Kapitel 3

Schwache Topologien und kompakte Operatoren

3.1 Schwache Topologien

3.1.1 Reflexivität

Definition 3.1.1.1
Es sei X ein Banachraum, X' der Dualraum und X'' der Bidualraum. *Die Abbildung*

$$J : X \to X'' \text{ mit } Jx(x') = x'(x) \text{ für alle } x' \in X'$$

heißt kanonische Einbettung.

Definition 3.1.1.2
Ein Banachraum X heißt reflexiv, *falls die kanonische Einbettung ein toplinearer Isomorphismus ist.*

Beispiel 3.1.1.3

1. $L^p(\Omega, X)$ ist für $1 < p < \infty$ reflexiv, $L^1(\Omega, X)$ und $L^\infty(\Omega, X)$ sind beide nicht reflexiv.

2. $C([0,1], \mathbb{R})$ ist nicht reflexiv.

Satz 3.1.1.4

1. *Ist X reflexiv, so ist jeder abgeschlossene Unterraum von X reflexiv.*

2. *Ist X reflexiv, so ist X' reflexiv.*

Beweis. Siehe Übungen. ∎

Bemerkung 3.1.1.5
Es gibt nicht-reflexive Räume, die toplinear isomorph zu ihrem Bidualraum sind, ein Beispiel dafür ist der Jamesraum aus dem Abschnitt 2.1.3.

3.1.2 Topologien und Funktionale

Es sei X ein Banachraum.

Definition 3.1.2.1

1. *Die* schwache Topologie *auf dem Banachraum X ist die gröbste Topologie $\mathfrak{T}_S \subset \mathfrak{P}(X)$, für die alle $x' \in X'$ stetig sind.*
2. *Ist X' der Dualraum zu X, so ist die* schwach*-Topologie *die gröbste Topologie auf X', für die alle Funktionale $x'' \in X''$ der Form $x'' = Jx$ stetig sind.*

Bemerkung 3.1.2.2
Die schwache Topologie ist schwächer als die Normtopologie, da ja auch für die Normtopologie alle beschränkten Funktionale stetig sind. Entsprechendes gilt für die schwach-Topologie. Auf X' sind die schwache und die schwach* Topologie im allgemeinen verschieden, in reflexiven Banachräumen fallen sie natürlich zusammen.*

Im nächsten Satz beschreiben wir Konvergenz und Umgebungsbasen für die schwache, bzw. die schwach*-Topologie.

Definition 3.1.2.3

1. *Für ein Tripel $(n, \xi, \varepsilon) \in \mathbb{N} \times (X')^n \times (\mathbb{R}_+)^n$ sei*
$$U_{(n,\xi,\varepsilon)} = \left\{ x \in X \;\middle|\; |x'_k(x)| < \varepsilon_k, k = 1, \ldots, n \right\},$$
wobei $\xi = (x'_1, \ldots, x'_n)$ und $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.
2. *Entsprechend setzen wir für ein Tripel $(n, \eta, \varepsilon) \in \mathbb{N} \times X^n \times (\mathbb{R}_+)^n$*
$$V_{(n,\eta,\varepsilon)} = \left\{ x' \in X' \;\middle|\; |x'(x_k)| < \varepsilon_k, k = 1, \ldots, n \right\}.$$

Satz 3.1.2.4

1. *Die Mengen $U_{(n,\xi,\varepsilon)}$ bilden eine Nullumgebungsbasis für die schwache Topologie von X.*

2. *Die Mengen $V_{(n,\eta,\varepsilon)}$ bilden eine Nullumgebungsbasis für die schwach* Topologie auf X'.*

Beweis. Es reicht die Aussage für die Topologie auf X zu beweisen, der Rest ist dann analog. Offenkundig sind in der schwachen Topologie die Mengen der Form
$$U_{(1,x',\varepsilon)} = \left\{ x \in X \;\middle|\; |x'(x)| < \varepsilon \right\}$$
offen. Dann sind auch endliche Schnitte davon offen und jede der Mengen $U_{(n,\xi,\varepsilon)}$ ist eine offene Nullumgebung. Offenkundig ist auch jedes Funktional stetig, wenn die Familie $U_{(n,\xi,\varepsilon)}$ als Nullumgebungsbasis gewählt wird. □

Definition 3.1.2.5

1. *Wir nennen eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$* schwach konvergent, *wenn für jedes $x' \in X'$ die Folge $\{x'(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ konvergent ist.*

2. *Die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$* konvergiert schwach gegen *$x_0 \in X$, falls für alle $x' \in X'$ gilt*
$$\lim_{n\to\infty} x'(x_n) = x'(x_0)$$
ist. Wir schreiben dafür $x_n \rightharpoonup x_0$ oder auch
$$x_0 = w - \lim_{n\to\infty} x_n.$$

3. *Entsprechend nennen eine Folge $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$* schwach* konvergent, *wenn für jedes $x \in X$ die Folge $\{x'_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.*

4. *Die Folge $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$* konvergiert schwach* gegen *$x'_0 \in X'$, falls für alle $x \in X$ gilt*
$$\lim_{n\to\infty} x'_n(x) = x'_0(x)$$
ist. Wir notieren diesen Sachverhalt durch $x'_n \rightharpoonup_* x'_0$.

5. *Eine Folge in X (in X') nennen wir eine* schwache (oder eine schwach*) Cauchyfolge, *wenn für jedes $x' \in X'$ die Folge $x'(x_n)$ eine Cauchyfolge (für jedes $x \in X$ die Folge $x'_n(x)$ eine Cauchyfolge) ist.*

6. *Entsprechend nennen wir X bzw. X'* schwach *bzw.* schwach* vollständig *wenn jede schwache (schwach*) Cauchyfolge einen schwachen (schwach*) Grenzwert hat.*

Bemerkung 3.1.2.6
Aus der schwachen Konvergenz folgt nicht, dass der schwache Grenzwert existiert. Allerdings hat man den folgenden Satz.

Satz 3.1.2.7
Der schwache (bzw. schwach*) Grenzwert ist eindeutig.

Beweis. Folgt einfach aus der Tatsache, $x'(x) = 0$ für alle $x' \in X'$ impliziert $x = 0$. □

Wir benötigen den folgenden Satz, um weitere Aussagen über die schwache Topologie machen zu können. Dieser Satz hat allerdings auch eine eigenständige Bedeutung.

Satz 3.1.2.8
Ist X ein normierter Raum und X' separabel, so ist auch X separabel.

Beweis. Sei $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein abzählbare, dichte Teilmenge in X'. Dann gibt es zu jedem x'_n ein x_n mit $\|x_n\|_X = 1$ und

$$|x'_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|x'_n\|_{X'}.$$

Sei Z die Menge aller rationalen Linearkombinationen der Elemente $\left\{x_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$, d.h.

$$Z = \left\{\sum_{i=1}^{r} q_i x_i \;\middle|\; r \in \mathbb{N}, q_i \in \mathbb{Q}\right\}.$$

Dann ist Z abzählbar.

Behauptung: $\overline{Z} = X$. Angenommen, diese Behauptung sei nicht wahr, dann gibt es (Fortsetzungssatz von Hahn-Banach 1.3.3.1) ein nichttriviales Funktional $\bar{x}'$, welches auf $\overline{Z}$ verschwindet. Sei $\{x'_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die gegen $\bar{x}'$ konvergiert. Dann ist

$$\|\bar{x}' - x'_{n_k}\|_{X'} \geq |(\bar{x}' - x'_{n_k})(x_{n_k})| = |x'_{n_k}(x_{n_k})| \geq \frac{\|x'_{n_k}\|_{X'}}{2}.$$

Da die linke Seite gegen Null konvergiert, tut dies auch die rechte Seite. □

Korollar 3.1.2.9
Ein reflexiver Banachraum X ist genau dann separabel, wenn X' separabel ist.

Beweis. Es muss nur noch die Hinrichtung gezeigt werden. Wegen der Reflexivität ist mit X ist auch X'' separabel, also auch X' aufgrund des Satzes 3.1.2.8. □

Satz 3.1.2.10
Konvergiert $x_n \rightharpoonup x$ in einem normierten Raum X, so gilt

1. *$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt,*
2. *der schwache Grenzwert ist im kleinsten bzgl. der Normtopologie abgeschlossenen Unterraum, der alle Folgenglieder umfaßt,*
3. *und $\|x\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X$.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit angewandt auf die Funktionale $Jx_n \in X''$.

Wir kommen zur zweiten Behauptung: Angenommen, diese ist falsch, sei Z der entsprechende Unterraum. Wir nehmen an, dass dieser den Grenzwert x_0 nicht enthalte. Dann gibt es, nach Hahn-Banach, ein Funktional x_0', welches auf Z verschwindet und bei x_0 den Wert $1 = x_0'(x_0)$ annimmt. Dies ist ein Widerspruch zur schwachen Konvergenz $x_n \rightharpoonup x_0$.

Die dritte Behauptung ist ebenfalls klar: für $x' \in X'$ gilt

$$|x'(x)| = \lim_{n\to\infty} |x'(x_n)| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x'\|_{X'} \|x_n\|_X.$$

Wählen wir x', so dass $x'(x) = \|x\|_X$, folgt die Behauptung unmittelbar. □

3.1.3 Schwache Kompaktheit

Satz 3.1.3.1
Eine beschränkte, schwach abgeschlossene Teilmenge A eines reflexiven Banachraumes ist schwach folgenkompakt, d.h. zu jeder Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in A existiert ein $x_0 \in A$ mit $x_n \rightharpoonup x_0$. .

Beweis. Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in X, wir müssen zeigen, dass wir eine schwach konvergente Teilfolge auswählen können. Da nach Satz 3.1.2.10 der schwache Grenzwert einer Teilfolge im Abschluss des Raumes, der von den x_n aufgespannt wird, liegen muss, beschränken wir uns zunächst auf diesen Unterraum $R = \overline{\operatorname{span}[x_1, x_2, \dots]}$. Als abgeschlossener Unterraum eines reflexiven Raumes ist dieser reflexiv. Nach Konstruktion ist R separabel. Damit ist nach Korollar 3.1.2.9 der Dualraum R' separabel und hat demnach eine abzählbare dichte Teilmenge $S' \subset R'$ mit $S' = \{r'_1, r'_2, \ldots\}$. Also ist die $\mathbb{K}$-wertige Folge

$$\{r'_1(x_\nu)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$$

beschränkt und hat eine konvergente Teilfolge

$$\{r'_1(x_{j_1(\nu)})\}_{\nu \in \mathbb{N}}.$$

OBdA sei nach n Schritten eine Folge

$$\{x_{j_1 \circ \cdots \circ j_n(\nu)}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$$

ausgewählt, so dass

$$\lim_{\nu \to \infty} r'_\mu(x_{j_1 \circ \cdots \circ j_n(\nu)} \text{ für } \mu = 1, \ldots, n \text{ existiert.}$$

Betrachte die Folge

$$\{x_{j_1 \circ \cdots \circ j_\nu(\nu)}\}_{\nu \in \mathbb{N}}.$$

Dann existiert für alle $\mu \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\nu \to \infty} r'_\mu(x_{j_1 \circ \cdots \circ j_\nu(\nu)}).$$

Dann existiert sogar für alle $r' \in R'$

$$\lim_{\nu \to \infty} r'(x_{j_1 \circ \cdots \circ j_\nu(\nu)}).$$

Um die schwache Konvergenz der Folge $\xi_\nu = x_{j_1 \circ j_n(\nu)}$ zu zeigen, betrachten wir die Abbildung

$$\ell : R' \to \mathbb{K} : r' \mapsto \lim_{\nu \to \infty} r'(x_\nu).$$

Diese Abbildung ist linear und beschränkt, also ist $\ell \in R''$. Damit gibt es ein $r \in R$ mit $Jr = \ell$. Damit bleibt zu zeigen, dass

$$r = w - \lim_{\nu \to \infty} \xi_\nu.$$

Dies folgt aber sofort aus der Konstruktion. Ist die ursprüngliche Folge in A gewählt, und ist x_0 der schwache Grenzwert, so liegt $x_0 \in A$, da A schwach abgeschlossen ist. $\square$

Korollar 3.1.3.2
Ein reflexiver Banachraum X ist schwach vollständig.

Beweis. Wir zeigen zunächst: eine schwache Cauchyfolge ist beschränkt. Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwache Cauchyfolge. Dann ist für jedes $x' \in X'$ die Folge $\{x'(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Cauchyfolge und demnach beschränkt. Dann ist $\{Jx_n(x')\}_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes x' beschränkt und nach dem Satz von Banach-Steinhaus ist die Familie Jx_n beschränkt, also auch die Folge der $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Nach Satz 3.1.3.1 enthält die Folge der x_n eine schwach konvergente Teilfolge $\{x_{j(\nu)}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ mit (schwachem) Grenzwert x^*. Angenommen es gibt eine Teilfolge, die nicht schwach gegen x^* konvergiert. Durch übergang zu einer Teilfolge können wir sicher stellen, dass es ein $\varepsilon > 0$ und ein $x' \in X'$ gibt, mit

$$|x'(x_{n(\nu)}) - x'(x^*)| \geq \varepsilon \text{ für alle } \nu.$$

Dies widerspricht aber der Cauchyeigenschaft: es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m > N$

$$|x'(x_n) - x'(x_m)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei $\nu > N$, dann ist

$$\varepsilon \leq |x'(x_n(\nu) - x'(x^*)| \leq |x'(x_n(\nu) - x'(x_{j(\nu)})| + |x'(x_{j(\nu)}) - x'(x^*)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dieser Widerspruch vollendet den Beweis. □

Der Hauptsatz dieses Abschnittes macht eine wichtige Kompaktheitsaussage.

Satz 3.1.3.3
Es sei X ein Banachraum, dann ist die abgeschlossene Einheitskugel in X' schwach* kompakt.

Beweis. Wir betrachten den Fall eines reellen Raumes, der komplexe Fall ist ganz ähnlich.

Zu $x \in X$ betrachten wir das reelle Intervall $I_x = [-\|x\|_X, \|x\|_X]$. Es sei

$$C = \prod_{x\in X} I_x.$$

Nach dem Satz von Tychonov 1.1.2.12 (3) ist C kompakt. Wir betrachten nun die Menge $B' = \left\{x' \in X' \;\middle|\; \|x'\|_{X'} \leq 1\right\}$. Wir wollen zeigen, dass diese

Menge kompakt ist. Wir konstruieren nun eine Abbildung $T : B' \to C$. Dazu sei $P_x : C \to I_x : \tau \mapsto \tau_x$. Setze

$$Tx' \in C \text{ durch } P_x(Tx') = x'(x).$$

Offenkundig ist $Tx'(x) \in I_x$. Die Zuordnung T ist injektiv, denn $Tx'_1 = Tx'_2$ bedeutet, dass $x'_1(x) = x'_2(x)$ für alle $x \in X$ und daher $x'_1 = x'_2$. Nun ist $TB' \subset C$. Die Konstruktion der Umgebungsbasen in X' für die schwache Topologie impliziert, dass T in beide Richtungen stetig ist. Daher ist B' genau dann kompakt, wenn dies für TB' zutrifft. Daher genügt es zu zeigen, dass TB' abgeschlossen ist. Sei also $\sigma \in \overline{TB'}$. Wir ordnen diesem nun eine $\mathbb{R}$-wertige Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ zu, $f(x) = P_x\sigma$. Wir wollen zeigen, dass diese Abbildung linear ist. Dazu seien $x_1, x_2 \in X$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und es sei das Element U der Umgebungsbasis von σ gegeben, das durch die Forderung $\zeta \in U$, falls

$$|P_{x_1}\sigma - P_{x_1}\zeta| < \varepsilon,\ |P_{x_2}\sigma - P_{x_2}\zeta| < \varepsilon$$

und

$$|P_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}\sigma - P_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}\zeta| < \varepsilon,$$

definiert ist (beachte die Topologie in Produkten). Da $\sigma \in \overline{TB'}$, gibt es in jeder Umgebung Elemente in TB'. Sei Tx' ein solches Element. Dann ist

$$|P_{x_1}\sigma - P_{x_1}Tx'| < \varepsilon,\ |P_{x_2}\sigma - P_{x_2}Tx'| < \varepsilon,$$

und

$$|P_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}\sigma - P_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}Tx'| < \varepsilon.$$

Wegen der Linearität von x' können wir nun abschätzen

$$\begin{aligned}
|\lambda_1 P_{x_1}\sigma + \lambda_2 P_{x_2}\sigma - P_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}\sigma| &\leq |\lambda_1||P_{x_1}\sigma - x'(x_1)| + |\lambda_2||P_{x_2}\sigma - x'(x_2)| + \\
&\quad\ |P_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}\sigma - x'(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)| \\
&\leq (|\lambda_1| + |\lambda_2| + 1)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Da ε beliebig ist, folgt die Linearität der Auswertung von σ. Da das zugehörige Funktional auch beschränkt ist, ist $\sigma \in TB'$ und der Beweis ist erbracht. □

Satz 3.1.3.4
Ist X separabel, so ist $\overline{B_1(0)} \subset X'$ schwach folgenkompakt.*

Beweis. Die Separabilität impliziert das erste Abzählbarkeitsaxiom für die schwach* Topologie, und dann folgt aus kompakt, folgenkompakt. □

Satz 3.1.3.5
Ist X reflexiv und separabel, so ist $\overline{B_1(0)} \subset X$ schwach folgenkompakt.

Beweis. Mit X ist auch X'' separabel und damit auch X'. $B_1(0) \subset X''$ ist schwach* folgenkompakt bezüglich der Anwendung der Funktionale auf $x' \in X'$. Dann ist aber auch $B_1(0) \subset X$ schwach folgenkompakt. □

3.2 Kompakte Operatoren

In diesem Kapitel betrachten wir Operatoren, die in mehrfacher Hinsicht ausgezeichnet sind. Historisch sind sie entstanden durch die Betrachtung von Integraloperatoren, die wir ja auch schon in den Übungen betrachtet hatten.

3.2.1 Kompakte Operatoren

Definition 3.2.1.1
Es seien X, Y Banachräume. Ein Operator $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt kompakt, *wenn er beschränkte Mengen in X auf* relativ kompakte *Mengen in Y abbildet. Die Menge der kompakten Opertoren von $X \to Y$ werde mit $\mathcal{K}(X, Y)$ bezeichnet.*

Beispiel 3.2.1.2

1. *Es sei $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten*

$$Lx(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)\, ds.$$

   Dieser Operator ist als Operator $L : C([0,1], \mathbb{R}) \to C([0,1], \mathbb{R})$ kompakt.

2. *Operatoren mit endlich dimensionalem Bild sind kompakt.*

Satz 3.2.1.3
Sind X und Y Banachräume, und ist $T : X \to Y$ kompakt, so folgt aus $x_n \rightharpoonup x_0$, dass $Tx_n \to_Y Tx_0$ konvergiert.

Beweis. Angenommen $x_n \rightharpoonup x_0$, dann folgt, da T beschränkt ist, dass $Tx_n \rightharpoonup Tx_0$. Angenommen, die Folge $y_n = Tx_n$ konvergiert in der Normtopologie nicht gegen $y_0 = Tx_0$. Dann gibt es eine Teilfolge y_{n_k}, die von y_0 wegbeschränkt ist, also für eine Konstante $K > 0$ gilt

$$\|y_{n_k} - y_0\|_Y > K$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Da $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ schwach konvergent ist, ist die Folge nach Satz 3.1.2.10 (1) beschränkt, T ist als kompakt vorausgesetzt und demnach hat die Folge $y_{n_k} = Tx_{n_k}$ eine konvergente Teilfolge. Diese konvergiert dann gegen ein Element $z \neq y_0$. Diese Teilfolge y_{n_k} konvergiert dann auch schwach gegen z. Da der schwache Grenzwert eindeutig ist, ist $z = y_0$ und dies ist ein Widerspruch. □

Für den nächsten Satz benötigen wir noch ein Hilfsmittel aus der Topologie.

Satz 3.2.1.4
Es seien U, X, Y, Z Banachräume. Die Menge der kompakten Operatoren $\mathcal{K}(X,Y)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{L}(X,Y)$, ferner gilt für $T \in \mathcal{K}(X,Y)$, $T_1 \in \mathcal{L}(U,X)$ und $T_2 \in \mathcal{L}(Y,Z)$, $TT_1 \in \mathcal{K}(U,Y)$ und $T_2T \in \mathcal{K}(X,Z)$.

Bemerkung 3.2.1.5
Ist $X = Y$, so besagt der vorstehende Satz, dass $\mathcal{K}(X,Y)$ ein zweiseitiges, abgeschlossenes Ideal *in $\mathcal{L}(X,Y)$ ist.* [1]

Beweis von Satz 3.2.1.4: Beschränkte Operatoren bilden beschränkte Mengen wieder auf beschränkte Mengen ab, deshalb ist TT_1 kompakt. Ist eine Menge relativ kompakt, so gilt dies auch für das Bild unter einem beschränkten Operator (stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt! Für stetige Abbildungen gilt $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$, vgl. Aufgabe 7 (4). Ist also $\bar{A}$ kompakt, so gilt $f(A) \subset f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$, da $f(\bar{A})$ abgeschlossen ist.) Bleibt zu zeigen, dass die kompakten Operatoren einen abgeschlossenen Unterraum von $\mathcal{L}(X,Y)$ bilden. Seien $L \in \overline{\mathcal{K}(X,Y)}$ und $B \subset X$ eine beschränkte Menge gegeben. Wir müssen zeigen, dass LB relativ kompakt ist. Sei

$$C = \sup_{x\in B} \|x\|_X.$$

[1] Man beachte ein (zweiseitiges) Ideal I in einem Ring R ist eine Teilmenge, die selbst ein Ring ist, und für die zusätzlich gilt $RI \subset I$, $IR \subset I$.

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ mit

$$\|L - K\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \frac{\varepsilon}{2C}.$$

Wir überdecken KB mit endlich vielen Kugeln $B_r(y_i),\ i = 1,\dots,s$ mit Radius $r = \frac{\varepsilon}{2}$. Sei V die Vereinigung der Kugeln $B_\varepsilon(y_i), i = 1,\dots s$. Dann ist $LB \subset V$, denn für $x \in B$ gibt es dann ein y_i mit $\|Kx - y_i\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist aber

$$\|Lx-y_i\|_Y \leq \|Lx-Kx\|_Y+\|Kx-y_i\|_Y \leq \|L-K\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|x\|_X+\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2C}C+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Damit ist $\overline{LB}$ total beschränkt, also kompakt. □

Satz 3.2.1.6
Seien X, Y Banachräume. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ ist genau dann kompakt, wenn T' kompakt ist.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass aus T ist kompakt folgt, dass T' kompakt ist. Sei S die abgeschlossene Einheitskugel in X, S' die abgeschlossene Einheitskugel in Y'. Wir betrachten eine Folge $y'_k \in S'$ und die Funktionen

$$F_j(y) = y'_j(y) : Y \to \mathbb{K}.$$

Die Menge $M = \overline{TS}$ ist kompakt und die F_j eingeschränkt auf M ist gleichgradig stetig, denn

$$|F_j(y_1) - F_j(y_2)| \leq \|y_1 - y_2\|_Y.$$

Daher kann aus der Folge $F_{j_{|M}}$ eine konvergente Teilfolge $F_{j_{k_{|M}}}$ausgewählt werden. (Begründung: Satz von Ascoli-Arzela oder man wähle eine abzählbare, dichte Teilmenge z_k mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass zu jedem $\delta > 0$ eine endliche Menge Z_δ der z_k ausgewählt werden kann, so dass für jeden Punkt y gilt $\inf\left\{\|y - z\|_Y \,\middle|\, z \in Z_\delta\right\} < \delta$. Wähle dann für jeden Punkt eine konvergente Teilfolge, und dann Diagonalfolge etc.. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit ist diese dann überall konvergent.) Dann konvergiert $y'_{j_k}(Tx) = T'y'_{j_k}(x)$ gleichmäßig für $x \in S$ und dies beweist die Behauptung.

Wir kommen zur Gegenrichtung. Ist T' kompakt, so ist nach dem ersten Teil T'' kompakt. Dies impliziert unmittelbar, dass T kompakt ist. □

3.2.2 Spektraleigenschaften

Wir wollen nun über Spektraleigenschaften kompakter Operatoren sprechen. Dazu betrachten wir zunächst den Begriff des Eigenwertes aus der linearen Algebra. In diesem Abschnitt seien der Einfachheit halber alle auftretenden Vektorräume komplex. Sei also X ein endlich dimensionaler, komplexer Vektorraum und $A : X \to X$ eine lineare Abbildung. Eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert* von A, falls es einen Vektor $x \in X$, $x \neq 0$ gibt, mit

$$Ax = \lambda x, \text{ oder } (A - \lambda \mathbb{1})x = 0.$$

Dies ist aber äquivalent zu $A - \lambda \mathbb{1}$ ist nicht injektiv oder auch zu $A - \lambda \mathbb{1}$ ist nicht surjektiv. Injektivität und Surjektivität sind in endlich dimensionalen Räumen für Abbildungen $X \to X$ äquivalent! Die Gesamtheit aller Eigenwerte bildet das *Spektrum* der Matrix A und wird mit Σ_A bezeichnet.

Aufgabe 3.2.2.1
Man zeige: die Funktion $f_A : \mathbb{C} \setminus \Sigma_A \to \mathbf{GL}(X) : \lambda \mapsto (A - \lambda \mathbb{1})^{-1}$ *ist* holomorph[2].

In einem unendlich dimensionalen Raum fallen Injektivität und Surjektivität nicht zusammen, also muß man beim Begriff des Spektrums genauer unterscheiden. Wir beginnen mit einer linearen Abbildung $T : X \to X$, die nicht notwendig beschränkt ist.

Definition 3.2.2.2

1. *Eine komplexe Zahl* λ *heißt* Eigenwert *von* T*, wenn* $T - \lambda \mathbb{1}$ *nicht injektiv ist, oder es ein* $x \in X$, $x \neq 0$ *gibt, mit*

   $$Tx = \lambda x.$$

   Die Menge aller Eigenwerte werde mit Σ_T^E *bezeichnet.*

2. *Eine komplexe Zahl* $\lambda \in \mathbb{C}$ *liegt im* kontinuierlichen Spektrum, *wenn* $T - \lambda \mathbb{1}$ *injektiv ist, das Bild* BILD$(T - \lambda \mathbb{1})$ *dicht in* X *liegt und die Inverse* $(T - \lambda \mathbb{1})^{-1}$ *nicht beschränkt ist. Die Menge aller Punkte im kontinuierlichen Spektrum bezeichnen wir mit* Σ_T^C.

[2]Wir erinnern an den Begriff der holomorphen Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ als eine Abbildung, die einer der beiden äquivalenten Bedingungen genügt: (i) sie ist komplex differenzierbar, (ii) sie ist analytisch (d.h. als Potenzreihe darstellbar). Für Abbildungen von $\mathbb{C}$ in komplexe Räume definiert man einen Begriff der *Holomorphie* durch die Darstellbarkeit einer konvergenten Potenzreihe.

3. *Eine komplexe Zahl* $\lambda \in \mathbb{C}$ *liegt im* Residualspektrum, *wenn* $T - \lambda\mathbb{1}$ *injektiv ist und das Bild* $\mathrm{BILD}(T - \lambda\mathbb{1})$ *nicht dicht in* X *liegt. Die Menge aller Punkte im Residualspektrum bezeichnen wir mit* Σ_T^R.

4. *Das* Spektrum Σ_T *des Operators* T *ist definiert als*

$$\Sigma_T = \Sigma_T^E \cup \Sigma_T^C \cup \Sigma_T^R.$$

5. *Das Komplement*

$$P_T = \mathbb{C} \setminus \Sigma_T$$

bezeichnen wir als Resolventenmenge *von* T.

Definition 3.2.2.3
Die Resolvente *einer linearen Abbildung* T *ist die Funktion*

$$R(T, \cdot) : \mathbb{P}_T \to \mathcal{L}(X) : \lambda \mapsto (T - \lambda\mathbb{1})^{-1}.$$

Aufgabe 3.2.2.4

1. *In einem Banachraum* X *gibt es zu jedem abgeschlossenen Unterraum* $Y \neq X$ *und zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $x \in X$ *mit*

$$\|[x]\|_{X/Y} > 1 - \varepsilon.$$

2. *Ein Banachraum ist genau dann endlich dimensional, wenn die abgeschlossene Einheitskugel kompakt ist.*

3. *Ein Banachraum ist genau dann endlich dimensional, wenn die Abbildung* $\mathbb{1}_X : X \to X$ *kompakt ist.*

4. *Hat ein beschränkter linearer Operator auf einem Banachraum* X *für einen Wert* $\lambda \in P_T$ *eine kompakte Resolvente, so ist der Raum* X *endlich dimensional.*

Aufgabe 3.2.2.5
Ist T *ein beschränkter, linearer Operator, so ist* P_T *offen und es gilt*

$$P_T = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; T - \lambda\mathbb{1}_X \text{ ist bijektiv} \right\}.$$

Satz 3.2.2.6
$R(T, \cdot) : P_T \to \mathcal{L}(X)$ *ist analytisch und erfüllt eine Abschätzung der Form*

$$\|R(T, \lambda)\|_{\mathcal{L}(X)}^{-1} \leq \mathrm{dist}(\lambda, \Sigma_T).$$

Beweis. Sei $\lambda \in P_T$ und $\mu \in \mathbb{C}$, so dass

$$|\mu| \|R(T,\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} < 1.$$

Wir betrachten

$$(\lambda + \mu)\mathbb{1} - T) = (\lambda \mathbb{1} - T)(\mathbb{1} - \mu R(T,\lambda)).$$

□

Definition 3.2.2.7
Der Eigenraum *zum* Eigenwert λ *ist der Unterraum*

$$E_\lambda = \left\{ x \in X \;\middle|\; Tx = \lambda x \right\}.$$

Entsprechend definieren wir

$$E'_\lambda = \left\{ x' \in X' \;\middle|\; T'x' = \lambda x' \right\}.$$

Satz 3.2.2.8
Ist $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ *ein Eigenwert von* $T \in \mathcal{K}(X)$*, so ist* $\ker(T - \lambda \mathbb{1}) = E_\lambda$ *endlich dimensional, entsprechendes gilt für* $E'_\lambda = \ker(T' - \lambda \mathbb{1}_{X'})$.

Beweis. Offensichtlich ist E_λ ein abgeschlossener Unterraum. Die Einheitskugel B_1^λ in E_λ ist beschränkt. Damit ist TB_1^λ relativ kompakt. Da $TB_1^\lambda = \lambda B_1^\lambda$ ist $\overline{B_1^\lambda}$ kompakt und daher ist E_λ endlich dimensional. Der gleiche Beweis wird auf E'_λ angewendet. □

Satz 3.2.2.9
Die Bildräume von $T - \lambda \mathbb{1}$ *bzw.* $T' - \lambda \mathbb{1}_{X'}$ *sind abgeschlossen.*

Beweis. Es reicht die Abgeschlossenheit von $\mathrm{BILD}(T - \lambda \mathbb{1})$ zu beweisen, weil die zweite Aussage dann aus dem Satz vom abgeschlossenen Wertebereich Satz 1.5.5.2 folgt. Betrachte eine Folge $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BILD}(T - \lambda \mathbb{1})$ welche gegen einen Wert $y_0 \in X$ konvergiert. Zu zeigen ist $y_0 \in \mathrm{BILD}(T - \lambda \mathbb{1})$. Sei x_n, so gewählt dass $Tx_n - \lambda x_n = y_n$.

In einem ersten Schritt zeigen wir, dass es eine beschränkte Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit $Tz_n - \lambda z_n = y_n = Tx_n - \lambda x_n$. Sei dazu $\|[x_n]\|_{X/E_\lambda}$. Ist die Folge

$\{\|[x_n]\|_{X/E_\lambda}\}_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, so gibt es eine Teilfolge $\{\|[x_{n_k}]\|_{X/E_\lambda}\}_{k\in\mathbb{N}}$, welche gegen unendlich konvergiert. Sei

$$\bar{x}_{n_i} = \frac{1}{\|[x_{n_k}]\|_{X/E_\lambda}} x_{n_k}.$$

Dann ist

$$\|[\bar{x}_{n_k}]\|_{X/E_\lambda} = 1.$$

Also gibt es Punkte $v_{n_k} \in E_\lambda$, so dass $w_{n_k} = \bar{x}_{n_k} - v_{n_k}$ die Norm $\|w_{n_k}\|_X \leq 2$ haben. Dann folgt aber

$$(T - \lambda \mathbb{1}_X) w_{n_k} = (T - \lambda \mathbb{1}_X) \bar{x}_{n_k} = \frac{1}{\|[x_{n_k}]\|_{X/E_\lambda}} y_{n_k} \to 0.$$

da T kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge der Tw_{n_k}. Dann konvergiert aber die Folge der w_{n_k} selbst (beachte: $(T - \lambda\mathbb{1})w_{n_k}$ und Tw_{n_k} konvergent $\lambda \neq 0$ impliziert w_{n_k} konvergiert). Sei also w_{n_k} gegen w_0 konvergent. Dann ist $(T - \lambda\mathbb{1}_X)w_0 = 0$ und $\|[w_0]\|_{X/E_\lambda} \geq 1$. Dies ist ein Widerspruch, der zeigt, dass die Folge der $\|[x_n]\|_{X/E_\lambda}$ beschränkt ist. Damit kann man ein Folge v_n in E_λ angeben, so dass $x_n - v_n$ beschränkt ist. Wähle nun $z_n = x_n - v_n$. Dies ist eine beschränkte Folge.

Im zweiten Schritt wählen wir (unter Ausnutzung der Kompaktheit von T) aus der Folge der z_i eine Teilfolge $\{z_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ aus, so dass Tz_{i_k} konvergiert. Dann konvergiert $z_{n_k} \to y_0 + \lim Tz_{n_k}$. Sei $\lim z_{n_k} = x_0$. Dann ist $Tx_0 = y_0$ und die Behauptung ist gezeigt. □

Der Satz vom abgeschlossenen Wertebereich garantiert nun dass BILD$(T - \lambda\mathbb{1}_X) =^\perp \ker(T' - \lambda\mathbb{1}'_X)$. Sei nun

$$E_\lambda^n = \ker(T - \lambda\mathbb{1}_X)^n.$$

Es ist klar, dass

$$(T - \lambda\mathbb{1}_X)^n = (-1)^n \lambda^n \mathbb{1}_X + \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} (-1)^{n-\nu} \lambda^{n-\nu} T^\nu$$

ist und daher eine kompakte Störung der Identität ist. Damit ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Dimension $\dim E_\lambda^n$ endlich (und natürlich monoton wachsend in n).

Satz 3.2.2.10
Es sei $\lambda \neq 0$. Dann ist die Folge $e(n) = \dim E_\lambda^n$ ist beschränkt, genauer es gibt ein $k \in N$, so dass für $n < k$ $e(n) < e(n+1)$ ist und $e(n) = e(k)$ für alle $n \geq k$.

Beweis. Zu zeigen ist $e(n) = e(n+1)$ impliziert, dass $e(n) = e(n+m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Ist dies gezeigt, so sei $k = \min \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, e(n) = e(n+1) \right\}$. Dann folgt, für $n < k$ die strenge Monotonie und $n \geq k$ die Konstanz der Folge $e(n)$. Dass die Menge $\left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, e(n) = e(n+1) \right\}$ nichtleer ist, sieht man mit folgendem Widerspruch: angenommen, es gibt eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in E_\lambda^n$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\operatorname{dist}(x_{n+1}, E_\lambda^n) \geq \frac{1}{2}$. Sei oBdA $m < n$ und $E_\lambda^m \subset E_\lambda^n$. Dann ist $L = T - \lambda\mathbb{1}$

$$\|Tx_n - Tx_m\|_X = \|\lambda x_n + \underbrace{Lx_n - \lambda x_m - Lx_m}_{\in E_\lambda^{n-1}}\|_X \geq \frac{|\lambda|}{2} > 0.$$

Dies widerspricht der Kompaktheit von T (existenz einer konvergenten Teilfolge).

Sei also $e(n) = e(n+1)$, wegen $E_\lambda^n \subset E_\lambda^{n+1}$, impliziert dies, dass $E_\lambda^n = E_\lambda^{n+1}$. Sei also $x \in E_\lambda^{n+k}$, $k \geq 1$ d.h. $L^{n+k}x = 0$ für $L = T - \lambda\mathbb{1}_X$. Dann ist $L^k x \in \ker L^n$ und $L^{k-1}x \in \ker L^{n+1}$. Da $\ker L^n = \ker L^{n+1}$ ist, ist dann auch $L^{k-1}x \in \ker L^n$ und $x \in E_\lambda^{n+k-1}$. Ist $n + k - 1 > n$, so läßt sich dieser Schritt wiederholen und es folgt $E_\lambda^{n+k} = E_\lambda^n$ und speziell $e(n+k) = e(n)$. □

Korollar 3.2.2.11
Ist $\operatorname{BILD}(T - \lambda\mathbb{1}_X) = X$, *so ist* $E_\lambda = \{0\}$.

Beweis. Angenommen, die Aussage ist falsch und x_0 ist so gewählt, dass $Lx_0 = (T - \lambda\mathbb{1}_X)x_0 = 0$. Konstruiere eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $Lx_n = x_{n-1}$ für $n \geq 1$. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$L^{n+1}x_n = 0 \text{ aber } L^n x_n = x_0.$$

Daher ist $E_\lambda^n \neq E_\lambda^{n+1}$ und dies ergibt einen Widerspruch. □

Korollar 3.2.2.12
Es gilt $\operatorname{BILD}(T - \lambda\mathbb{1}_X) = X$ *genau dann wenn* $E_\lambda = \{0\}$.

Beweis. Die eine Richtung wurde eben gezeigt. Für die andere Richtung überlegen wir uns, dass $E_\lambda = \{0\}$ impliziert, dass $\mathrm{BILD}(T' - \lambda \mathbb{1}_{X'}) = X'$ und daher wegen Korollar 3.2.2.11 folgt $E'_\lambda = \{0\}$ und damit wieder mit dem Satz vom abgeschlossenen Wertebereich $\mathrm{BILD}(L) = X$. ∎

Satz 3.2.2.13
Für jedes $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ ist $\dim E_\lambda = \dim E'_\lambda$.

Für den Beweis benötigen wir noch eine nützliche Hilfsaussage.

Lemma 3.2.2.14
Sind $x'_1, \ldots, x'_n$ linear unabhängige Funktionale in X', so gibt es Elemente $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $x'_j(x_i) = \delta_{ij}$ für $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$.

Beweis. Sei $K_j = \ker x'_j$ und

$$M_j = \bigcap_{k=1, k\neq j}^{n} K_k.$$

Wir zeigen

$$M_j \subset K_j \text{ genau dann wenn } x'_j \in \mathrm{span}[x'_1, \ldots x'_{j-1}, x'_{j+1}, \ldots, x'_n]. \quad (3.2.2.15)$$

Beginnen wir mit der Rückrichtung, also $x'_j \in \mathrm{span}[x'_1, \ldots x'_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x'_n]$. Sei $x \in M_j$. Nach Definition verschwinden alle x'_k, $k \neq j$ im Punkt x und da x'_j eine Linearkombination dieser x'_k ist auch $x'_j(x) = 0$ und $x \in K_j$, also $M_j \subset K_j$.

Wir kommen zur Hinrichtung.

Sei also $M_j \subset K_j$. Wir betrachten eine Abbildung

$$A : X \to \mathbb{K}^{n-1} : x \mapsto \left(x'_1(x), \ldots x'_{j-1}(x), x'_{j+1}(x), \ldots, x'_n(x)\right).$$

Dann ist $AX \subset \mathbb{K}^{n-1}$ ein abgeschlossener Unterraum. Darauf definieren wir ein Funktional ψ durch

$$\psi(Ax) = x'_j(x).$$

Zunächst ist zu zeigen, dass ψ wohldefiniert ist. Ist $Ax_1 = Ax_2$, so ist $x_1 - x_2 \in \ker A = M_j \subset K_j$ und $x'_j(x_1) = x'_j(x_2)$.

Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es eine Fortsetzung von ψ auf $\mathbb{K}^{n-1}$, nennen wir diese wieder ψ. Dieses Funktional hat die Form

$$\psi(y) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i y_i,\ \ \alpha_i \in \mathbb{K}.$$

Für $x \in X$ gilt daher mit $\beta_i = \alpha_i,\ i < j, \beta_i = \alpha_{i-1},\ i > j$

$$\sum_{i \neq j} \beta_i x_i'(x) = \psi(Ax) = x_j'(x).$$

Also ist x_j' Linearkombination der restlichen Funktionale.

Mit der Hilfsaussage aus Gleichung (3.2.2.15) läßt sich nun der Satz beweisen. Sei $x_j \in M_j \setminus K_j$. Dann ist $x_j'(x_j) \neq 0$ und $x_k'(x_j) = 0$ für $k \neq j$. Durch Normalisierung ist der Satz bewiesen. □

Beweis von Satz 3.2.2.13. Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis für E_λ und $\xi_1, \ldots, \xi_m$ eine Basis für E_λ'. Nun gibt es (nach dem Satz von Hahn-Banach) $x_1' \ldots, x_n'$ mit $x_i'(x_j) = \delta_{ij},\ i, 1 = 1, \ldots, n$. Gleichzeitig gibt es auch nach Lemma 3.2.2.14 $\zeta_1, \ldots, \zeta_m \in X$ mit $\xi_i(\zeta_j) = \delta_{i,j},\ i, j = 1, \ldots, m$. Wir zeigen zunächst $n \geq m$ und nehmen daher an $n < m$. Dann setzen wir

$$Sx = Tx + \sum_{i=1}^{n} x_i'(x)\zeta_i.$$

S ist kompakt (als Summe eines kompakten Operators und eines mit endlich dimensionalen Bild). Wir beweisen zunächst die Zwischenbehauptung

$$\ker S - \lambda \mathbb{1}_X = \{0\}. \tag{3.2.2.16}$$

Angenommen $x \in \ker S - \lambda \mathbb{1}_X$. Dann ist $\lambda x = Sx$ und

$$Tx - \lambda x = \sum_{i=1}^{n} x_i'(x)\zeta_i.$$

Wenden wir auf diese Gleichung ξ_j an, so erhalten wir mit

$$\begin{aligned} \xi_j\left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(x)\zeta_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} x_i'(x)\xi_j(\zeta_i) \\ &= x_j'(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'_j(x) &= \xi_j(Tx - \lambda 1\!\!1_X x) \\ &= (T'\xi_j - \lambda\xi_j)x \\ &= 0, \end{aligned}$$

da $\xi_j \in E'_\lambda$. Also ist $x'_j(x) = 0$, $j = 1, \ldots, n$ und daher $Tx = \lambda x$ und $x \in E_\lambda$. Also ist

$$x = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i x_i.$$

Wir wenden x'_j auf diese Gleichung an und finden

$$0 = x'_j(x) = \sigma_j.$$

Also ist $x = 0$ oder

$$\ker S - \lambda 1\!\!1_X = \{0\}.$$

Nach Korollar 3.2.2.12 ist dann $\mathrm{BILD}(S - \lambda 1\!\!1_X) = X$ und speziell existiert ein $x \in X$ mit

$$Sx - \lambda x = \zeta_{n+1}.$$

Dann erhalten wir

$$1 = \xi_{n+1}(\zeta_{n+1}) = \xi_{n+1}(Sx - \lambda x) = \xi_{n+1}\left(Tx - \lambda x + \sum_{i=1}^{n} x'_i(x)\zeta_i\right) = 0,$$

denn $Tx - \lambda x$ ist nach Konstruktion in $\ker \xi_{n+1}$ und $\xi_{n+1}(\zeta_j) = 0$ für $j \leq n$. Dies ist ein Widerspruch und $m \leq n$.

Für den zweiten Schritt überlegen wir uns, dass die bisher bewiesene Aussage impliziert

$$\dim E''_\lambda \leq \dim E'_\lambda.$$

Offenkundig ist $\dim E''_\lambda \geq \dim E_\lambda$ und damit ist die Behauptung gezeigt. □

3.2.3 Fredholm-Operatoren

Wir erinnern an die Definition 1.4.1.10 eines Fredholmoperators. In engem Zusammenhang damit steht der sogenannte Fredholmindex, den wir jetzt einführen.

Definition 3.2.3.1
Sei $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ ein Fredholmoperator. Dann nennt man die Differenz

$$\operatorname{ind}(T) = \dim\ker T - \operatorname{codim}\operatorname{BILD}(T)$$

den Fredholmindex *von T. Ein abgeschlossenes Komplement des Bildes wird auch als* Kokern $\operatorname{coker} T$ *von T bezeichnet.*

Satz 3.2.3.2
Sei X ein Banachraum, $T \in \mathcal{K}(X,Y)$, dann ist $\mathbb{1}_X + T$ ein Fredholmoperator vom Fredholmindex 0.

Beweis. Wir hatten bereits gesehen (Sätze 3.2.2.8 und 3.2.2.9), dass Kern und Bild von $\mathbb{1}+T$ abgeschlossen sind. Aus $\dim\ker(\mathbb{1}_X+T) = \dim\ker(\mathbb{1}_{X'}+T')$ (Satz 3.2.2.13) folgt mit dem Satz vom abgeschlossenen Wertebereich 1.5.5.2 $\operatorname{codim}\operatorname{BILD}(\mathbb{1}_X+T) = \dim\ker(\mathbb{1}_{X'}+T') = \dim\ker(\mathbb{1}_X+T)$ und damit ist die Behauptung gezeigt. □

Wir hatten bereits in den Übungen (Aufgabe 19) den folgenden Störungssatz gezeigt, der Vollständigkeit halber geben wir hier den Beweis an.

Satz 3.2.3.3

1. *Die Menge der Fredholmoperatoren ist offen in $\mathcal{L}(X,Y)$.*

2. *Der Index eines Fredholmoperators ist stabil gegenüber kleinen Störungen in $\mathcal{L}(X,Y)$, d.h. ist T ein Fredholmoperator vom Index k, so gibt es ein $\delta > 0$, so dass $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit $\|S-T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \delta$ impliziert S ist Fredholmoperator und*

$$\operatorname{ind}(S) = \operatorname{ind}(T).$$

Der Beweis benutzt einen Hilfssatz, der auch für sich recht nützlich ist. Um diesen zu formulieren, wollen wir noch einen Begriff einführen.

Definition 3.2.3.4
Wir sagen eine Abbildung $T \in \mathfrak{L}(X,Y)$ zerlegt, *falls* $\ker T$ *einen abgeschlossenen Komplementärraum besitzt.*

Hilfssatz 3.2.3.5
Es seien X, Y Banachräume. Dann gilt:

1. *die Menge der toplinearen Isomorphismen ist offen in $\mathfrak{GL}(X,Y)$.*

2. *die Menge der zerlegenden surjektiven Abbildungen* $\mathfrak{SL}(X,Y)$ *ist offen in der Menge* $\mathfrak{L}(X,Y)$.

Beweis.

1. Es sei T ein toplinearer Isomorphismus. Dann ist $\mathbb{1}_X = T^{-1} \circ T$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von $\mathbb{1}_X$ in $\mathcal{L}(X)$, so dass alle $B \in U$ invertierbar sind. (Darstellung durch die Neumannsche Reihe). Dann ist die Menge
$$\left\{TB \;\middle|\; B \in U\right\}$$
eine offene Umgebung von T in $\mathcal{L}(X,Y)$ und jedes Element darin ist invertierbar.

2. Es sei $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ eine zerlegende, surjektive Abbildung mit $K = \ker T$ und M einem abgeschlossenem Komplement zu K in X, also $K,\ M$ abgeschlossene Unterräume mit
$$X = K \oplus M.$$
Damit hat jedes $x \in X$ eine eindeutige Darstellung $x = k + m,\ k \in K,\ m \in M$. Wir ordnen der Abbildung T eine Abbildung
$$S : X \to Y \times K : x = k + m \mapsto (Tx, k)$$
zu. S ist linear, stetig injektiv und surjektiv, also ein toplinearer Isomorphismus. Damit garantiert unser Hilfssatz eine offene Umgebung W in $\mathcal{L}(X, Y \times K)$ von toplinearen Isomorphismen. Es sei $p : Y \times K \to Y : (y,k) \mapsto y$ die Projektion und
$$\pi : \mathcal{L}(X, Y \times K) \to \mathcal{L}(X,Y) : L \mapsto p \circ L.$$
Die Abbildung π ist linear stetig und surjektiv, also offen und
$$\pi(W) \subset \mathcal{L}(X,Y)$$
ist eine offene Umgebung von T.

□

Beweis von Satz 3.2.3.3. Nun sei $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ ein Fredholm-Operator vom Fredholm-Index $k \in \mathbb{Z}$. Es sei $K = \ker T$ und $X = K \oplus M$ eine Summe abgeschlossener Unterräume, $C = \operatorname{coker} T$ ein abgeschlossenes Komplement zu BILD(T). Wie zuvor schreiben wir für die eindeutige Zerlegung von $x \in X$ $x = k + m$. Damit bilden wir eine neue Abbildung

$$R : (X \times C) \to (Y \times K) : (x, c) \mapsto (Tx + c, k).$$

Die Abbildung R ist linear, injektiv: $R(x, c) = (0, 0)$ impliziert $k = 0$, also $Tx = 0$ und $c = 0$ und damit auch $x = 0$, sie ist beschränkt und surjektiv, denn $(y, k) \in Y \times K$, so gibt es ein $m \in M, c \in C$ mit $Tm + c = y$ und damit ist

$$R(m + k, c) = (y, k).$$

Damit ist R ein toplinearer Isomorphismus und wieder gibt es eine offene Umgebung von R, sagen wir W von toplinearen Isomorphismen $X \times C \to Y \times K$. Wiederum ordnen wir jedem $J \in W$ einen Operator

$$L = p \circ J \circ i$$

zu, wobei p wie zuvor die Projektion ist, $i : X \to X \times C$ die Inklusion. Die Menge der Abbildungen

$$\tilde{W} = \left\{ p \circ J \circ i \;\middle|\; J \in W \right\}$$

ist offen in $\mathcal{L}(X, Y)$ enthält T und es bleibt zu zeigen, dass

1. jeder Operator dieser Form ein Fredholm-Operator ist und
2. Index k hat.

Wir wollen dies in der angegebenen Reihenfolge abarbeiten.

1. Jeder Operator dieser Form hat abgeschlossene Komplemente für Kern und Bild und ein abgeschlossenes Bild, daher muss nur gezeigt werden, dass Kern und Kokern endlich dimensional sind. Der Kern ist gerade gegeben durch
$$X \times \{0\} \cap J^{-1}(C)$$
und der der Kokern ist gegeben durch
$$K \times \{0\} \cap J^{-1}(Y).$$
Beide Räume sind offensichtlich endlich dimensional und damit ist der Operator ein Fredholm-Operator.

2. Um den Erhalt des Fredholm-Indexes zu beweisen, müssen wir die Situation etwas genauer betrachten. Sei $d_{KC} = \dim \left\{ k \in K \;\middle|\; Jk \in C \right\}$. Dann ist
$$\dim \ker p \circ J \circ i = \dim K - d_{KC}$$
und
$$\dim \operatorname{coker} p \circ J \circ i = \dim C - d_{KC}.$$
Damit wird die Differenz
$$\dim \ker p \circ J \circ i - \dim \operatorname{coker} p \circ J \circ i = \dim K - \dim C = k.$$

□

Bevor wir diesen Abschnitt mit einem wichtigen Störungssatz für Fredholmoperatoren abschließen, wollen wir noch eine Charakterisierung für Fredholmoperatoren angeben, die bei diesem und manchem anderen Beweis sehr nützlich ist. Kurz gesagt bedeutet dies, dass ein Operator genau Fredholm ist, wenn es Operatoren gibt, die fast links-, bzw. rechtsinvers sind, d.h. die Hintereinanderausführung unterscheidet sich von der Identität nur um einen kompakten Operator.

Satz 3.2.3.6
Es seien X, Y Banachräume und es sei $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann ist T genau dann ein Fredholmoperator, wenn es $S_L, S_R \in \mathcal{L}(Y, X)$ gibt, mit
$$S_L T - \mathbb{1} \in \mathcal{K}(\mathcal{X}), \quad T S_R - \mathbb{1} \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$$

Beweis. Ist $S_L T - \mathbb{1}$ kompakt, so ist $\dim \ker(S_L T) < \infty$ und wegen
$$\ker(T) \subset \ker(S_L T)$$
ist $\ker T$ endlich dimensional. Aus $T S_R - \mathbb{1}$ kompakt, folgt $\mathrm{BILD}(T S_R)$ hat endliche Kodimension und wegen $\mathrm{BILD}(T) \supset \mathrm{BILD}(T S_R)$ ist die Kodimension von $\mathrm{BILD}(T)$ endlich. Dann ist (Aufgabe 36) $\mathrm{BILD}(T)$ abgeschlossen und T ist ein Fredholmoperator.

Ist umgekehrt T ein Fredholmoperator, so gibt es jeweils ein abgeschlossenes Komplement V zu $\ker T$ in X und ein abgeschlossenes Komplement W zu $\mathrm{BILD}(T)$ in Y, d.h.
$$X = V \oplus \ker T \qquad Y = \mathrm{BILD}(T) \oplus W.$$

Dann ist

$$\tilde{T} = T_{|V} : V \to \mathrm{BILD}(T)$$

linear, beschränkt und surjektiv, also offen und $\tilde{T}^{-1}$ ist stetig. Definiere $S \in \mathcal{L}(Y, X)$ mit

$$S : Y \to X : (t, w) \mapsto \tilde{T}^{-1} t.$$

Dann ist

$$(ST - \mathbb{1})(v + k) = \tilde{T}^{-1}\tilde{T} v - (v + t) = (v + 0) - (v + t) = -t$$

die negative Projektion auf $\ker T$ und

$$(TS - \mathbb{1})(t + w) = T\tilde{T}^{-1} t - (t + w) = -w$$

ist die negative Projektion auf den Komplementärraum von $\mathrm{BILD}(T)$. Projektionen auf endlich dimensionale Unterräume sind stetig, also folgt die gewünschte Eigenschaft. □

Satz 3.2.3.7
Sei X ein Banachraum, $K \in \mathcal{K}(X, Y)$ und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein Fredholmoperator mit $\mathrm{ind}(T) = k \in \mathbb{Z}$. Dann ist $T + K$ ein Fredholmoperator mit

$$\mathrm{ind}(T + K) = k = \mathrm{ind}(T).$$

Bemerkung 3.2.3.8
In dem sehr schönen Buch von Booss*[6] findet man (wichtige) Anwendungen dieser Aussage.*

Beweis. Seien S_L, S_R wie im letzten Satz gewählt. Dann ist

$$S_L(T + K) - \mathbb{1} = (S_L T - \mathbb{1}) + S_L K$$

als Summe zweier kompakter Operatoren kompakt, entsprechendes gilt für

$$(T + K)S_R - \mathbb{1} = (TS_R - \mathbb{1}) + KS_R.$$

Also ist $T + K$ ein Fredholmoperator. Die Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathcal{L}(X, Y) : t \mapsto T + tK$$

ist stetig, also ist aufgrund unseres Satzes 3.2.3.3 die Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathbb{Z} : t \mapsto \mathrm{ind}(T + tK)$$

lokal konstant, also konstant und

$$\mathrm{ind}(T) = \mathrm{ind}(T + K).$$

□

3.2.4 Riesz-Schauder Theorie

Wir wollen diesen Abschnitt mit einem Satz abschließen, der die Spektraleigenschaften kompakter Operatoren zusammenfasst. Dazu sei $n(\lambda)$ das maximale $e(n)$ aus Satz 3.2.2.10.

Definition 3.2.4.1
Für $\lambda \neq 0$ aus dem Σ_T, $T \in \mathcal{K}(X)$ heißt $n(\lambda)$ die Ordnung *des Eigenwertes, die Dimension* $\dim E_\lambda$ *wird als* geometrische Vielfachheit *bezeichnet. Die Dimension von $E_\lambda^{n(\lambda)}$ heißt* algebraische Vielfachheit.

Satz 3.2.4.2
Es sei X ein Banachraum, $T \in \mathcal{K}(X)$. Dann gilt

1. $0 \in \Sigma_T$,
2. *für $0 \neq \lambda \in \Sigma_T$, dass $\lambda \in \Sigma_T^E$,*
3. *für $0 \neq \lambda \in \Sigma_T$ sind die geometrische und algebraische Vielfachheit endlich.*
4. *die Räume $E_\lambda^{n(\lambda)}$ und $\mathrm{BILD}(T - \lambda\mathbb{1})^{n(\lambda)}$ sind abgeschlossen und komplementär und invariant unter $T - \lambda\mathbb{1}$.*
5. *das Spektrum der Einschränkung von $T|_{\mathrm{BILD}(T-\lambda\mathbb{1})^{n(\lambda)}}$ ist gegeben durch*
$$\Sigma_T \setminus \{\lambda\}.$$
6. *Der einzige mögliche Häufungspunkt in Σ_T ist 0.*

Beweis.

1. Wurde in den Übungen gezeigt.
2. Ist $\lambda \neq 0$, so ist für $\lambda \notin \Sigma_T^E$ der Operator $\mathbb{1} - \frac{1}{\lambda}T$ injektiv, also nach Satz 3.2.2.12 surjektiv und damit ist $\lambda \notin \Sigma_T$.
3. Folgt aus der Aussage von Satz 3.2.2.10.

4. Die Abgeschlossenheit der genannten Räume ist offensichtlich, ebenso die Invarianz. Die Komplementarität der beiden Räume sieht man wie folgt: ist $0 \neq x \in \mathrm{BILD}(T - \lambda\mathbb{1})^{n(\lambda)} \cap \ker(T - \lambda\mathbb{1})^{n(\lambda)}$, so ist

$$0 \neq x = (T - \lambda\mathbb{1})^{n(\lambda)} y$$

für ein geeignetes $y \in X$ und

$$(T - \lambda\mathbb{1})^{2n(\lambda)} y = 0,$$

was bedeutet

$$e(2n(\lambda)) > e(n(\lambda))$$

und dies ist ein Widerspruch.

5. Wurde in den Übungen gezeigt.

$\square$