Funktion $\arg(g)$ messbar (beachte $g = \arg(g)|g|$). Setze

$$h = \overline{\arg(g)}|g|^{q-1}\|g\|_{L^q(\Omega)}^{-\frac{q}{p}}.$$

Dann ist

$$\int_\Omega |h|^p \; d\mu = \int_\Omega |g|^{p(q-1)}\|g\|_{L^q(\Omega)}^{-q} \; d\mu = 1.$$

Nun wird

$$\int_\Omega hg \; d\mu = \int_\Omega |g|^q \; d\mu \|g\|_{L^q(\Omega)}^{-\frac{q}{p}} = \|g\|_{L^q(\Omega)}^{q-\frac{q}{p}} = \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Damit ist klar, dass die Abbildung T eine Isometrie (und damit injektiv) ist. Für die Surjektivität benötigt man einen maßtheoretischen Satz (Satz von Radon-Nykodym), daher wollen wir diesen Teil des Beweises weglassen. Die Idee folgt dem entsprechenden Beweis für die ℓ^p-Räume. □

2.5 Kompaktheitskriterien

2.5.1 Totale Beschränktheit

Definition 2.5.1.1
In einem Banachraum X wird eine Menge $S \subset X$ als total beschränkt *bezeichnet, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ gilt: es gibt eine endliche Menge $N \subset X$, mit*

$$S \subset N + B_\varepsilon(0).$$

Der wesentliche Satz dieses Abschnittes ist die Äquivalenz von Kompaktheit und totaler Beschränktheit.

Satz 2.5.1.2
Eine Teilmenge S eines Banachraumes X ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und total beschränkt ist.

Beweis. Ist K kompakt, so ist K offensichtlich total beschränkt. Deshalb brauchen wir uns nur mit der Gegenrichtung zu beschäftigen. Sei also K total beschränkt. Wir zeigen K ist folgenkompakt. Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K und $\eta > 0$. Dann gibt es eine endliche Überdeckung von K mit Kugeln $B_\eta(\xi_j)$, $j = 1, \dots, n(\eta)$. Eine dieser Kugeln $B_\eta(\xi^1)$ enthält unendlich viele Glieder der Folge, wir wählen diese als Teilfolge $y_{n_k^1}$ aus. Angenommen, wir hätten bereits eine Kugel mit Radius $\frac{\eta}{2^m}$ gefunden und darin eine Teilfolge $y_{n_k^m}$ unserer ursprünglichen Folge. Dann überdecken wir $B_{\frac{\eta}{2^m}}(\xi^m)$ mit endlich vielen Kugeln des Radius $\frac{\eta}{2^{m+1}}$. Davon gibt es eine mit unendlich vielen Folgengliedern und wir konstruieren die entsprechende Teilfolge. Wir wählen nun die Folge

$$\{y_{n_k^k}\}_{k\in\mathbb{N}}$$

aus. Das m-te Glied und alle darauf folgenden sind in $B_{\frac{\eta}{2^m}}(\xi^m)$. Daher ist diese Folge eine Cauchyfolge, der Grenzwert existiert und ist in K. Damit ist K folgenkompakt. □

Man beachte, dass die Aussage dieses Satzes bereits in metrischen Räumen gilt. Der Beweis kann unverändert übertragen werden.

2.5.2 Der Satz von Ascoli-Arzéla

Der wesentliche Satz in diesem Abschnitt ist ein Kompaktheitskriterium für Räume stetiger Funktionen auf kompakten Mengen. Dazu sei K ein kompakter, metrischer Raum, $C(K;X)$ der Banachraum aller stetigen Funktionen mit Werten in einem Banachraum X.

Definition 2.5.2.1
Eine Familie von Funktionen $S \subset C(K;X)$ heißt gleichgradig stetig, *wenn zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass*

$$f \in S, d(x,y) < \delta \text{ impliziert } \|f(x) - f(y)\|_X < \varepsilon.$$

Satz 2.5.2.2 (Ascoli[11]–Arzelà[12])
Sei $S \subset C(K;X)$ eine Teilmenge. Ist S punktweise kompakt und gleichgradig stetig, so ist S relativ kompakt. Dabei bedeutet punktweise kompakt, dass für jedes $x \in S$ die Menge $\left\{f(x) \,\middle|\, f \in S\right\}$ in X kompakt ist.

Beweis. Beweisplan:

1. Konstruiere eine abzählbare dichte Teilmenge $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ in K.
2. Finde eine Folge $\{d_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, die an allen Stellen x_j konvergiert.
3. Zeige, dass diese Folge eine Cauchyfolge in $C(K;X)$ ist.

Erster Schritt:

Als kompakter metrischer Raum ist K separabel. Zu $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Überdeckung

$$\bigcup_{x\in K} B_{\frac{1}{n}}(x).$$

Wegen der Kompaktheit können wir endlich viele Punkte

$$x_1^n, \ldots, x_{j(n)}^n$$

auswählen, so dass

$$\bigcup_{i=1}^{j(n)} B_{\frac{1}{n}}(x_i^n)$$

eine Überdeckung von K darstellt. Setze

$$T = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_1^n, \ldots, x_{j(n)}^n\}.$$

[11] Giulio Ascoli (20.11.1843–12.7.1896) versuchte das sogenannte Dirichletsche Prinzip in der Variationsrechnung zu rechtfertigen. Dabei gelang es ihm, das nach ihm benannte Kriterium für die relative Kompaktheit von Funktionenmengen zu beweisen. Durch die Fortführung dieser Ideen im Werk von Arzelà wurde dies zu einer Grundlage der Funktionalanalysis.

[12] Cesare Arzelà (6.3.1847–15.3.1912) stammt aus einfachen Verhältnissen. Ab 1880 hatte er einen Lehrstuhl für Analysis an der Universität Bologna. Er führte einen Begriff der gleichmäßigen Konvergenz ein und zeigte die Stetigkeit der Grenzfunktionen, wie auch Vertauschungssätze für das Riemannsche Integral. Er verallgemeinerte das Kompaktheitskriterium von Ascoli. Diese Arbeit wurde zum Ausgangspunkt von wichtigen Überlegungen zur Funktionalanalysis.

T ist abzählbar und dicht in K. Nach Abzählen dieser Menge erhalten wir eine Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, die dicht in K liegt.

Zweiter Schritt:

Nun betrachten wir eine Folge $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ in S. Auswerten bei x_1 liefert die Werte

$$\{f_j(x_1)\}_{j\in\mathbb{N}},$$

die eine beschränkte Folge bilden. Damit können wir eine Teilfolge

$$\{f_{j_1\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$$

der Funktionenfolge auswählen, die bei x_1 konvergiert. Angenommen, nach $r-1$ Selektionen von Teilfolgen haben wir eine Folge

$$\{f_{j_1\circ\cdots\circ j_{r-1}(\nu)}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$$

die an den Punkten $x_1,\ldots,x_{r-1}$ konvergiert. Daraus wählen wir nun eine Teilfolge

$$\{f_{j_1\circ\cdots\circ j_{r-1}\circ j_r}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$$

aus, die nun auch noch bei x_r konvergiert.

Wähle nun die Folge, die aus der r-ten Teilfolge das r-te Folgenglied auswählt, d.h.

$$\{f_{j_1(1)}, f_{j_1\circ j_2(2)},\ldots,f_{j_1\circ\cdots\circ j_r(r)},\ldots\},$$

die wir auch als Diagonalfolge $\{d_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ bezeichnen. Diese hat die Eigenschaft an allen Stellen $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ zu konvergieren.

Dritter Schritt:

Sei $\varepsilon>0$ gegeben. Wähle $\delta>0$, so dass $d(x,y)<\delta$ impliziert

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $f\in S$. Sei $R\in\mathbb{N}$ so gewählt, dass für jedes $x\in K$ ein Element $x_j\in T$ mit $j\leq R$ existiert, so dass $d(x,x_j)<\delta$. (Die Konstruktion von T zeigt, dass dies möglich ist.) Da die Folge der d_k an allen Stellen x_j konvergiert, ist für festes $j\in\mathbb{N}$

$$\{d_k(x_j)\}_{k\in\mathbb{N}}$$

eine Cauchyfolge, d.h. es existiert ein $N(j) \in \mathbb{N}$ mit

$$k_1, k_2 > N(j) \text{ impliziert } |d_{k_1}(x_j) - d_{k_2}(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wähle

$$N = \max\left\{N(j) \;\middle|\; j = 1, \ldots, R\right\}.$$

Sei nun $k_1, k_2 > N$ und $x \in K$. Finde $x_j \in T$ mit $j \leq R$ und $d(x, x_j) < \delta$. Dann ist

$$\begin{aligned} |d_{k_1}(x) - d_{k_2}(x)| &\leq |d_{k_1}(x) - d_{k_1}(x_j)| + |d_{k_1}(x_j) - d_{k_2}(x_j)| + |d_{k_2}(x_j) - d_{k_2}(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die Folge $\{d_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und damit konvergent. Also ist der Abschluss von S folgenkompakt und damit kompakt, also S relativ kompakt. □

2.5.3 Folgenräume

Satz 2.5.3.1
Es sei $1 \leq p < \infty$. Eine Menge $S \subset \ell^p$ ist genau dann kompakt, wenn S gilt: S ist

1. *abgeschlossen,*
2. *beschränkt und*
3. *für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein n, so dass $(sh^-)^n(S) \subset B_\varepsilon(0)$ ist.*

Beweis. Ist S kompakt, so ist es abgeschlossen und beschränkt und darüber hinaus, gibt es zu $\varepsilon > 0$ Folgen $\{\mathbf{x}^k\}_{k=1}^r$ mit .

$$S \subset \bigcup_{k=1}^{r} \mathbf{x}^k + B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0).$$

Zu $k \in \{1, \ldots, r\}$ gibt es ein $n(k)$ mit

$$(sh^-)^{n(k)}(\mathbf{x}^\mathbf{k}) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0).$$

Dann ist für alle $\mathbf{x} \in S$ und für $n = \max\{n(k), k = 1, \ldots, r\}$

$$(sh^-)^n(\mathbf{x}) \in B_\varepsilon(0).$$

Andererseits folgt aus den angegebenen Bedingungen, dass S total beschränkt ist, also nach Satz 2.5.1.2 kompakt ist. □

2.5.4 Räume integrierbarer Funktionen

Satz 2.5.4.1 (Fréchet[13]–Kolmogorov[14])
In $L^p(\mathbb{K}^n)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge K genau kompakt, wenn sie beschränkt ist und die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. $$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{K}^n} |f(x+t) - f(x)|^p \, d\mu = 0$$

   gleichmäßig in $f \in K$ und

2. *zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $M > 0$, so dass*

   $$\int_{\|x\|_{\mathbb{K}^n} > M} |f|^p \, d\mu < \varepsilon$$

   für alle $f \in K$.

Beweis. Wir müssen zwei Richtungen beweisen. Sei zunächst K kompakt, dann ist K abgeschlossen und beschränkt. Aus der Überdeckungseigenschaft können wir schließen, dass es zu $\varepsilon > 0$ endlich viele $f_i \in K$ gibt, so dass

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f_i).$$

da nach Konstruktion des Lebesgue-Integrales die Treppenfunktionen dicht in $L^p(\mathbb{K}^n)$ liegen gibt es zu f_i eine Treppenfunktion t_i mit

$$\|f_i - t_i\|_{L^p(\mathbb{K}^n)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

[13] Maurice René Fréchet (2.9.1879–4.6.1973) fand in seiner Dissertation den Begriff des metrischen Raumes und baute darauf ein neues abstraktes Gebäude auf. Er führte die Begriffe *separabel* und *kompakt* ein. Er hatte Vorbehalte gegen die Theorie der normierten Räume von Banach und legte mit seinem Begriff der Ableitung die Grundlagen der nichtlinearen Funktionalanalysis.

[14] Andrej Nikolajewitsch Kolmogorov (25.4.1903–20.10.1987) begann seine berufliche Arbeit als Schaffner, bevor er das Studium aufnahm. Er gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker unserer Zeit. Von ihm wurde nicht nur die moderne Wahrscheinlichkeitstheorie entscheidend geprägt, sondern auch in der Theorie der dynamischen Systeme stammen wichtige Resultate von ihm (KAM-Theorie).

Für jede Treppenfunktion in $L^p(\mathbb{K}^n)$ gibt es eine Kugel $B_{R_i}(0)$, so dass das Maß des Schnitts des Trägers der Treppenfunktion mit $\mathbb{K}^n \setminus B_{R_i}(0)$ klein wird. Damit folgt die Eigenschaft (2). Die Eigenschaft (1) gilt für Treppenfunktionen, denn für meßbare Mengen A endlichen Maßes gilt (aufgrund des Lebesgueschen Konvergenzsatzes)

$$\lim_{t\to 0} \mu\left(A \setminus (A+t) \cup (A+t) \setminus A\right) = 0.$$

Wir schätzen ab (sei $f_t(x) = f(x+t)$)

$$\begin{aligned} \|f - f_t\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|f_t - (f_i)_t\|_{L^p(\Omega)} + \|(f_i)_t - (t_i)_t\|_{L^p(\Omega)} + \\ &\qquad + \|(t_i)_t - t_i\|_{L^p(\Omega)} + \|t_i - f_i\|_{L^p(\Omega)} + \|f_i - f\|_{L^p(\Omega)} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit kommen wir zur Umkehrung. Diese führen wir auf den Satz von Ascoli-Arzéla zurück. Gegeben sei eine Menge K mit den angegebenen Eigenschaften. Definiere für $t \in \mathbb{K}^n$ die Translation $(T_t f)(x) = f(x+t)$. Unsere Bedingung gibt an, dass

$$\lim_{t\to 0} T_t f = f$$

gleichmäßig in $f \in K$ ist. Wir setzen für ein hinreichend kleines $a > 0$ mit $\omega = \omega_a = \mu(B_a(0))$

$$M_a f(x) = \frac{1}{\omega} \int\limits_{B_a(0)} T_t f(x)\, dt$$

und zeigen

1. $\lim_{a\to 0} M_a f = f$ gleichmäßig in $f \in K$.

2. $M_a f$ ist stetig,

3. $|M_a f(x)|$ ist für alle $f \in K$ und festes $a > 0$ beschränkt,

4. Für festes $a > 0$ ist $\left\{ M_a f \;\middle|\; f \in \mathbb{K} \right\}$ gleichgradig stetig.

Natürlich folgt dabei die zweite Aussage aus der vierten.

1. Wir schätzen ab ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$):

$$\begin{aligned}
\|M_a f - f\|_{L^p(\mathbb{K}^n)} &\le \frac{1}{\omega}\left(\int\limits_{\mathbb{K}^n}\left(\int\limits_{B_a(0)} |f(x+t)-f(x)|\;dt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \frac{1}{\omega}\left(\int\limits_{\mathbb{K}^n}\left(\int\limits_{B_a(0)} 1^q\;dt\right)^{\frac{p}{q}}\left(\int\limits_{B_a(0)} |f(x+t)-f(x)|^p\;dt\right)\;dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \omega^{-1+\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{\mathbb{K}^n}\int\limits_{B_a(0)} |f(x+t)-f(x)|^p\;dt\;dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \omega^{-1+\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{B_a(0)}\int\limits_{\mathbb{K}^n} |f(x+t)-f(x)|^p\;dx\;dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \omega^{-1+\frac{1}{q}}\omega^{\frac{1}{p}}\sup_{\|t\|\le a}\|T_t f - f\|_{L^p(\mathbb{K}^n)} \\
&= \sup_{\|t\|\le a}\|T_t f - f\|_{L^p(\mathbb{K}^n)}
\end{aligned}$$

Damit folgt die erste Aussage.

2. Die zweite folgt aus der unten gezeigten vierten Eigenschaft.

3. Wir kommen zur dritten Eigenschaft. Wir müssen $|M_a f(x)|$ abschätzen. Dazu betrachten wir (unter Ausnutzung der Translationsinvarianz des

Lebesgue-Maßes)

$$\begin{aligned}
|M_a f(x)| &= \left(|M_a f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{\omega}\left(\left|\int\limits_{B_a(0)} T_t f \; d\mu\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{\omega}\omega^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{B_a(0)} |T_t f|^p \; d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \omega^{-1+\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{\mathbb{K}^n} |T_t f|^p \; d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \omega^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(\mathbb{K}^n)} \\
&\leq M\omega^{-\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

wobei $M = \sup\left\{\|f\|_{L^p(\mathbb{K}^n)} \;\middle|\; f \in K\right\}$ ist, nach unserer Voraussetzung ist dies endlich. Damit haben wir eine gleichmäßige Abschätzung der $M_a f(x)$.

4. schließlich muss noch die gleichgradige Stetigkeit der Familie

$$\left\{M_a f \;\middle|\; f \in K\right\}$$

gezeigt werden. Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben, betrachte

$$\begin{aligned}
|M_a f(x_1) - M_a f(x_2)| &= \left(|M_a f(x_1) - M_a f(x_2)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{\omega}\left(\left(\int\limits_{B_a(0)} (T_t f(x_1) - T_t f(x_2))\, d\mu\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{\omega}\omega^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{B_a(0)} |T_t f(x_1) - T_t f(x_2)|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \omega^{-1+\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{\mathbb{K}^n} |f(x_1 - x_2 + s) - f(s)|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \omega^{-\frac{1}{p}}\|T_{x_1-x_2} f - f\|_{L^p(\mathbb{K}^n)} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

solange $|x_1 - x_2| < \delta$ (nach Voraussetzung). Damit ist die Menge

$$\left\{M_a f \;\middle|\; f \in K\right\}$$

nach dem Satz von Ascoli-Arzéla relativ kompakt in $C(\mathbb{K}^n; \mathbb{K})$.

Um den Beweis abzuschließen, sei $\varepsilon > 0$ gegeben, es gibt ein $a > 0$, so dass $\|M_a f - f\|_{L^p(\mathbb{K}^n)} < \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Betrachte nun die Überdeckung

$$\bigcup_{f \in K} B^{C(\mathbb{K}^n;\mathbb{K})}_{\frac{\varepsilon^{1/p}}{(2\mu(B_R(0)))^{1/p}}}(M_a f).$$

Daraus kann man eine endliche Teilüberdeckung auswählen. Speziell, gibt es daher $f_1, \ldots, f_r \in K$, so dass für alle $R > 0$ und $j = 1, \ldots, r$ gilt

$$\sup_{\|y\|_{\mathbb{K}^n} \leq R} |M_a f(y) - M_a f_j(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nun schätzen wir in der L^p-Norm (für geeignetes j) ab:

$$\|M_a f - M_a f_j\|^p_{L^p(\mathbb{K}^n)} = \int\limits_{B_R(0)} |M_a f - M_a f_j|^p\, d\mu + \int\limits_{\mathbb{K}^n \setminus B_R(0)} |M_a f - M_a f_j|^p\, d\mu.$$

Wir schätzen den ersten Term durch $\mu(B_R(0))\left(\frac{\varepsilon^{1/p}}{(2\mu(B_R(0)))^{1/p}}\right)^p$ ab. Diese Abschätzung ist unabhängig von $f \in K$. Der zweite Ausdruck wird nach oben abgeschätzt durch

$$\left(\|M_a f - f\|_{L^p(\mathbb{K}^n)} + \left(\int\limits_{\mathbb{K}^n\setminus B_R(0)} |f - f_j|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{\mathbb{K}^n\setminus B_R(0)} |f_j - M_a f_j|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p .$$

Durch geeignete Wahl von j und $a > 0$, wird dieser Ausdruck kleiner als $\varepsilon/2$. Nun überdecken die ε Kugeln um $M_a f_j$ auch K und K ist damit total beschränkt. $\square$