

Kapitel 3

Von Fluss zu Abbildung und zurück

3.1 Poincaré-Abbildungen

Sei φ ein Fluss auf einer Mannigfaltigkeit M (insbesondere $M = \mathbb{R}^n$ oder $M = T^n$). Das zugehörige Vektorfeld heiße f , d.h.

$$f(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(x).$$

Eine Hyperfläche S ist eine Untermannigfaltigkeit von M (also Teilmenge und Mannigfaltigkeit) mit $\dim S = \dim M - 1$.

Wenn $M = \mathbb{R}^n$, so ist jeder $(n - 1)$ -dimensionale Unterraum eine Hyperfläche.

Definition 3.1.1 Eine Hyperfläche S heißt (globaler) (transversaler) **Schnitt** des Flusses φ , wenn gilt:

- Das zu φ gehörende Vektorfeld f ist nirgends tangential an S .
- Jeder Orbit von φ schneidet S unendlich oft für $t \rightarrow \infty$ und $t \rightarrow -\infty$.

Wir kommen jetzt zur ersten Definition der Poincaré-Abbildung:

Definition 3.1.2 Sei S ein globaler Schnitt von φ . Die Wiederkehrzeit $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\tau(x) = \min_{t>0} \{ \varphi_t(x) \in S \}.$$

Es gilt immer $\tau(x) > 0$, da wir vorausgesetzt haben, dass f nicht tangential an S ist.

Definition 3.1.3 Sei S ein globaler Schnitt von φ . Dann ist die **Poincaré-Abbildung**

$$P : S \rightarrow S$$

definiert durch

$$P(x) = \varphi_{\tau(x)}(x).$$

Das heißt: Der Punkt x wird auf den Punkt abgebildet, der auf dem Orbit von x liegt und der erste ist, an dem der Orbit von x wieder durch S läuft.

Beispiel 3.1.4 Für die Differentialgleichung

$$\dot{r} = r(1 - r),$$

$$\dot{\theta} = 1$$

(in Polarkoordinaten) ist

$$S = \{(x, 0) : x > 0\}$$

ein globaler Schnitt. Die Wiederkehrzeit ist

$$\tau = 2\pi$$

für alle Punkte in S . Da die Differentialgleichung gelöst wird durch

$$r(t) = \frac{1}{1 + (1/r_0 - 1)e^{-t}}, \quad \theta(t) = t + \theta_0,$$

ist die Poincaré-Abbildung gegeben durch

$$P(x, 0) = \left(\frac{1}{1 + (1/r_0 - 1)e^{-2\pi}}, 0 \right).$$

3.2 Suspensionen

Wir beobachten, dass nicht jeder (orientierungserhaltende) Diffeomorphismus als Zeit t_0 -Abbildung eines Flusses auftreten kann. Angenommen $x_0, \dots, f^k(x_0)$ sei ein periodischer Orbit von f mit minimaler Periode k , der isoliert liegt, d.h. für den es eine Umgebung U gibt, die keinen Orbit der Länge k enthält, so ist dies nicht die Zeit t_0 -Abbildung eines Flusses. Angenommen, dies wäre so, dann gilt

$$f^k \varphi_t x_0 = \varphi_{t+k} x_0 = \varphi_t f^k x_0 = \varphi_t x_0.$$

Also ist der gesamte Zeitorbit $\phi_t x_0$ von x_0 periodisch mit (minimaler) Periode k für f und dies widerspricht der Isoliertheit.

Definition 3.2.5 Sei M eine Mannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus. Sei $X = (M \times [0, 1]) / \sim$, wobei die Äquivalenzrelation \sim definiert wird durch

$$(x, 1) \sim (f(x), 0).$$

Dann ist der **Suspensionsfluss** von f auf X definiert durch

$$\psi_t([(x, \theta)]) := [(f^{\lfloor t+\theta \rfloor}(x), t + \theta - \lfloor t + \theta \rfloor)].$$

Hierbei bedeutet $\lfloor r \rfloor = \max\{s \in \mathbb{Z} : s \leq r\}$.

Wir können den Suspensionsfluss statt für Diffeomorphismen einer Mannigfaltigkeit M auch für Diffeomorphismen einer offenen Menge U im \mathbb{R}^n definieren. Allerdings ist auch in diesem Fall die Menge X , auf der der Suspensionsfluss definiert ist, keine Teilmenge des $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$ sondern eine abstrakte Mannigfaltigkeit.

Beispiel 3.2.6 Wenn $f : S^1 \rightarrow S^1$ eine Rotation ist, so ist X ein Torus.

Beispiel 3.2.7 Wenn $f : S^1 \rightarrow S^1$ eine Spiegelung ist, so ist X eine Klein-Flasche, eine nicht-orientierbare Mannigfaltigkeit (eine Fläche, deren "Innenseite" gleichzeitig die "Außenseite" ist).

Beispiel 3.2.8 Wenn $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ eine Spiegelung ist, so ist X ein Möbiusband.

3.3 Konjugation und Orbit-Äquivalenz

Im Folgenden wollen wir die Analyse von dynamischen Systemen erleichtern, indem wir gleich ganze Klassen von „gleichen“, „äquivalenten“ usw. Systemen untersuchen. Doch was sind geeignete Konzepte von „Gleichheit“, „Äquivalenz“ usw.?

Für Abbildungen hat sich folgendes Konzept als brauchbar herausgestellt:

Definition 3.3.9 Zwei C^k -Diffeomorphismen $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$, $1 \leq k \leq \infty$, heißen **topologisch konjugiert** (oder **C^0 -konjugiert**), wenn es einen Homöomorphismus $h : X \rightarrow Y$ gibt mit

$$f = h^{-1} \circ g \circ h.$$

Allgemeiner heißen zwei C^k -Diffeomorphismen $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$, $1 \leq k \leq \infty$, **C^j -konjugiert** mit $1 \leq j \leq \infty$, wenn es einen C^j -Diffeomorphismus $h : X \rightarrow Y$ gibt mit $f = h^{-1} \circ g \circ h$.

Beispiel 3.3.10 Die Abbildungen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, $g(x) = 8x$, sind topologisch konjugiert mittels $h(x) = x^3$, was ein Homöomorphismus ist. h ist kein Diffeomorphismus, und es gibt auch keinen solchen, wie wir in Kürze sehen.

Wenn f, g C^j -konjugiert sind, so muss h nicht eindeutig bestimmt sein.

Beispiel 3.3.11 Wenn $f = g : X \rightarrow X$, dann ist jeder Homöomorphismus $h : X \rightarrow X$ eine Konjugation.

Diese Definition von Konjugation ist zwar leicht auf Flüsse zu übertragen, aber es wird sich gleich herausstellen, dass da ein anderes Konzept brauchbarer ist. Zunächst die analoge Definition:

Definition 3.3.12 Zwei C^k -Flüsse φ, ψ auf X, Y mit $1 \leq k \leq \infty$ heißen **topologisch konjugiert** (C^0 -konjugiert), wenn es einen Homöomorphismus $h : X \rightarrow Y$ gibt, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi_t = h^{-1} \circ \psi_t \circ h.$$

Allgemeiner heißen zwei C^k -Diffeomorphismen $f : X \rightarrow X, g : Y \rightarrow Y, k \geq 1, C^j$ -konjugiert mit $0 \leq j \leq \infty$, wenn es einen C^j -Diffeomorphismus $h : X \rightarrow Y$ gibt mit $\varphi_t = h^{-1} \circ \psi_t \circ h$.

Hier taucht nun folgendes Problem auf: Sei beispielsweise φ der Fluss zu dem System

$$\dot{r} = r, \quad \dot{\theta} = 1$$

(in Polarkoordinaten) und ψ der Fluss zu

$$\dot{r} = 2r, \quad \dot{\theta} = 2.$$

Diese beiden Systeme haben dasselbe Phasenportrait, d.h. für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ durchläuft der Orbit von φ genau dieselben Punkte wie der Orbit von ψ durch x . Der einzige Unterschied ist, dass die Geschwindigkeit verschieden ist. Wir brauchen daher ein Konzept von Äquivalenz, das nicht so sensibel bezüglich des Zeitparameters ist. Folgendes ist brauchbar:

Definition 3.3.13 Die C^k -Flüsse φ, ψ auf X, Y mit $1 \leq k \leq \infty$ heißen **Orbit-äquivalent** (C^0 -Orbit-äquivalent), wenn es Homöomorphismen $h : X \rightarrow Y$ und $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass σ orientierungserhaltend (d.h. monoton wachsend) ist und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi_t = h^{-1} \circ \psi_{\sigma(t)} \circ h.$$

Es gibt auch die Definition von C^j -Orbit-Äquivalenz mit $0 \leq j \leq \infty$; dabei wird gefordert, dass in der obigen Definition h ein C^j -Diffeomorphismus ist. Allerdings wird für σ nach wie vor nur Homöomorphie gefordert.

Wenn also zwei Flüsse Orbit-äquivalent sind, dann können die Orbits zusammen-gestaucht werden.

Unmittelbare Folgerungen der Definition sind:

Lemma 3.3.14

- Wenn f zu g C^j -konjugiert ist ($0 \leq j \leq \infty$) und f einen Fixpunkt hat, dann auch g .
- Wenn f zu g C^j -konjugiert ist ($0 \leq j \leq \infty$), gibt es für jedes periodisches Orbit von f ein periodisches Orbit von g , und zwar mit derselben Periode.
- Eine Identitätsabbildung $\mathbb{1}_X$ ist zu keiner anderen Abbildung außer anderen Identitätsabbildungen $\mathbb{1}_Y$ konjugiert.

Beweis. Alle Punkte sind direkt einsehbar. \square

Fast alles in diesem Lemma gilt auch für Konjugation von Flüssen und für Orbit-Äquivalenz von Flüssen; allerdings kann sich die Periode eines periodischen Orbits bei Orbit-Äquivalenz ändern:

Lemma 3.3.15

- Wenn φ zu ψ C^j -konjugiert ist ($0 \leq j \leq \infty$), gibt es für jeden periodischen Orbit von φ einen periodischen Orbit von ψ , und zwar mit derselben Periode.
- Wenn φ zu ψ Orbit-äquivalent ist, gibt es für jeden periodischen Orbit von φ einen periodischen Orbit von ψ , aber nicht notwendigerweise mit derselben Periode.

Beweis. Auch dieses Lemma ist direkt einsehbar. \square

In fast allen Fällen kann man nur C^0 -Konjugation erwarten, auch bei glatten Abbildungen oder Flüssen. Eine Ausnahme macht folgender Satz:

Satz 3.3.16 („flow-box“) Wenn φ ein C^1 -Fluss auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit ist und das zugehörige Vektorfeld

$$f(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(x)$$

an der Stelle x_0 nicht verschwindet, dann gibt es eine offene Umgebung U von x_0 , so dass $\varphi|_U$ (die Einschränkung von φ auf U) C^1 -konjugiert ist zum konstanten Fluss auf einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n , definiert durch

$$\psi_t(y) = y + te_1$$

(mit $e_1 =$ der erste Einheitsvektor in \mathbb{R}^n).

Beweis. Folgt aus einer Konstruktion mittels eines (lokalen) Schnittes. Einen vollständigen Beweis findet man in jedem Lehrbuch über Gewöhnliche Differentialgleichungen. \square

3.4 Hufeisen und Büroklammer

Im Folgenden wollen wir ein Beispiel für eine „chaotische“ Abbildung betrachten, ein sogenanntes **Hufeisen**. Das erste Beispiel eines solchen stammt von Smale; hier studieren wir eine abgewandelte Version, die angenehmer ist.

Definition 3.4.17 Die die *G-förmige Hufeisen-Büroklammer* ist auf $U = [0, 1] \times [0, 1]$ definiert durch

$$G : U \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad G(x, y) = \begin{cases} (3x, \frac{y}{3}) & \text{für } x \leq 1/3 \\ (3x - 2, \frac{y+2}{3}) & \text{für } x \geq 2/3 \\ \text{glatt fortgesetzt} & \text{für } x \in [1/3, 2/3] \end{cases}$$

Diese Abbildung ist noch keine Abbildung eines Raums auf sich selbst. Um eine geeignete Menge als Definitionsbereich zu finden, betrachten wir:

Definition 3.4.18 Sei $f : X \rightarrow X$ eine Abbildung. Eine Menge $A \subset X$ heißt **positiv invariant** unter f , wenn $f(A) \subset A$. Für eine invertierbare Abbildung f heißt A **negativ invariant**, wenn $f^{-1}(A) \subset A$. Wenn A positiv und negativ invariant ist, heißt A **bi-invariant** oder einfach **invariant**. Eine Abbildung $H : X \rightarrow Y$ heißt **invariant** unter f , wenn $H \circ f = H$.

Vorsicht: Manche Bücher benutzen das Wort „invariant“ als Synonym für „positiv invariant“ und nicht für „bi-invariant“.

Nun suchen wir eine möglichst große Menge im \mathbb{R}^2 , die unter G invariant ist. Beachte: Für eine allgemeine Abbildung von $U \subset \mathbb{R}^2$ nach \mathbb{R}^2 gibt es zwar nicht unbedingt eine maximale invariante Menge. Hierfür bietet sich die Menge

$$\Lambda = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} G^i(U)$$

an. Sie ist per Definition invariant, und sie ist Teilmenge von U , da $U = G^0(U)$.

Definition 3.4.19 Die **Standard-Cantormenge** ist definiert als

$$C = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n 3^{-n} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ erfüllt } a_n \in \{0, 2\} \forall n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Lemma 3.4.20 Es gilt:

a) C ist überabzählbar.

b) C ist homöomorph zum **Cantor-Staub** $C \times C$. (Zwei Mengen heißen homöomorph, wenn es eine stetige Bijektion zwischen ihnen mit stetiger Umkehrabbildung gibt.)

Beweis. a) Es gibt überabzählbar viele unendliche Folgen in $\{0, 2\}$. Wenn

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \neq (b_n)_{n \in \mathbb{N}},$$

dann ist

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n 3^{-n} \neq \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n 3^{-n},$$

denn wenn k die erste Stelle ist, an der sich a und b unterscheiden, dann ist

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n 3^{-n} - \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n 3^{-n} \right| \geq 3^{-k} - \sum_{n > k} 2 \cdot 3^{-n} > 0.$$

b)

$$f\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n 3^{-n}\right) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{2n} 3^{-2n}, \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{2n+1} 3^{-(2n+1)}\right)$$

ist bijektiv, da

$$f^{-1}\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n 3^{-n}, \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n 3^{-n}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n 3^{-n}$$

mit

$$c_n = \begin{cases} a_{n/2} & \text{für } n \text{ gerade} \\ b_{(n-1)/2} & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

f ist stetig: Für $\varepsilon > 0$ sei k so groß, dass $3^{-k} < 2\varepsilon$ und wähle $0 < \delta < 3^{-2k} - \sum_{n>2k} 2 \cdot 3^{-n} > 0$. Dann gilt für $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n 3^{-n}$, $y = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n 3^{-n}$ mit $|x - y| < \delta$, dass die ersten $2k$ Stellen von x und y übereinstimmen. Somit ist

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_{2n} - b_{2n}) 3^{-2n} \right| + \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_{2n+1} - b_{2n+1}) 3^{-(2n+1)} \right| \\ &= \left| \sum_{n>k} (a_{2n} - b_{2n}) 3^{-2n} \right| + \left| \sum_{n>k} (a_{2n+1} - b_{2n+1}) 3^{-(2n+1)} \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

f^{-1} ist stetig: Für $\varepsilon > 0$ sei k so groß, dass $3^{-k} < \varepsilon$ und wähle $0 < \delta < 3^{-k} - \sum_{n>k} 2 \cdot 3^{-n} > 0$. Dann gilt für $x = (\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n 3^{-n}, \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n 3^{-n})$, $y = (\sum_{n \in \mathbb{N}} a'_n 3^{-n}, \sum_{n \in \mathbb{N}} b'_n 3^{-n})$ mit $|x - y| < \delta$ in der Summennorm, dass die ersten k Stellen von x und y in beiden Koordinaten übereinstimmen. Somit ist

$$|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n - c'_n| 3^{-n} < \sum_{n>k} |c_n - c'_n| 3^{-n} < \varepsilon.$$

mit

$$c_n = \begin{cases} a_{n/2} & \text{für } n \text{ gerade} \\ b_{(n-1)/2} & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

$$c'_n = \begin{cases} a'_{n/2} & \text{für } n \text{ gerade} \\ b'_{(n-1)/2} & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

□

Lemma 3.4.21 Die Menge $\Lambda = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} G^i(U)$ ist der Standard-Cantor-Staub $C \times C$, wobei C die Standard-Cantormenge ist.

Beweis. $U \cap G(U)$ ist das Einheitsquadrat mit dem horizontalen „Drittel“-Rechteck entfernt, also die zwei horizontalen Rechtecke $[0, 1] \times [0, \frac{1}{3}]$ und $[0, 1] \times [\frac{2}{3}, 1]$. Da G aus zwei linearen Abbildungen besteht, wird bei der nächsten Anwendung von G aus jedem dieser Rechtecke wieder ein horizontales Drittel entfernt usw. Somit ist

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} G^i(U) = [0, 1] \times C.$$

Für die Umkehrabbildung G^{-1} gilt, dass $U \cap G^{-1}(U)$ aus den zwei vertikalen Rechtecken $[0, \frac{1}{3}] \times [0, 1]$ und $[\frac{2}{3}, 1] \times [0, 1]$ besteht. Bei jeder weiteren Anwendung von G wird aus jedem Rechteck wieder ein vertikales Drittel entfernt, und somit ist

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}_0} G^{-i}(U) = C \times [0, 1].$$

Damit ist natürlich

$$\Lambda = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} G^i(U) = C \times C.$$

□

Diese Abbildung ist, wie wir sehen werden, ein Prototyp einer „chaotischen“ Abbildung in folgendem Sinn:

Definition 3.4.22 Eine Abbildung $f : X \rightarrow X$, wobei X ein topologischer Raum ist, heißt **topologisch transitiv**, wenn es einen dichten Orbit gibt.

Satz 3.4.23 Es sei X ein vollständiger metrischer Raum, der zusätzlich

- separabel (d.h. er hat eine abzählbare dichte Teilmenge) sei und
- keine isolierten Punkte besitze.

Es sei $f : X \rightarrow X$ stetig, dann sind die vier folgenden Bedingungen äquivalent:

1. f ist topologisch transitiv.
2. f besitzt einen dichten Halborbit.
3. Für nichtleere offene Mengen $U, V \subset X$ gibt es ein $N \in \mathbb{Z}$ mit $f^N(U) \cap V \neq \emptyset$.
4. Für nichtleere offene Mengen $U, V \subset X$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $f^N(U) \cap V \neq \emptyset$.

Beweis. Die Implikationen (4) impliziert (3), bzw. (2) impliziert (1) sind klar. Wir beweisen nun (1) \Rightarrow (3). Sei $\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ dicht und U, V offen und nichtleer. Dann existieren $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $f^n(x) \in U, f^m(x) \in V$ und dann ist $f^{m-n}(U) \cap V \neq \emptyset$. (Beachte, hier wird nur die Stetigkeit von f verwendet, die weiteren Voraussetzungen werden nicht verwendet.)

(1) \Rightarrow (4). Wir müssen zeigen, dass wir den Beweis so führen können, dass $m > n$. Ist also V offen, der Orbit dicht und besitzt X keine isolierten Punkte, dann gibt es in V Punkte, die nicht im Orbit liegen. (Orbit ist abzählbar, eine abgeschlossene Umgebung eines jeden Punktes ist ein vollständiger metrischer Raum und als solcher nicht die Vereinigung nirgends dichter Mengen (Satz von Baire) und jeder Punkt ist nirgends dicht.) sei $y \in V$ und nicht im Orbit von f . Also gibt es eine Folge $m_k \rightarrow \infty$ mit $k \rightarrow \infty$ mit $f^{m_k}(x) \rightarrow y$. Diese Folgenglieder sind ab eines bestimmten Index alle in V und demzufolge, kann m, n gewählt werden.

Nun beweisen wir (4) \Rightarrow (2) und (3) \Rightarrow (1). Sei also X separabel und eine der Bedingungen (3) oder (4) erfüllt. Sei S eine abzählbar dichte Teilmenge in X und es sei für $j \in \mathbb{N}$ U_j eine Abzählung der abzählbar vielen metrischen Kugeln

$$B_q(x) \text{ mit } x \in S \text{ und } 0 < q \in \mathbb{Q}$$

um Punkte $x \in S$ mit Radien $0 < q \in \mathbb{Q}$. Wenn wir zeigen, dass es einen Orbit/Halborbit gibt, der jede dieser Mengen U_j trifft, so sind wir fertig. Wir beginnen mit einem $N_1\mathbb{Z}$ oder $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass $f(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$. Sei nun V_1 eine metrische Kugel vom Radius $< \frac{1}{2}$ in U_1 mit $\overline{V_1} \subset U_1 \cap f^{-N_1}(U_2)$. Wähle V_2 eine metrische Kugel vom Radius höchstens $\frac{1}{4}$ mit $\overline{V_2} \subset V_1 \cap f^{-N_2}(U_3)$. Setze die Wahl induktiv fort: V_{n+1} ist metrische Kugel vom Radius höchstens $\frac{1}{2^{n+1}}$ mit $\overline{V_{n+1}} \subset V_n \cap f^{-N_{n+1}}(U_{n+2})$. Nun bilden die Mittelpunkte der Kugeln von $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Sei $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n}$. Dann ist $f^{N_{n-1}}(x) \in U_n$ für alle N_n oder für alle n . \square

Aufgabe 3.4.24 Man ergänze den letzten Schritt im Falle einer Abbildung f , die nicht invertierbar ist.

Definition 3.4.25 Eine Abbildung $f : X \rightarrow X$, wobei X ein topologischer Raum ist, heißt **topologisch mischend**, wenn es für alle nichtleeren offenen Mengen $U, V \subset X$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n > N$ gilt: $U \cap f^n(V)$ ist nicht leer.

Diese beiden Begriffe sind eng miteinander verbunden. Wir haben den folgenden Satz.

Satz 3.4.26 Jede topologisch mischende Abbildung ist topologisch transitiv.

Beweis. Folgt aus Satz 3.4.23. \square

Definition 3.4.27 Eine Abbildung $f : X \rightarrow X$ heißt **chaotisch**, wenn die Menge der periodischen Punkte dicht ist und die Abbildung topologisch transitiv ist.

Diese Definition von Chaotizität stammt von Devaney¹; es gibt noch andere.

Anstatt diese Eigenschaften für unsere Hufeisen-Büroklammer direkt zu zeigen, studieren wir zuerst ein gänzlich anders aussehendes System, sogenannte symbolische Dynamik. Dann werden wir sehen, dass diese augenscheinlich sehr verschiedenen Systeme vergleichbare Dynamik haben.

3.5 Symbolische Dynamik

Zunächst definieren wir die **Symbolräume**:

Definition 3.5.28 Die Menge

$$\Omega = \{(\omega_i)_{i \in \mathbb{Z}} : \omega_i \in \{0, 1\} \text{ für alle } i \in \mathbb{Z}\}$$

heißt **Menge der zweiseitigen Sequenzen (oder zweiseitiger Symbolraum)** und

$$\Omega^R = \{(\omega_i)_{i \in \mathbb{N}_0} : \omega_i \in \{0, 1\} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_0\}$$

heißt **Menge der einseitigen Sequenzen (oder einseitiger Symbolraum)**.

¹statt einer historischen Bemerkung ein Link:
<http://math.bu.edu/people/bob/>

Darauf gibt es ein natürliches dynamisches System, welches alle Folgenglieder nach links schiebt:

Definition 3.5.29 Der *Shift-Operator* auf Ω (bzw. $\Omega^{\mathbb{R}}$) ist definiert durch

$$\sigma(\omega)_i = \omega_{i+1}.$$

σ wird auch als *topologischer Bernoulli-Shift* bezeichnet.

Auf der Menge der zweiseitige Sequenzen ist das eine Bijektion; auf der Menge der einseitigen Sequenzen dagegen nicht, denn dort wird der Wert von ω an der linkensten (0-ten) Koordinaten „vergessen“ und mit ω_1 überschrieben.

Die Symbolräume sind metrische Räume:

Definition 3.5.30 Auf Ω ist für jedes $\lambda > 1$ eine Metrik wie folgt definiert:

$$d_\lambda(\alpha, \omega) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda^{-|i|} \Delta(\alpha_i, \omega_i)$$

mit $\Delta(a, b) = 0$ für $a = b$ und $\Delta(a, b) = 1$ sonst, bzw. allgemeiner

$$d_\lambda(\alpha, \omega) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda^{-|i|} |\alpha_i - \omega_i|.$$

Natürlich kann man auch Symbolräume mit mehr als zwei Symbolen definieren. Dies findet man z.B. in [3]. Eine alternative Weise eine Topologie zu erklären ist, dass man Ω identifiziert mit der Menge $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. Versieht man nun die Menge $\{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie, so erhält man auf Ω die Produkttopologie, erinnert man sich noch daran, dass man $\{0, 1\}$ auch mit einer Gruppenstruktur versehen kann, so wird Ω zu einer kompakten topologischen Gruppe. Wir betrachten eine weitere Konstruktion. Wähle ein $k \in \mathbb{N}$ und zu dazu ganzzahlige Werte

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k$$

und $\alpha_k \in \{0, 1\}$.

Definition 3.5.31 Ein *Zylinder* in Ω ist eine Menge der Form

$$C_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}^{n_1, \dots, n_k} = \left\{ \omega \in \Omega \mid \omega_{n_i} = \alpha_i \text{ für } k = 1 \dots n \right\}.$$

Die Zahl k heißt *Rang des Zylinders*.

Eine dritte Art und Weise eine Topologie zu erklären besteht nun darin, dass wir jeden Zylinder als offene Menge betrachten und dies als Basis einer Topologie. Man beachte, dass an Punkte in einem Zylinder an endlich vielen Stellen einen vorgegebenen Wert haben, und an endlich vielen Stellen sind die Werte vorgegeben.

Aufgabe 3.5.32 1. Man zeige Komplemente von Zylindern sind endliche Vereinigungen von Zylindern (also nach der dritten Definition auch offen).

2. Die drei Methoden eine Topologie zu erklären führen auf die gleiche Topologie, insbesondere erzeugen für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ die Metriken $d_{\lambda_1}, d_{\lambda_2}$ die gleichen Topologien.

Bemerkung 3.5.33 Die gleichen Konstruktionen kann man auch mit einseitigen Symbolräumen machen.

Satz 3.5.34 Periodische Punkte für σ sind in Ω , bzw. in Ω^R dicht. In beiden Räumen ist σ topologisch mischend.

Beweis. Die periodischen Punkte für σ sind gerade die Fixpunkte einer geeigneten Potenz von σ . Ist $\sigma^r \omega = \omega$, so gilt für alle Indizes

$$\omega_n = \omega_{n+r}.$$

Für die Dichtheit der periodischen Punkte reicht es daher, in jedem Zylinder die Existenz eines periodischen Punktes nachzuweisen. In jedem Zylinder C gibt es einen Zylinder der Form

$$C_\alpha^m = C_{\alpha_{-m}, \dots, \alpha_m}^{-m, \dots, m},$$

wobei α für das $2m + 1$ -Tupel

$$\alpha = (\alpha_{-m}, \dots, \alpha_m)$$

steht. Aber in diesem Zylinder findet man den $2m + 2$ periodischen Punkt ω , der sich durch Wiederholen der Folge α ergibt, also

$$\omega_n = \alpha_k, \quad -m \leq k \leq m \text{ und } n - k = 0 \pmod{2m + 1}.$$

Man beachte, dass es 2^{2m+1} solcher endlichen Folgen α gibt. Um die Eigenschaft des topologischen Mischens nachzuweisen, muss man die entsprechende Eigenschaft für Zylinder nachweisen. Gegeben seien also zwei Zylinder $C_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}^{m_1, \dots, m_k}$ und $C_{\beta_1, \dots, \beta_r}^{n_1, \dots, n_r}$. Wähle zunächst

$$\omega \in C_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}^{m_1, \dots, m_k}$$

und betrachte $n > \max\{m_k + |n_r| + |n_1|\}$. Setze für $j = 1, \dots, r$

$$\omega(n + n_j) = \beta_j.$$

dann ist $\omega \in C_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}^{m_1, \dots, m_k}$ und $\sigma^n \omega \in C_{\beta_1, \dots, \beta_r}^{n_1, \dots, n_r}$. Dies war zu beweisen. \square

Lemma 3.5.35 Der Cantor-Staub $C \times C$ ist homöomorph zu Ω , die Abbildung $G : C \times C \rightarrow C \times C$ ist konjugiert zum Shift $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$. Insbesondere ist G topologisch mischend, die periodischen Punkte liegen dicht und G ist chaotisch.

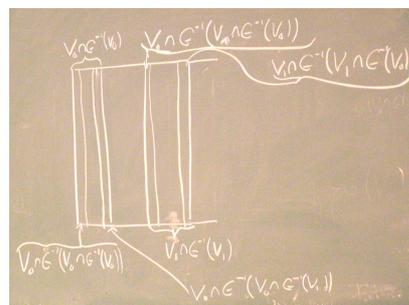
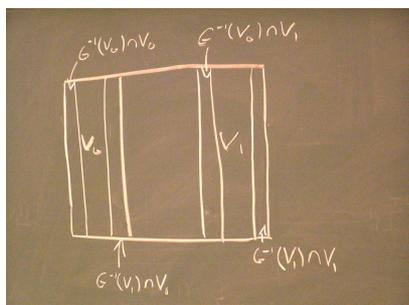
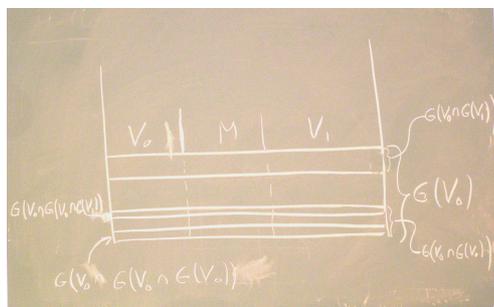
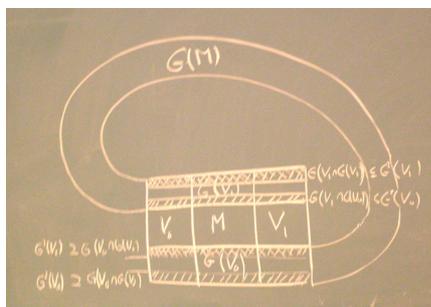
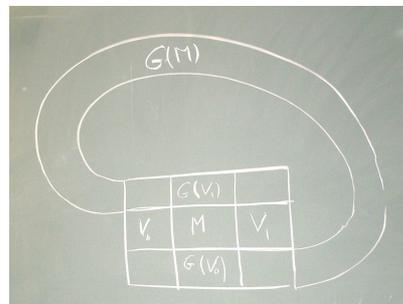
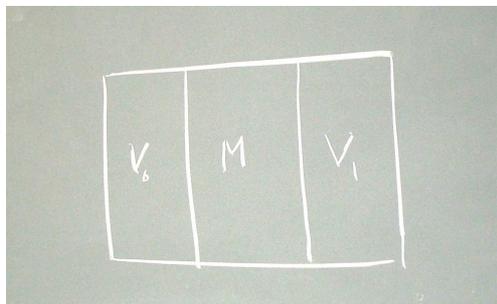
Beweis. Wir betrachten die Abbildung $h : \Omega \rightarrow \Lambda$ die Konjugation zwischen G und dem Shift auf Ω , definiert durch

$$\omega \mapsto h(\omega) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} G^{-n}(V_{\omega_n}),$$

wobei $V_0 = [0, \frac{1}{3}] \times [0, 1]$ und $V_1 = [\frac{2}{3}, 1] \times [0, 1]$. Zu zeigen ist:

1. h ist eine Bijektion
2. h und h^{-1} sind beide stetig und
3. h konjugiert σ und G .

Wir betrachten die folgenden Bilder



Wir sehen daran, dass endlich viele Schnitte von Mengen der Form $G^{-n}(V_{\omega_n})$ gerade Schnitte von entsprechenden Rechtecken mit $C \times C$ sind. Diese bilden eine Basis für die Topologie auf $C \times C$. betrachten wir also

$$\bigcap_{j=1}^r G^{-n_j}(V_{\omega_{n_j}})$$

so ist dies gerade das Bild des Zylinders

$$C_{\omega_{n_1}, \dots, \omega_{n_r}}^{n_1, \dots, n_r}.$$

Durch Bilden des Schnitts über eine Folge von geschachtelten Rechtecken der Form

$$\bigcap_{j=-m}^m G^{-j}(V_{\omega_j})$$

erhält man genau einen Punkt on $C \times C$, ebensolieferrn die Schnitte der entsprechenden Zylinder

$$C_{\omega_{-m}, \dots, \omega_m}^{-m, \dots, m}$$

genau einen Punt in Ω . Diese werden aufeinander abgebildet und aufgrund der Konstruktion ist h Bijektion und in beiden Richtungen stetig. Die Konjugationseigenschaft ist leicht zu sehen:

$$\begin{aligned} G \left(\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} G^{-n}(V_{\omega_n}) \right) &= \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} G^{-n+1}(V_{\omega_n}) \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} G^{-n}(V_{\omega_{n-1}}) \\ &= h(\sigma\omega). \end{aligned}$$

□

Lemma 3.5.36 *Isometrien sind nicht topologisch mischend.*

Beweis. Ist $f : X \rightarrow X$ eine Isometrie, seien x, y, z verschiedene Punkte in X und

$$\delta = \frac{1}{4} \min\{d(x, y), d(y, z), d(x, z)\}.$$

Seien

$$U = B_\delta(x), V_1 = B_\delta(y), V_2 = B_\delta(z).$$

Sei $W \subset X$ eine beliebige nichtleere Teilmenge und

$$D(W) = \sup \left\{ d(w_1, w_2) \mid w_{1,2} \in W \right\}$$

der Durchmesser von W . Da f eine Isometrie ist, ist

$$D(W) = D(f(W)).$$

Nun ist $D(U) = 2\delta$ und damit gilt

$$D(f^n(U)) = 2\delta.$$

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f^n(U) \cap V_1 \neq \emptyset, f^n(U) \cap V_2 \neq \emptyset.$$

Seien $u_1 \in U$ mit

$$f^n(u_1) \in V_1.$$

Dann ist

$$2\delta > d(u_1, u_2) = d(f^n(u_1), f^n(u_2)) > d(y, z) - (d(y, f^n(u_1)) - d(z, f^n(u_2))) > 4\delta - 2\delta - 2\delta.$$

Damit kann es kein $N \in \mathbb{N}$ geben, so dass für $n > N$ und $i = 1, 2$ gilt

$$f^n(U) \cap V_i \neq \emptyset.$$

Dies ist gerade die Behauptung. □

Definition 3.5.37 Es sei X ein metrischer Raum, $f : X \rightarrow X$ stetig. Die Abbildung f heißt expandierend, falls ein $\lambda_0 > 1$ und ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$(x \neq y \wedge d(x, y) < \varepsilon) \Rightarrow d(f(x), f(y)) > \lambda_0 d(x, y).$$

Beispiel 3.5.38 Die Abbildungen $E_m : S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto z^m$ sind für $m > 1$ expandierend.

Lemma 3.5.39 Es sei X eine differenzierbare kompakte Mannigfaltigkeit mit Metrik d . Wir fordern von dieser Metrik, dass es zu jedem $x \in X$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für $y \in B_\varepsilon(x)$ gilt

$$d(x, y) = \inf_{\gamma \in C^1(I, X)} \int_a^b \|\dot{\gamma}(s)\| ds.$$

Eine stetig differenzierbare Abbildung $f : X \rightarrow X$ ist expandierend, falls es ein $\lambda > 1$ gibt, so dass für alle $x \in X$ und alle $v \in T_x X$ gilt

$$(3.5.40) \quad |Df(x)v| \geq \lambda \|v\|.$$

Beweis. Die Menge der ε -Kugeln, die im Lemma angegeben sind, bilden eine offene Überdeckung von X , aufgrund der Kompaktheit von X reichen endlich viele X zu überdecken, dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ (Lebesguezahl), so dass zu jedem $x \in X$ die Kugel $B_{\varepsilon_0}(x)$ in einer der überdeckenden Mengen liegt.

Unter den Voraussetzungen an f ist die Linearisierung in jedem Punkt surjektiv, d.h. der Satz über implizite Funktionen garantiert, dass das Bild einer ε -Kugel um x eine $\delta(x)$ -Kugel um $f(x)$ enthält. Sei $\delta_0 = \inf\{\delta(x), x \in X\} > 0$. Dann betrachten wir für $x, y \in X$ mit $d(f(x), f(y)) < \delta_0$ C^1 -Kurven, die in $B_{\delta_0}(f(x))$ verlaufen $f(x)$ und $f(y)$ verbinden. Sei $L(\gamma)$ die Länge von γ . Ferner sei $\tilde{\gamma}$ die eindeutige Kurve, die x mit y verbindet und $\gamma = f \circ \tilde{\gamma}$.

Dann ist

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \|f'(\tilde{\gamma}(t))\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| dt > \mu \int_a^b \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| dt = \mu L(\tilde{\gamma}).$$

Dann ist

$$d(f(x), f(y)) = \inf_{\gamma} L(\gamma) > \mu \inf_{\tilde{\gamma}} L(\tilde{\gamma}) \geq \mu d(x, y).$$

□

Korollar 3.5.41 Ist $X = S^1$, so reicht anstatt 3.5.40 die schwächere Bedingung

$$\forall x \in S^1 : |f'(x)| > 1$$

um sicherzustellen, dass f expandierend ist.

Beweis. Statt des Argumentes mit der Bogenlänge kann im Eindimensionalen mit dem Mittelwertsatz gearbeitet werden, der eine Gleichheit

$$d(f(x), f(y)) = f'(\xi)d(x, y)$$

mit $\xi \in (x, y)$ garantiert. Übergang zum Minimum ergibt die behauptete Ungleichung. \square

Lemma 3.5.42 Expandierende Abbildungen auf S^1 sind topologisch mischend.

Beweis. Betrachte die Projektion $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1 : x \mapsto [x]$, die jedem Punkt die Äquivalenzklasse in \mathbb{R}/\mathbb{Z} zuordnet. Ein Lift von $f : S^1 \rightarrow S^1$ ist eine Abbildung $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$f \circ \pi = \pi \circ F$$

ist. Ein Lift ist eindeutig bis auf eine additive ganzzahlige Konstante (Beweis der Existenz in den Übungen.) Wir betrachten nun eine offene Menge U in S^1 . $\pi^{-1}(U)$ enthält ein Intervall I positiver Länge. Dann gibt es ein $F^n(I)$ ein Intervall ist, dessen Länge größer als 1 ist. Dann ist $\pi(F^n(I)) = S^1$ und $\pi(F^n(U)) \supset \pi(F^n(I)) = S^1 = f^n(\pi(I))$. Insbesondere schneidet $f^n(U)$ jede offene Menge V nichtleer. \square

3.6 Lineare Flüsse auf dem Torus

Definition 3.6.43 Es sei X ein metrischer Raum, $f : X \rightarrow X$ stetig. Das dynamische System heißt minimal, wenn jeder Orbit von f dicht in X liegt.

Zur Erinnerung $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ ist eine Mannigfaltigkeit und eine Gruppe. daher ist die Addition wohl definiert.

Satz 3.6.44 Wir betrachten für $\gamma \in \mathbb{T}^n$ die Abbildung

$$T_\gamma : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n : x \mapsto x + \gamma.$$

Das resultierende System ist minimal, falls $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ über \mathbb{Q} linear unabhängig sind.

Für den Beweis benötigen wir zwei direkte Konsequenzen aus Satz 3.4.23.

Lemma 3.6.45 Es sei X ein vollständiger metrischer Raum, der zusätzlich separabel und lokal kompakt ist (d.h. zu jedem Punkt gibt es eine offene Umgebung, deren Abschluss kompakt ist). Dann erzeugt eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow X$ genau dann ein topologisch transitives dynamisches System, wenn es keine zwei disjunkte nichtleere offene und f -invariante Teilmengen gibt.

Beweis. Eine Richtung ist offensichtlich, für die andere beobachten wir einfach, dass die beiden nichtleeren offenen Mengen U, V die invarianten Mengen

$$\tilde{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U)$$

bzw.

$$\tilde{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(V)$$

erzeugen. Nun schneiden sich aufgrund der Voraussetzung \tilde{U}, \tilde{V} , d.h. es gibt n, m mit $f^n(U) \cap f^m(V) \neq \emptyset$. dann ist

$$U \cap f^{m-n}(V) \neq \emptyset.$$

daraus folgt nach Satz 3.4.23 die Behauptung. \square

Korollar 3.6.46 Ist $f : X \rightarrow X$ topologisch transitiv, so gibt es keine nichtkonstante stetige, f -invariante Funktion $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$, dabei heißt eine Funktion $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ f -invariant, falls

$$\varphi \circ f = \varphi.$$

Beweis. Nehmen wir an, eine solche Funktion würde existieren. Dann existiert ein Wert $r \in \mathbb{R}$, so dass

$$U = \varphi^{-1}(\{s \in \mathbb{R} \mid s > t\}), \quad V = \varphi^{-1}(\{s \in \mathbb{R} \mid s < t\})$$

nichtleer sind. Ist φ invariant, so gilt dies für U, V . Aufgrund der Stetigkeit von f sind beide Mengen offen, somit folgt die Aussage direkt aus Lemma 3.6.45. \square

Lemma 3.6.47 Sei G eine Gruppe und ein metrischer Raum, so dass die Addition als Abbildung $G \times G \rightarrow G$ stetig ist. Sei ferner $f : G \rightarrow G : g \mapsto gg_0$ topologisch transitiv, so ist f minimal.

Beweis. Seien g_1, g_2 beliebige Elemente in G und $A(g_i)$ jeweils der Abschluss des Orbits von g_i . Dann gibt es ein g' mit $g_2 = g'g_1$. Also ist

$$f^n(g_2) = f^n(g'g_1) = g'g_1g_0^n = g'f^n(g_1).$$

Damit ist

$$A(g_2) = g'A(g_1).$$

Gilt nun für eine der Mengen $A(g_i) = G$, so folgt dies auch für die andere. \square

Beweis von Satz 3.6.44. Sind die $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ nicht rational unabhängig, so gibt es rationale Koeffizienten q_1, \dots, q_n mit

$$\sum_{i=1}^n q_i \gamma_i = 0.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit dem kgV K der Nenner der q_i , so erhalten wir mit $\mathbb{Z} \ni k_i = Kq_i$ die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n k_i \gamma_i = 0.$$

Wir gehen von dieser Relation aus und nehmen an, nicht alle k_i seien 0. Setze

$$\varphi(x) = \sin \left(2\pi \sum_{i=1}^n k_i x_i \right).$$

Dann ist φ invariant unter T_γ , denn

$$\begin{aligned} \varphi(x + \gamma) &= \sin \left(2\pi \sum_{i=1}^n k_i (x_i + \gamma_i) \right) \\ &= \sin \left(2\pi \sum_{i=1}^n k_i x_i + 2\pi \sum_{i=1}^n k_i \gamma_i \right) \\ &= \varphi(x). \end{aligned}$$

φ ist nicht konstant und damit ist f nicht topologisch transitiv. □

Lemma 3.6.48 F_L aus Aufgabe 24 (Blatt 6) ist topologisch mischend.

Beweis. □

3.7 Sensitive Abhängigkeit

Definition 3.7.49 Es sei X ein metrischer Raum. Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow X$ zeigt **sensitive Abhängigkeit**, falls es eine Konstante $\Delta > 0$ gibt, die wir als Sensitivitätskonstante bezeichnen, so dass zu jedem $x \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $y \in X$ und ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$d(x, y) < \varepsilon \text{ und } d(f^N(x), f^N(y)) > \Delta.$$

Lemma 3.7.50 Chaotische Abbildungen zeigen sensitive Abhängigkeit, außer wenn X aus genau einem periodischen Orbit besteht.

Beweis. □

Lemma 3.7.51 Topologisch mischende Abbildungen auf Räumen, die aus mehr als einem Punkt besitzen sensitive Abhängigkeit.

Beweis. □

