Kapitel 4

Fraktale und Dimension

4.1 Selbstähnlichkeit

Was sind Fraktale? Das Wort „fraktal" kommt von „zerbrochen" und steht für die nicht-ganzzahlige Dimension. Wir betrachten also Objekte deren Dimension keine ganze Zahl ist. Einige solche Objekte sindeinigen Jahren gut bekannt. Oft werden diese als selbstähnlich bezeichnet. Um diesem Begriff näher zu kommen betrachten wir wieder die Cantormenge C und eine Abbildung

$$f : C \to C : x \mapsto \frac{x}{3}.$$

Dieses Abbildung bildet die Cantormenge auf den schnitt der Cantormenge mit dem Intervall $[0, \frac{1}{3}]$ ab, genauso kann man die Abbildung $x \mapsto \frac{3}{(}x + 2)$ betrachten, die C auf den rechten Teil abbildet. Jeder Schnitt der Cantormenge mit einem Intervall der Länge 3^{-n}, das bei der Konstruktion von$C$ auftritt, ist Bild der Cantormenge unter einer (affin linearen) Kontraktion. das heißt jeder solcher Teil ist der Menge C ähnlich, dies motiviert uns C als *selbstähnlich* zu bezeichnen. Für die formale Definition des Begriffes benötigen wir den nachfolgenden Satz, der eine Verallgemeinerung des Banachschen Fixpunktsatzes ist und auf *Hutchinson* zurückgeht.

Satz 4.1.1 *Es sei X ein vollständiger metrischer Raum, $T_i : X \to X$ sei für $i = 1, \ldots, n$ jeweils eine Kontraktion. Dann gibt es genau eine kompakte Menge $K \subset X$ mit*

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} T_i(K).$$

Für den Beweis benötigen wir einige Hilfsmittel, die wir in Form mehrerer Lemmata formulieren.

Definition 4.1.2 *Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes X heißt* total beschränkt*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $N \subset K$ gibt mit*

$$K \subset \bigcup_{x \in N} B_\varepsilon(x).$$

Lemma 4.1.3 *In einem metrischen Raum X sind für eine Teilmenge $K \subset X$ die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *K ist (überdeckungs) kompakt.*
2. *K ist* folgenkompakt*, d.h. jede Folge in K enthält eine konvergente Teilfolge.*
3. *K ist total beschränkt und vollständig.*

Beweis. (1) impliziert (2): Sei K kompakt, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K, die keine konvergente Teilfolge besitze. Dann gibt es auch keinen Häufungspunkt der Folge, d.h. für jedes $x \in K$ gilt, dass es ein $\varepsilon(x) > 0$ gibt mit $B_{\varepsilon(x)}(x)$ enthält nur endlich viele Folgenglieder. Nun bildet die Menge $\{B_{\varepsilon(x)}(x)\}_{x\in K}$ eine endliche Überdeckung, also gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{\varepsilon(x_i)}(x_i).$$

Jede dieser endlich vielen Kugeln enthält nur endlich viele Folgenglieder, also ist die Folge endlich.
(2) impliziert (3): Wir wollen nun zeigen, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Elemente $x_i \in K,\ i = 1, \dots, m$ existieren mit

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_\varepsilon(x_i).$$

Angenommen, dies ist nicht der Fall. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für je endlich viele Punkte $x_i \in K,\ i = 1, \dots, m$ immer gilt

$$K \neq \bigcup_{i=1}^{m} B_\varepsilon(x_i).$$

Sei ein solches $eps > 0$ gegeben. Dann ist zu beliebig gewählten $x_1 \in K$ die Menge $B_\varepsilon(x_1) \neq K$, also gibt es ein

$$K \ni x_2 \notin B_\varepsilon(x_1).$$

Angenommen $x_1, \dots, x_k$ seien konstruiert mit

$$K \ni x_{j+1} \notin \bigcup i = 1^j B_\varepsilon(x_i), j = 1, \dots, k-1.$$

Dann ist aufgrund der Voraussetzung

$$K \neq \bigcup_{i=1}^{k} B_\varepsilon(x_i)$$

und wir finden ein

$$K \ni x_{k+1} \notin \bigcup_{i=1}^{k} B_\varepsilon(x_i).$$

Damit konstruieren wir induktiv eine Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. so dass jedes Folgenglied zu allen vorherigen einen Abstand mindestens ε hat. Also hat diese Folge keine konvergente Teilfolge, im Widerspruch zur Annahme. Damit diese Implikation gezeigt.
(3) impliziert (1): Wir nehmen an, K sei total beschränkt, aber nicht kompakt. Dann gibt es eine Überdeckung $\mathcal{U}$, so dass

$$K \subset \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U,$$

aber je endlich viele dieser Mengen U überdecken K nicht. Wir nehmen an, dass X total beschränkt sei, also gibt es zu $\varepsilon_1 = 1$ eine endliche Teilmenge $x_1^1, \ldots, x_{r_1}^1$ mit

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{r_1} B_1(x).$$

Nun überdeckt $\mathcal{U}$ jede der Mengen $B_1(x_i)$, $i = 1, \ldots r$ mindestens eine dieser Mengen besitzt keine endliche Teilüberdeckung, dies sei oBdA $B_1(x_1)$. Setze $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$. Dann gibt es $x_1^2, \ldots, x_{r_2}^2 \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{r_2} B_{\varepsilon_2}(x_i^2).$$

Insbesondere ist

$$B_1(x_1) \subset \bigcup_{i=1}^{r_2} (B_1(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_i^2)).$$

Eine dieser endlich vielen Mengen ist nicht endlich überdeckbar, oBdA ist dies

$$(B_1(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_1^2)).$$

Wähle $\varepsilon_3 = \frac{1}{4}$ und wiederhole den Vorgang. Induktiv sei $\varepsilon_n = 2^{1-n}$ für $n \geq 1$ definiert und Mengen

$$B_1(x_1^1) \cap \ldots B_{\varepsilon_n}(x_1^n)$$

gefunden, die nicht endlich überdeckbar sind (bzgl. $\mathcal{U}$). Betrachte die Folge

$$\{x_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Diese ist eine Cauchyfolge in K. Der Grenzwert (der aufgrund der Vollständigkeitsannahme für K) in K existiert, sei x_0. Dann gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ mit $x_0 \in U$. Da U offen ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x_0) \subset U$. Insbesondere gibt es $n_0 \in N$ mit $n > n_0$ impliziert $x_n \in B_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$. Sei $n_1 > n_0$, so dass

$$\varepsilon_n < \frac{\delta}{2}.$$

Dann ist für $n > n_1$

$$B_{\varepsilon_n}(x_n) \subset B_{\frac{\delta}{2}}(x_n) \subset B_\delta(x_0) \subset U.$$

Dies ist ein Widerspruch, dies beweist die Behauptung. □

Beweis von Satz 4.1.1. Wir betrachten die Halbgruppe von Abbildungen G, die von den Kontraktionen $T_1, \ldots, T_m$ erzeugt wird. Wir wollen im ersten Schritt zeigen, dass ein Orbit eines Punktes $x \in X$ unter dieser Halbgruppe, dd.h. eine Menge der Form

$$\left\{ gx \;\middle|\; g \in G \right\}$$

total beschränkt ist. Dazu zeigen wir, dass ein solcher Orbit in metrischen Kugel enthalten ist. Dazu sei $x \in X$ gegeben. Sei $r = \max \left\{ d(x, T_j x) \;\middle|\; j = 1, \ldots, m \right\}$ und

$$\lambda = \max \left\{ \lambda_j \;\middle|\; j = 1, \ldots, m \right\}.$$

Jedes $g \in G$ ist von der Form

$$g = T_{i_g(j)} \circ T_{i_g(j-1)} \circ \cdots \circ T_{i_g(1)}, i_g(j) \in \{1, \ldots, m\}.$$

Dann ist mit der Bezeichnung

$$\prod_{s=k}^{j} T_{i_g(s)} x = T_{i_g(j)} \circ \ldots T_{i_g(k)} x$$

$$\begin{aligned} d(gx, x) &\le \sum_{k=1}^{j-1} d\Big(\prod_{s=k}^{j} T_{i_g(s)} x, \prod_{s=k+1}^{j} T_{i_g(s)} x\Big) \\ &\le \sum_{k=1}^{j-1} \lambda^{j-k-1} d(T_{i_g(k)} x, x) \\ &\le r \sum_{k=1}^{j-2} \lambda^k \\ &\le \frac{r}{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Wir ordnen nun Worte w in m Zeichen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ Operatoren T_w zu, indem wir zunächst Worten aus einem Zeichen α_i den Opartor T_i zuordnen und bei Worten aus j Zeichen $w = (w_1 \ldots, w_m)$

$$T_w = T_{w_1} \circ \cdots \circ T_{w_j}$$

schreiben. Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben, $x, y \in X$ mit $d(x, y) < fracr1 - \lambda$ und w ein Wort der Länge j, so dass die Relation

$$\frac{\lambda^j r}{1 - \lambda} < \varepsilon$$

erfüllt.

□

Definition 4.1.4 *Selstähnlich*

Weitere Beispiele sind folgende selbstähnliche Objekte:

- Die Cantor-Menge,
- das Sierpinski-Dreieck,
- der Sierpinski-Teppich,
- der Menger-Schwamm,
- die von Koch-Kurve.

Dabei werden diese Objekte durch folgende Konstruktionen erhalten (C kennen wir ja bereits):

1. Sierpienski-Dreieck: wir betrachten ein gleichseitiges Dreieck D_0^0 und verbinden die Kantenmittelpunkte wieder zu einem Dreieck U_0 und betrachten
$$D_1 = D_0 \setminus U_0.$$
D_1 besteht aus drei gleichseitigen Dreiecken $D_1^j, \ j = 1, 2, 3$. Nun wiederholen wir den Schritt, den wir auf D_0 angewendet haben für jedes der Dreiecke D_1^j und damit neun Dreiecke $D_2^j, \ j = 1, \ldots 9$. Durch Iteration erhalten wir eine selbstähnliche Menge im$\mathbb{R}^2$.

2. Sierpinski-Teppich: Wir betrachten ein Quadrat Q_0 und teilen die kanten jeweils in drei gleiche Teile. Dadurch zerlegen wir das Quadrat in 9 Quadrate, das mittlere bezeichnen wir mit U_0. Sei
$$Q_1 = Q_0 \setminus U_0.$$
Damit bleiben 8 Quadrate $Q_1^j,\ j = 1, \dots, 8$ übrig, auf jedes dieser Quadrate wenden wir wieder den ersten Schritt an und erhalten
$$Q_2 = \bigcup Q_2^j,\ j = 1, \dots 64.$$
Wie zuvor ist offensichtlich, dass wir ein selbstähnliches Gebilde erhalten.

3. Der Menger Schwamm ergibt sich als dreidimensionales Analogon des Sierpinski-Teppichs: wir betrachten den Kubus $[0, 1]^3$ in jeder Koordinatenebene konstruieren wir den Sierpinski-Teppich im Quadrat $[0, 1]^2$. Für jede zu entnehmende Menge U betrachten wir $U \times [0, 1]$ bzw. $[0, 1] \times U$ und die dritte (weniger bequem zu formulierende Menge. Wir entnehmen aus $[0, 1]^3$ all diese mengen, das verbleibende Objekt nennen wir Menger-Schwamm, wiederum durch die Konstruktion erhalten wir sofort die selbstähnlichkeit.

4. In diesem Fall beginnen wir wieder mit einem gleichseitigen Dreieck und ersetzen nun das mittlere Drittel jeder Strecke durch ein nach außen gerichtetes gleichseitiges Dreieck (ohne Bodenlinie). Durch Iteration erhalten wir die von-Koch Kurve.

Für diese Mengen wollen wir einen Begriff der *Dimension* definieren. Bisher hat sich kein eindeutigen Dimensionsbegriff für solche Konstruktionen durchgesetzt. Es gibt unter Anderem folgende Definitionen von fraktaler Dimension, die leider nicht äquivalent sind:

1. Selbstähnlichkeitsdimension,
2. Hausdorff-Dimension,
3. Box-Dimension.

Gemeinsames Feature von all diesen Dimensionen ist: Der n-dimensionale Einheitswürfel hat Dimension n. Allgemeiner soll gelten: Wenn wir die Menge A in jeder Koordinatenrichtung in 10 Scheiben schneiden und dann 10^d Stücke herauskommen, soll die Dimension gleich d sein. Ebenso mit der Zahl 10 ersetzt durch eine beliebige Zahl.

Für selbstähnliche Mengen, also solche, die aus verkleinerten Kopien von sich selbst zusammengesetzt sind, bietet sich die Definition aus dem nachfolgenden Abschnitt an.

4.2 Selbstähnlichkeitsdimension

Definition 4.2.5 *Wenn eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ aus k Kopien von Bildern von sich selbst zusammengesetzt ist, die alle um den Faktor $s \in (0,1)$ skaliert sind, so ist die* ***Selbstähnlichkeitsdimension*** *von A gleich*

$$\dim_S(A) = -\frac{\log k}{\log s}.$$

Das ist dadurch motiviert, dass wir erwarten, dass die Dimension d die Gleichung

$$\left(\frac{1}{s}\right)^d = k$$

erfüllt. Auflösen nach d ergibt gerade die Formel in der Definition.

Beispiel 4.2.6

1. *Die Standard-Cantormenge C besteht aus $k = 2$ Kopien, die mit $s = 1/3$ skaliert sind. Somit ist*

$$\dim_S(C) = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

2. *Das Sierpinski-Dreieck D besteht aus $k = 3$ Kopien, skaliert mit $s = 1/2$. Somit ist*

$$\dim_S(D) = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

3. *Für den Sierpinski-Teppich T ist $k = 8$ und $s = 1/3$, somit*

$$\dim_S(T) = \frac{\log 8}{\log 3}.$$

Aufgabe 4.2.7 *Was ist die Selbstähnlichkeitsdimension des Menger-Schwamms?*

Wenn wir dem n-fachen Cantor-Staub $C \times \cdots \times C \subset \mathbb{R}^n$ betrachten (das n-fache Produkt der Standard-Cantormenge C), wie ist dann die Selbstähnlichkeitsdimension?

Was ist die Selbstähnlichkeitsdimension der Cantormenge $C(\lambda)$, die entsteht, wenn aus $[0,1]$ das offene mittlere Intervall der Länge $\lambda \in (0,1)$ entfernt wird, aus jedem verbleibenden Intervall der Länge x wieder das offene mittlere Intervall der Länge $\lambda x \in (0,1)$ entfernt wird usw.?

Natürlich sind solchermaßen selbstähnliche Mengen sehr speziell. Man kann die Definition noch etwas erweitern, um zuzulassen, dass der Skalierungsfaktor s bei jeder Kopie anders ist. Wir wollen uns aber gleich die allgemeinste Definition von Dimension ansehen, nämlich die der Hausdorff-Dimension.

4.3 Hausdorff-Dimension

Definition 4.3.8 *Für eine Menge A in $\mathbb{R}^n$ und $d \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ ist*

$$\begin{aligned} h^d_\varepsilon(A) &= \inf\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(U_i)^d \mid (U_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ Überdeckung von } A, \\ &\quad \operatorname{diam}(U_i) < \varepsilon \ \forall i \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Das d-dimensionale Hausdorff-Maß ist

$$h^d(A) := \lim_{\varepsilon\to 0} h^d_\varepsilon(A).$$

Letzterer Limes ist wohldefiniert, da h^d_ε monoton in ε ist. Man kann Folgendes zeigen:

Satz 4.3.9 *Für jedes A gibt es ein $d \in [0,\infty]$ mit*

$$\begin{aligned} h^s(A) &= \infty \qquad \text{für } s < d \\ h^s(A) &= 0 \qquad \text{für } s > d. \end{aligned}$$

Definition 4.3.10 *Die Zahl*

$$\begin{aligned} \dim_H(A) &= \inf\{s > 0 : h^s(A) = 0\} \\ &= \sup\{s \geq 0 : h^s(A) = \infty\} \end{aligned}$$

*heißt die **Hausdorff-Dimension** von A.*

Bemerkung 4.3.11 *Es folgt, dass für jedes nichtleere A die Hausdorff-Dimension gleich der Zahl d in dem vorigen Satz ist. Für die leere Menge kann man wahlweise 0 oder $-\infty$ als Dimension festsetzen. Letzteres ist praktisch, da dann Formeln wie $\dim_H(A \times B) \geq \dim_H(A) + \dim_H(B)$ stimmen. In der Literatur wird aber trotzdem oft 0 benutzt.*

Bemerkung 4.3.12 *Für $s = \dim_H(A)$ muss $h^s(A)$ keineswegs eine Zahl in $(0,\infty)$ sein; auch 0 und ∞ sind möglich.*

Aufgabe 4.3.13 *Finden Sie solche Mengen A.*

Der Vorteil der Hausdorff-Dimension ist, dass beliebigen Mengen eine Dimension zugeordnet werden kann. Das Problem mit der Hausdorff-Dimension ist, dass ihre Berechnung sehr schwer ist, sogar für ganz einfach Mengen wie $[0,1]^n$ oder die Standard-Cantormenge. Daher befassen wir uns jetzt noch mit einer weiteren Dimensionsdefinition, die immer noch reichlich allgemein ist, aber mit wesentlich weniger Aufwand berechenbar, sogar automatisiert per Computer.

4.4 Box-Dimension

Es gibt verschiedene Berechnungsvorschriften für die Box-Dimension, die alle dasselbe Ergebnis liefern und daher alle als Definition taugen.

Zunächst eine Definition, die herauskommt, wenn wir in der Definition der Hausdorff-Dimension den Term $\mathrm{diam}(U_i)$ ersetzen durch die obere Schranke für diese Durchmesser, also eine Zahl, die nicht von i abhängt:

Definition 4.4.14 *Sei A eine kompakte Menge in $\mathbb{R}^n$.*

Sei $N(\delta)$ die kleinste Zahl, so dass A mit $N(\delta)$ offenen Mengen von Durchmesser δ überdeckt werden kann.

*Definiere die **untere Box-Dimension** als*

$$\underline{\dim}_B(A) := \underline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\log N(\delta)}{-\log\delta} = \liminf_{\delta\to 0}\frac{\log N(\delta)}{-\log\delta}$$

*und die **obere Box-Dimension** als*

$$\overline{\dim}_B(A) := \overline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\log N(\delta)}{-\log\delta} = \liminf_{\delta\to 0}\frac{\log N(\delta)}{-\log\delta}.$$

*Wenn diese Zahlen übereinstimmen, heißt die Zahl die **Box-Dimension** von A :*

$$\dim_B(A) := \lim_{\delta\to 0}\frac{\log N(\delta)}{-\log\delta}.$$

Diese Definition ist schon leichter zu benutzen, erfordert aber immer noch etwas Gehirneinsatz bei der Berechnung von $N(\delta)$. Daher hier eine weitere (äquivalente Definition), die so einfach ist, dass ein Computer sie benutzen kann:

Definition 4.4.15 *Die δ-Parkettierung des $\mathbb{R}^n$ ist die Menge*

$$P(\delta) := \{[k_1\delta,(k_1+1)\delta]\times\cdots\times[k_n\delta,(k_n+1)\delta]\},$$

die aus kompakten Würfel der Kantenlänge δ besteht, welche Eckpunkte auf dem Gitter $\delta\mathbb{Z}^n$ haben.

Für eine Menge A sei $N_2(\delta)$ die Zahl der Würfel in $P(\delta)$, die A schneiden.

Dann können die untere Box-Dimension, die obere Box-Dimension und bei Gleichheit die Box-Dimension so definiert werden wie oben mit N ersetzt durch N_2.

Definition 4.4.16 *Sei $N_3(\delta)$ die minimale Zahl von Würfeln (der Dimension n), welche $A \subset \mathbb{R}^n$ überdecken, nicht notwendigerweise Elemente der Parkettierung $P(\delta)$.*

Dann können die untere Box-Dimension, die obere Box-Dimension und bei Gleichheit die Box-Dimension so definiert werden wie oben mit N ersetzt durch N_3.

Definition 4.4.17 *Sei $N_4(\delta)$ die kleinste Zahl, so dass A mit $N(\delta)$ offenen Bällen von Durchmesser δ überdeckt werden kann.*

D.h. $N_4(\delta)$ ist so definiert wie $N(\delta)$, außer dass statt beliebigen offenen Mengen nun Bälle genommen werden.

Dann können die untere Box-Dimension, die obere Box-Dimension und bei Gleichheit die Box-Dimension so definiert werden wie oben mit N ersetzt durch N_3.

Satz 4.4.18 *Die Box-Dimension, untere und obere Box-Dimension sind unabhängig davon, ob in der Definition N, N_2, N_3 oder N_4 steht.*

Proof. Jede Menge von Durchmesser δ ist enthalten in einem Cluster aus $3 \times \cdots \times 3$ Elementen der Parkettierung $P(\delta)$, also ist $N_3 \leq N_2 \leq 3^n N$.

Ein n-Würfel der Kantenlänge 1 kann mit $K(n)$ Bällen von Durchmesser 1 überdeckt werden, wobei die Konstante $K(n)$ nur von n abhängt. Also ist $N \leq K(n)N_3 \leq K(n)N_2$.

Offensichtlich ist auch $N \leq N_3$, da jeder Ball von Durchmesser δ in einen n-Würfel von Durchmesser δ passt.

Weiterhin ist $N = N_4$, da jeder offene Ball von Durchmesser δ eine offene Menge von Durchmesser δ ist und jede offene Menge von Durchmesser δ in einen Ball von Durchmesser δ hineinpasst.

Somit ändert sich N bei Übergang zu N_2, N_3 oder N_4 höchstens um eine (von δ unabhängige) multiplikative Konstante und $\log N$ höchstens um eine additive. Also hat

$$\frac{\log N(\delta)}{-\log \delta}$$

nach diesem Übergang denselben oberen und unteren Grenzwert. □

Es gibt noch weitere mögliche Modifikationen: Die Bälle oder Würfel können offen oder abgeschlossen gewählt werden usw. Wir haben bislang genug Definitionen.

Bemerkung 4.4.19 *Definition (N_2) ist für maschinelle Auswertung geeignet: Ein Computer kann für endlich viele Werte von δ (z.B. für einen einzigen Wert δ_0) $N_2(\delta)$ bestimmen und somit*

$$\frac{\log N(\delta_0)}{-\log \delta_0}$$

als Näherung der Dimension.