

Kapitel 2

Lineare dynamische Systeme

In diesem Kapitel diskutieren wir zunächst diskrete dynamische Systeme. Wir wollen dabei Aussagen über Stabilität von gewissen invarianten Mengen machen, indem wir linearisieren, d.h. eine im Allgemeinen nichtlineare Abbildung durch die Linearisierung approximieren. Dazu muss der Zustandsraum das Konzept der Linearisierung zulassen. Wir betrachten daher als Zustandsraum eine offene Menge im \mathbb{R}^n oder eine Mannigfaltigkeit. Grundlegend ist dabei ein kurzer Blick auf lineare Systeme im \mathbb{R}^n . Im zweiten Teil betrachten wir Matrixexponentialfunktion und deren Anwendung auf lineare Differentialgleichungen.

Inhalt

2.1	Jordan Form	44
2.2	Lineare Systeme	47
2.3	Ebene Systeme	48
2.4	Stabilität von Ruhelagen	51
2.5	Lineare Differentialgleichungen und Stabilität	54
2.5.1	Die Matrixexponentialfunktion	54
2.5.2	Ebene lineare Systeme	60
2.6	Newtons Methode als dynamisches System	64
2.7	Aufgaben	65

2.1 Jordan Form

In diesem kurzen Abschnitt wiederholen wir einige Begriffe der linearen Algebra. Sei $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit zugehöriger Matrix A (diese wird durch die Wahl einer Basis bestimmt). Wir gehen immer von der kanonischen Basis aus und identifizieren auf diese Weise die lineare Abbildung mit der Matrix. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert* von A , wenn es einen Vektor $u_c \in \mathbb{C}^n$ gibt mit

$$Au_c = \lambda u_c.$$

Dieser Vektor u_c wird *Eigenvektor* genannt. Natürlich müssen wir auch bei reellen Matrizen komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren zulassen. Deshalb arbeiten wir zunächst im komplexifizierten Raum \mathbb{C}^n . Die Eigenwerte sind Lösungen der *charakteristischen Gleichung*

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0. \quad (2.1)$$

Wegen des Fundamentalsatzes der Algebra gibt es (mit Vielfachheiten gerechnet) genau n Wurzeln dieser Gleichung. Jede Wurzel von (2.1) ist auch Eigenwert, jedoch gibt es im allgemeinen weniger als n Eigenvektoren. Die Gesamtheit der Eigenwerte von A bezeichnen wir als *Spektrum* von A , wir schreiben dafür $\sigma(A)$.

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, so setzen wir

$$K(\lambda) = \ker(A - \lambda \mathbb{1}).$$

Ist für einen Wert $\lambda \in \mathbb{C}$ die Menge $K(\lambda) \neq \{0\}$, so ist λ tatsächlich ein Eigenwert. Sei $m \geq 0$ die Dimension von $K(\lambda)$. $K(\lambda)$ ist enthalten im *verallgemeinerten Eigenraum*, der durch

$$E(\lambda) = \{u \in \mathbb{C}^n \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit } (A - \lambda \mathbb{1})^k u = 0\}$$

gegeben ist. Wir notieren zunächst das nachfolgende einfache Lemma.

Lemma 2.1.1 (Invarianz der Eigenräume) *Die Räume $K(\lambda)$, $E(\lambda)$ sind invariant unter der Abbildung A .*

Beweis. Der Punkt $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann in $K(\lambda)$ oder $E(\lambda)$, wenn es eine natürliche Zahl $d \in \mathbb{N}$ mit gibt, so dass $(A - \lambda \mathbb{1})^d x = 0$. Betrachte für ein solches x

$$(A - \lambda \mathbb{1})^d Ax = (A - \lambda \mathbb{1})^d Ax = A(A - \lambda \mathbb{1})^d x = 0.$$

Damit ist $Ax \in E(\lambda)$ bzw. $Ax \in K(\lambda)$. \square

Eine weitere Zerlegung in invariante Unterräume ist möglich. Dazu betrachtet man den minimalen Wert k_0 , so dass $\ker(A - \lambda \mathbb{1})^{k_0} = E(\lambda)$ ist. So eine Zahl existiert immer. In $E(\lambda)$ existiert eine Basis B , welches die Vereinigung von m Mengen H_1, \dots, H_m ist, wobei jedes H_k die Form

$$H_k = \{u_{k,1}, \dots, u_{k,r_k}\} \quad (2.2)$$

hat mit

$$(A - \lambda \mathbb{1})u_{k,i+1} = u_{k,i}, \quad i = 1, \dots, r_k, \quad (A - \lambda \mathbb{1})u_{k,1} = 0.$$

Die Einschränkung von A auf E_λ hat in der Basis B dann die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mathcal{B}_m \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

wobei jeder dieser $r_k \times r_k$ Blöcke \mathcal{B}_k die einfache Form

$$\mathcal{B}_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

hat. Damit haben wir die komplexe *Jordansche*¹ *Normalform* einer Matrix erhalten. In der reellen Jordanschen Normalform hat man auch eine Darstellung in Blöcken wie in (2.3), jedoch sehen die Blöcke i.a. anders aus. Ist

¹Camille Marie Ennemond Jordan (5.1.1838-21.1.1922) wurde zunächst zum Bergbauingenieur ausgebildet. Im Jahre 1916 wurde er Präsident der französischen Akademie der Wissenschaften. Sein Werk umfasst neben der Normalform Beiträge zur Algebra (u.a. zur Galois-Theorie), zur Analysis, zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und zur Topologie der Ebene (Kurvensatz).

λ reell so bleibt die Form (2.4) erhalten. Für komplexe Eigenwerte $\lambda = e^{i\alpha}$, ergibt sich statt (2.4) die Form

$$\mathcal{B}_k = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Eine einfache Begründung für diese Form ergibt sich aus der komplexen Jordanschen Normalform und der folgenden Überlegung. Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein komplexer Eigenwert einer reellen Matrix so ist $\bar{\lambda}$ ebenso ein Eigenwert und es gibt zu dem zur Menge aus Gleichung 2.2 $H_k = \{u_{k,1}, \dots, u_{k,r_k}\}$ eine Menge $H_k^* = \{\bar{u}_{k,1}, \dots, \bar{u}_{k,r_k}\}$ konjugiert komplexer Vektoren die eine entsprechende Basis zum Eigenwert $\bar{\lambda}$ bilden. Wir definieren nun ein Paar reeller Vektoren

$$\begin{aligned} v_{k,j} &= \frac{1}{2}(u_{k,j} + \bar{u}_{k,j}), \quad j = 1, \dots, r_k \\ w_{k,j} &= \frac{1}{2i}(u_{k,j} - \bar{u}_{k,j}), \quad j = 1, \dots, r_k. \end{aligned}$$

Nun sehen wir leicht

$$\begin{aligned} Av_{k,j} &= \frac{1}{2}(Au_{k,j} + A\bar{u}_{k,j}) \\ &= v_{k,j-1} + \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{k,j} \\ w_{k,j} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für $Aw_{k,j}$ ergibt eine ähnliche Rechnung ein ganz ähnliches Ergebnis. Für die Basis, die immer aus Paaren

$$H_k^{\mathbb{R}} = \{v_{k,1}, w_{k,1}, \dots, v_{k,r_k}, w_{k,r_k}\}$$

besteht ergibt sich dann die obige Abbildungsmatrix.

Wie sieht der Block für $\lambda = |\lambda|e^{i\alpha}$ aus?

2.2 Lineare Systeme

Im folgenden sei $X = \mathbb{R}^n$ der Zustandsraum, A sei eine lineare Abbildung $A : X \rightarrow X$, $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ oder $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$. Wir betrachten das dynamische System (X, d, \mathbb{T}, A) , wobei d die euklidische Metrik ist. Wir schreiben wir kurz (X, A) . Ist A injektiv, wählen wir $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, im anderen Fall ist $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$. Aus Lemma 2.1.1 folgt, dass $K(\lambda)$, $E(\lambda)$ invariante Mengen für das dynamische System (X, A) sind.

Lemma 2.2.1 (Asymptotik in den Eigenräumen) 1. Ist $|\lambda| < 1$ und $x \in E(\lambda)$, so gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = 0.$$

2. Ist $|\lambda| > 1$, so ist für $0 \neq x \in E(\lambda)$ die Folge $\{A^r\}_{r \in \mathbb{N}} x$ unbeschränkt. Die Folge wächst wie $|\lambda|^r$.

3. Ist $|\lambda| = 1$, so gilt $0 \neq x \in K(\lambda)$, dass

$$\{A^r x\}_{r \in \mathbb{N}}$$

eine beschränkte, von Null wegbeschränkte Folge ist mit

$$\|A^r x\| = \|x\|$$

für alle $r \in \mathbb{N}$ und einer geeigneten Norm auf V .

4. Ist $|\lambda| = 1$ und $x \in E(\lambda) \setminus K(\lambda)$ so ist $\{A^r x\}_{r \in \mathbb{N}}$ im Allgemeinen unbeschränkt, die Folge wächst höchstens polynomial in r .

Beweis.

1. Ist $x \in K(\lambda)$ so ist $A^k x = \lambda^k x \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Im allgemeinen Fall schreiben wir die Einschränkung auf $E(\lambda)$ in der Form $A = D + N$, wobei $D = \lambda \mathbb{1}$ und N nilpotent ist, d.h. es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $N^m = 0$. Dann ist für $r \in \mathbb{N}$

$$A^r = (D + N)^r = \sum_{j=1}^{m-1} \binom{r}{j} D^{r-j} N^j.$$

Dann sieht man mit

$$\begin{aligned}
 \|A^r x\| &\leq \sum_{j=0}^{m-1} \binom{r}{j} \|D^{r-j} N^j x\| \\
 &\leq m \binom{r}{m} |\lambda|^{r-m} \max \left\{ \|N^j x\| \mid j \leq m-1 \right\} \\
 &\leq Cm \binom{r}{m} |\lambda|^{r-m} \\
 &\leq \frac{Cm}{(m-1)!} |\lambda|^{-m} r^m |\lambda|^r
 \end{aligned}$$

leicht (mehrfaches Anwenden der Regel von de l'Hospital), dass

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A^r x = 0.$$

2. Der Beweis für den Fall $|\lambda| > 1$ folgt dem vorigen und braucht keine neuen Argumente.
3. Ist $|\lambda| = 1$, und $V_{\mathbb{C}}$ der komplexifizierte Raum, so ist für $x \in K(\Lambda)_{\mathbb{C}}$

$$A^r x = \lambda^r x$$

und damit ist

$$\|A^r x\| = \|\lambda^r x\| = |\lambda|^r \|x\| = \|x\|.$$

□

2.3 Ebene Systeme

Ein ebenes lineares diskretes System hat die Form

$$x_{n+1} = Bx$$

wobei $x_i \in \mathbb{R}^2$ und $B \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ist. Wir unterscheiden mehrere Fälle: B hat Eigenwerte λ_1, λ_2 mit

1. $|\lambda_{1,2}| < 1$
2. $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| = 1$

3. $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| > 1$
4. $|\lambda_{1,2}| = 1$
5. $|\lambda_1| = 1, |\lambda_2| > 1$
6. $|\lambda_{1,2}| > 1$

In den Fällen mit mindestens einem Eigenwert vom Betrag < 1 ist die Matrix eventuell nicht invertierbar und wir müssen die Fälle in denen mindestens ein Eigenwert 0 auftritt, getrennt betrachten.

$$|\lambda_{1,2}| < 1$$

Doppelter Eigenwert 0

Ist $B = 0$, so ist die Dynamik trivial: in einem Iterationsschritt landen wir in 0 und bleiben dort.

Ist $B \neq 0$, so hat die Jordan-Form von B die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ein Punkt der Form

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

wird auf

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

abgebildet und im nächsten Schritt auf die 0. Auch eine recht einfache Dynamik.

Ein Eigenwert 0

Nun kann B diagonalisiert werden, wir reduzieren in einem Schritt die Dynamik in eine eindimensionale Situation. Dort konvergiert die Folge gegen 0.

$$0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < 1$$

Hier könnten wir die Fälle ob die Eigenwerte gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben unterscheiden.

Im beiden Fällen gibt es die eindimensionalen Eigenräume $E(\lambda_i)$ die invariant unter der Dynamik sind. In beiden Unterräumen konvergieren die Folgen gegen 0 mit Raten $|\lambda_i|^n$.

[

$|\lambda_1| \leq 1, |\lambda_2| = 1$] Ein Eigenwert vom Betrag höchstens 1, mindestens ein Eigenwert vom Betrag 1

Ein Eigenwert 0, ein Eigenwert vom Betrag 1

In diesem Fall sind beide Eigenwerte einfach, und es gibt die zwei Möglichkeiten für die Jordanform

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

In einem Schritt erreicht man den Eigenraum zum Eigenwert vom Betrag 1, in einem Fall ist dieser gefüllt mit Ruhelagen, im anderen mit periodischen Orbits der Länge 2.

Ein Eigenwert $0 < |\lambda| < 1$, ein Eigenwert vom Betrag 1

Der Eigenwert vom Betrag 1 ist entweder 1 oder -1 . Hier hat man Konvergenz gegen eine Familie von Ruhelagen, oder gegen eine Familie periodischer Orbits der Länge 2.

Zwei Eigenwerte vom Betrag 1

Hier sind die einfachen Fälle aus Kombination von zwei reellen Eigenwerten ± 1 denkbar, bei gleichen Eigenwerten geometrisch doppelt, oder geometrisch einfach. Allerdings gibt es auch den Fall von einem Paar konjugiert komplexer Eigenwerte, entweder Einheitswurzeln $\lambda^p = 1, p \in \mathbb{Z}$ oder keine Einheitswurzeln. Die ersten Fälle mit Eigenwerten $\lambda_{1,2} = \pm 1$

$\lambda_1 \lambda_2 = -1$ führen auf periodische Orbits der Länge 2, zwei gleiche Eigenwerte mit geometrisch doppelten Eigenwerten führen ebenfalls auf Ruhelagen oder periodische Orbits, sind aber keine stabilen Situationen. Im Fall von geometrisch einfachen, algebraisch doppelten Eigenwerten ± 1 hat man polynomiale Divergenz.

2.4 Stabilität von Ruhelagen

Wir betrachten nun die Situation einer nichtlinearen Abbildung $f : U \rightarrow U$, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist. Die Situation einer offenen Teilmenge einer Mannigfaltigkeit M wird ganz entsprechend behandelt. Wir nehmen an, $x_0 \in U$ sei eine Ruhelage von f , also $f(x_0) = x_0$. Wir nehmen an, f sei stetig differenzierbar und $A = D_x f(x_0)$. OBdA dürfen wir annehmen, dass $x_0 = 0$ ist, indem wir

$$f_1(x) = f(x + x_0) - x_0$$

setzen, dann ist

$$f_1(0) = f(x_0) - x_0 = 0$$

und $D_x f_1(0) = D_x f(x_0)$.

Lemma 2.4.1 *Der Punkt 0 hat bezüglich (X, f_1) das gleiche Stabilitätsverhalten, wie der Punkt x_0 bzgl. (X, f) .*

Beweis.

1. Ist x_0 stabil, so gibt es zu einer Umgebung $x_0 \in U$ eine Umgebung $x_0 \in V$, so dass $x \in V$ impliziert $\mathcal{O}^+(x) \subset U$. Zu einer Umgebung von $0 \in \tilde{U}$, setzen wir $U = \tilde{U} + x_0$. Dann sei V die zugehörige Menge wie gefordert und $\tilde{V} = V - x_0$ eine Umgebung von 0. Ist nun $y \in V$ so ist $x = y + x_0$ in V und $\mathcal{O}^+(x) \subset U$. Behauptung: $\mathcal{O}(y) = \mathcal{O}(x) - x_0$. Ist dies gezeigt, so folgt $\mathcal{O}^+(y) \subset \tilde{U}$. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion. $f_1(y) = f(y + x_0) - x_0 = f(x) - x_0$. Damit ist der Induktionsanfang erbracht. Angenommen es gilt für $k = 1, \dots, n$ $f_1^{(k)}(y) = f^{(k)}(x) - x_0$. Dann ist

$$f_1^{(n+1)}(y) = f_1(f_1^{(n)}(y)) = f_1(f^{(n)}(x) - x_0) = f(f^{(n)}(x)) - x_0 = f^{(n+1)}(x) - x_0.$$

Dies zeigt den Induktionsschritt und damit ist die Behauptung gezeigt.

2. Die Rückrichtung folgt mit dem gleichen Argument.
3. Ist x_0 asymptotisch stabil bzgl. f , so ist x_0 stabil und damit auch 0 stabil bzgl. (X, f_1) . Also muss nur noch die Attraktivität von 0 gezeigt werden. Nun wählt man die Umgebung mit der gleichen Konstruktion wie oben, dann ergibt sich mit $x = y + x_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_1^{(n)}(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f^{(n)}(x) - x_0) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) \right) - x_0 = x_0 - x_0 = 0.$$

4. Auch hier ergibt sich die Rückrichtung auf natürliche Weise. □

Es sei $g = f - A$ und damit gilt

$$Dg(x_0) = 0$$

und zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jeder Norm auf $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ gibt es eine Umgebung V von 0 mit

$$\|Dg(y)\|_{L(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$$

für $y \in V$.

Definition 2.4.2 (Stabilität von Ruhelagen) 1. Eine Ruhelage heißt stabil, wenn sie als kompakte invariante Menge stabil ist.

2. Sie wird als asymptotisch stabil bezeichnet, wenn sie als invariante Menge ein Attraktor ist.

3. Ist die Ruhelage nicht stabil, so bezeichnen wir sie als instabil.

Satz 2.4.3 (Stabilität von Ruhelagen) Es sei $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U; U)$ mit $A = D_x f(0)$. Dann gilt: Ist $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, dann ist 0 asymptotisch stabil.

Beweis. Der Spektralradius $\rho(A) < s < 1$. Daher gibt es eine Norm, mit zugehöriger Operatornorm, so dass

$$\|A\|_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} < s.$$

Ist $\varepsilon < 1 - s$, so ist auf V , $\|Df\| < k < 1$. Dann ist für $x \in B_\delta(0) \subset V$

$$\|f(x) - f(0)\| \leq \|Df(\xi)\|_{L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)} \|x\| \leq k \|x\| < \delta.$$

Somit ist 0 stabil, und das gleiche Argument zeigt, dass 0 attraktiv ist. □

Satz 2.4.4 (Störungssatz) *Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar auf einer Umgebung W eines Fixpunktes x_0 und ist $\|Df(x_0)\| < 1$, so gibt es eine abgeschlossene, konvexe Umgebung U von x_0 , so dass $f(U) \subset U$ und f ist Kontraktion auf U . Ferner ist jede hinreichend nahe an f gelegene Abbildung $g : U \rightarrow U$ (f, g nahe in $C^1(U; U)$) auf U eine Kontraktion ist (und besitzt damit einen asymptotisch stabilen Fixpunkt besitzt).*

Wir erhalten dafür einen zweiten *Stabilitätsbegriff*: (U, f) ist als System stabil (gegen Störungen). Dieser Begriff spielt in der Theorie dynamischer Systeme eine sehr große Rolle.

Beweis. Sei $k = \|Df(x_0)\| < 1$ und $\varepsilon > 0$ mit $k + \varepsilon < 1$. Sei $\delta > 0$, so dass für $x \in B_\delta(x_0)$ gilt

□

Da jeder periodische Punkt der Periode $p \in \mathbb{N}$ eines dynamischen Systems (X, f) eine Ruhelage des dynamischen Systems $f^{(p)}$ ist, definieren wir die Stabilität eines periodischen Orbits mittels der Stabilität einer Ruhelage.

Definition 2.4.5 *Es sei (X, f) ein diskretes dynamisches System, $x_0 \in X$ ein periodischer Punkt der Periode $p \in \mathbb{N}$. Dann nennen wir den periodischen Punkt stabil, falls x_0 als Ruhelage des dynamischen Systems $(X, f^{(p)})$ stabil ist.*

Lemma 2.4.6 *Es sei (X, f) ein diskretes dynamisches System, $x_0 \in X$ ein stabiler periodischer Punkt der Periode $p \in \mathbb{N}$. Dann sind alle Punkte in $\mathcal{O}(x_0)$ Ruhelagen von $(X, f^{(p)})$ und als solche stabil.*

Beweis. Übungen

□

Als hinreichendes Kriterium erhält man nun aus dem obigen Satz über die Stabilität von Ruhelagen im \mathbb{R}^n (bzw. auf einer Mannigfaltigkeit) den nachfolgenden Satz.

Satz 2.4.7 (Stabilität von periodischen Punkten) (1) *Es sei $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U; U)$ mit $A = D_x f^{(p)}(0)$. Dann gilt: Ist $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, dann ist 0 asymptotisch stabil.*

(2) *Ist $\mathcal{O}(x_0) = (x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ der periodische Orbit, so ist dieser stabil, wenn das Spektrum der Matrix*

$$A = Df(x_0) \circ \dots \circ Df(x_{p-1})$$

$$\sigma(A) \subset \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \right\}$$

liegt.

Beweis. (1) Folgt sofort aus der Definition und dem entsprechenden für die Stabilität von Ruhelagen. Die zweite Aussage erhält man mit der Produktregel. \square

2.5 Lineare Differentialgleichungen und Stabilität

2.5.1 Die Matrixexponentialfunktion

Definition 2.5.1 Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Wir setzen $\|A\| = \sup \{ |Au| \mid u \in \mathbb{R}^n, |u| = 1 \}$.

Lemma 2.5.2 $\|\cdot\|$ ist eine Norm auf dem linearen Raum der linearen Abbildungen von \mathbb{R}^n in sich. Außerdem gilt $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Beweis. Einfaches Nachrechnen! \square

Definition 2.5.3 Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Die Funktion $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ sei definiert durch

$$E(A, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k. \quad (2.6)$$

Wir nennen $E(A, t)$ die Matrixexponentialfunktion und schreiben dafür auch

$$E(A, t) = e^{At}.$$

Lemma 2.5.4 Die Funktion $E(A, t)$ ist für jedes $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und jede reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ definiert.

Beweis. Übungsaufgabe! \square

Satz 2.5.5 Die Matrixexponentialfunktion $E(A, t)$ löst das Anfangswertproblem

$$\dot{C} = AC, C(0) = \mathbb{1}. \quad (2.7)$$

Die Lösung ist eindeutig.

Beweis. Zunächst betrachten wir eine Teilsumme der Reihe $E(A, t)$

$$E_m(A, t) = \sum_{k=0}^m \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Die Ableitung von $E_m(A, t)$ ist natürlich

$$\dot{E}_m(A, t) = \sum_{k=1}^m \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k = A E_{m-1}(A, t).$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der rechten Seite (auf kompakten Teilmengen von \mathbb{R}) ist $E(A, t)$ differenzierbar und $\dot{E}(A, t) = A E(A, t)$. Natürlich ist auch $E(A, 0) = \mathbb{1}$.

Betrachte eine Lösung $C(t)$ des Anfangswertproblems 2.7 und damit die Funktion

$$X(t) = C(t)E(-A, t).$$

Dann ist $\dot{X}(t) = 0$ und damit konstant. $X(0) = \mathbb{1}$ und damit ist

$$C(t) = E(-A, t)^{-1}.$$

Wir wollen noch zeigen

$$E(-A, t) = E(A, t)^{-1}.$$

Dazu betrachten wir $E_m(A, t)E_m(-A, t)$, dies ergibt

$$\begin{aligned} E_m(A, t)E_m(-A, t) &= \sum_{j=0}^m \frac{t^j}{j!} A^j \sum_{k=0}^m \frac{t^k}{k!} A^k \\ &= \sum_{s=0}^m \sum_{j=0}^s \frac{1}{j!(s-j)!} (-1)^j t^s A^s + \sum_{s=m+1}^{2m} \sum_{j=s-m}^m \frac{1}{j!(s-j)!} (-1)^j t^s A^s \\ &= \mathbb{1} + \sum_{s=m+1}^{2m} \sum_{j=s-m}^m \frac{1}{j!(s-j)!} (-1)^j t^s A^s, \end{aligned}$$

da für $0 < s \leq m$ gilt

$$\sum_{j=0}^s (-1)^j \frac{1}{j!(s-j)!} = 0.$$

Für $m \rightarrow \infty$ wird der andere Summand gleichmäßig auf beschränkten Mengen klein und konvergiert

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E_m(A, t)E_m(-A, t) = \mathbb{1}.$$

□

Die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{u} = Au$, $u(0) = u_0$ erhält man also durch $u(t, u_0) = E(A, t)u_0$.

Hilfssatz 2.5.6 Kommutieren die beiden Matrizen A, B miteinander, d.h. ist $AB = BA$, folgt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$BE(A, t) = E(A, t)B,$$

und es gilt

$$E(A + B, t) = E(A, t)E(B, t) = E(B, t)E(A, t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Die erste Eigenschaft ist eine unmittelbare Konsequenz der Definition, die zweite erhält man aus dem Eindeutigkeitsatz für die Lösung von Anfangswertproblemen 2.7, indem man nachprüft, dass $E(A + B, t)$ und $E(A, t)E(B, t)$ das gleiche Anfangswertproblem lösen:

$$E(A + B, 0) = \mathbb{1} = E(A, 0)E(B, 0)$$

und

$$\dot{E}(A + B, t) = (A + B)E(A + B, t)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(A, t)E(B, t) &= \dot{E}(A, t)E(B, t) + E(A, t)\dot{E}(B, t) \\ &= AE(A, t)E(B, t) + BE(A, t)E(B, t) \\ &= (A + B)E(A, t)E(B, t). \end{aligned}$$

□

A kann durch eine Ähnlichkeitstransformation in die Jordansche Normalform gebracht werden. Sei J die Jordansche Normalform von A und C die Transformationsmatrix, also $J = CAC^{-1}$. Die allgemeine Form des Verhaltens der Lösungen unter Koordinatentransformation ist in Aufgabe

20, Blatt 5 angegeben. Für den Spezialfall können wir die Lösung des Ausgangsproblems gewinnen, indem wir A in die Jordansche Normalform überführen, für diese dann die Gleichung lösen und zurücktransformieren. Wir erhalten

$$u(t, u_0) = E(A, t)u_0 = C^{-1}v(t, Cu_0) = C^{-1}E(J, t)Cu_0.$$

Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt noch

$$E(A, t) = C^{-1}E(CAC^{-1}, t)C.$$

Natürlich kann man diese Formel auch unmittelbar aus der Definition von $E(A, t)$ schließen. Zur allgemeinen Lösung linearer Anfangswertprobleme müssen wir noch $E(J, t)$ ausrechnen. Wir gehen von der Gestalt (2.3) aus. Natürlich gilt für eine Matrix J in Blockdiagonalgestalt

$$J = \text{diag}(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m),$$

dass die Matrixexponentialfunktion auch Blockdiagonalgestalt annimmt, also

$$E(J, t) = \text{diag}(E(\mathcal{B}_1, t), \dots, E(\mathcal{B}_m, t)).$$

Ist \mathcal{B} ein Block der Länge 1, also $\mathcal{B} = (\lambda)$, so ist natürlich $E(\mathcal{B}, t) = e^{\lambda t}$. Ist \mathcal{B} ein Block der Länge $r > 1$ und der zugehörige Eigenwert λ reell, so ergibt sich die Exponentialreihe aus folgenden Betrachtungen.

Lemma 2.5.7 *Ein Block der Gestalt (2.4) ist die Summe einer Diagonalmatrix D und einer nilpotenten Matrix N .*

Beweis. Natürlich ist $D = \text{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$. Übrig bleibt die $r \times r$ Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass $N^r = 0$ ist. Damit ist N nilpotent. \square

Bemerkung 2.5.8 *Genauer gilt, dass jede Matrix A Summe einer diagonalisierbaren und einer nilpotenten Matrix ist. Unser Beweis zeigt dies zumindest für reelle Matrizen mit ausschließlich reellen Eigenwerten.*

Lemma 2.5.9 *Die Matrixexponentialfunktion $E(\mathcal{B}, t)$ eines Jordan-Blocks der Länge r zum Eigenwert λ hat die Gestalt*

$$E(\mathcal{B}, t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/6 & \dots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & t^3/6 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & t^2/2 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & t \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Beweis. Es gilt $DN = ND$ und daher mit dem Hilfssatz 2.5.6

$$E(\mathcal{B}, t) = E(D + N, t) = E(D, t)E(N, t).$$

Nun ergibt $E(D, t) = e^{\lambda t} \mathbb{1}$ und da N nilpotent ist, hat man

$$E(N, t) = \mathbb{1} + tN + \frac{t^2}{2}N^2 + \dots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}N^{r-1}.$$

□

Für einen nichtreellen Eigenwert stellt man die gleiche Betrachtung im Komplexen an und schneidet den Lösungsraum mit dem \mathbb{R}^n . Wir wollen die entsprechende Formel im Moment nicht angeben.

Satz 2.5.10 (Algebraische Struktur des Lösungsraumes I) *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Wir setzen $U = \{u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid \dot{u} = Au\}$. U ist ein linearer Raum. Die Dimension von U ist n .*

Beweis. Offensichtlich ist die Summe zweier Lösungen wieder eine Lösung. Gleiches gilt für das Produkt ξu mit $\xi \in \mathbb{R}$ und $u \in U$. Also bleibt zu zeigen, dass $\dim U = n$ ist. Sei $\mathcal{A} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Abbildung $\mathcal{A}u = u(0)$. Offensichtlich ist \mathcal{A} linear und wegen der eindeutigen Lösbarkeit von Anfangswertproblemen injektiv. Wegen des globalen Existenzsatzes ist \mathcal{A} surjektiv. Also gilt $U \simeq \mathbb{R}^n$. □

Als nächsten Schritt betrachten wir die *inhomogene lineare Gleichung*, gegeben durch

$$\dot{u} = Au + f(t), \quad (2.10)$$

wobei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung ist. Wir wissen, aufgrund des Existenzsatzes, dass diese Gleichung bei Vorgabe eines Anfangswertes lösbar ist. Die algebraische Struktur ist natürlich etwas anders als vorher. Wie in der linearen Algebra besteht die allgemeine Lösung aus einer speziellen Lösung plus einem beliebigen Element aus U .

Satz 2.5.11 (Algebraische Struktur des Lösungsraumes II) Sei

$$U_f = \{u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid \dot{u} = Au + f(t)\}.$$

U_f ist ein n -dimensionaler affiner Unterraum von $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Es existiert also ein $u^0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft, dass

$$U_f = \{u^0 + u \mid u \in U\}.$$

Beweis. Wie schon bemerkt, hat die Gleichung (2.10) immer eine Lösung. Sei u^0 eine solche Lösung. Dann ist natürlich für $u \in U$ auch $u^0 + u$ eine Lösung. Wir müssen noch zeigen, dass jede Lösung diese Form hat. Sei u^1 eine weitere Lösung der Gleichung (2.10). Dann ist $u^0 - u^1$ eine Lösung der homogenen linearen Gleichung (einfaches Nachprüfen zeigt dies). Damit ist $u^0 - u^1 \in U$. \square

Wir wollen uns noch kurz Gedanken machen, wie man eine spezielle Lösung u^0 findet.

Lemma 2.5.12 (Formel der Variation der Konstanten) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Sei $u_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist eine spezielle Lösung der Gleichung $\dot{u} = Au + f(t)$ gegeben durch

$$u^0(t) = e^{At}u_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds. \quad (2.11)$$

Beweis. Differenzieren ergibt

$$\frac{d}{dt}u^0(t) = Ae^{At}u_0 + [e^{A(t-s)}f(s)]_{|s=t} + \int_0^t \frac{d}{dt}e^{A(t-s)}f(s)ds,$$

also

$$\frac{d}{dt}u^0(t) = Ae^{At}u_0 + f(t) + A \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds = Au + f(t).$$

\square

2.5.2 Ebene lineare Systeme

In diesem Abschnitt wollen wir ebene, lineare und autonome Systeme charakterisieren. Wir betrachten also eine Gleichung der Form

$$\dot{u} = Au, \quad (2.12)$$

wobei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ eine lineare Abbildung ist. Seien λ_1, λ_2 die Eigenwerte von A . Wir unterscheiden:

1. $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$;
2. $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$;
3. $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \operatorname{Re}\lambda_1 > 0$;
4. $\lambda_1 > \lambda_2 = 0$;
5. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$;
6. $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 = 0, \lambda_i \neq 0$;
7. $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$;
8. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$;
9. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$;
10. $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \operatorname{Re}\lambda_1 < 0$;
11. $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$.

1. Fall: Dabei hat die Jordan Normalform die Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Seien e_1, e_2 die Eigenvektoren zu $\lambda_{1,2}$. Dann konvergieren alle Lösungen für $t \rightarrow -\infty$ gegen Null, für $t \rightarrow \infty$ verlassen alle Lösungen (außer einer!) jedes Kompaktum. Sie schmiegen sich (für $t \rightarrow -\infty$) an die e_2 -Achse an.

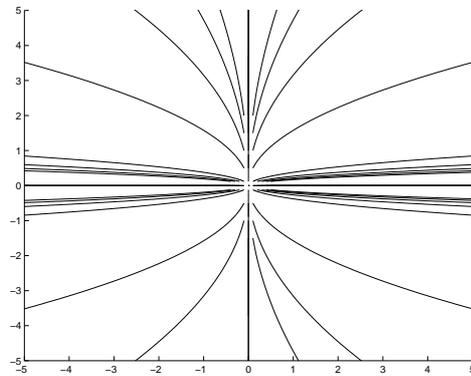


Abbildung 2.1: Die Trajektorien von $E(J, t)$.

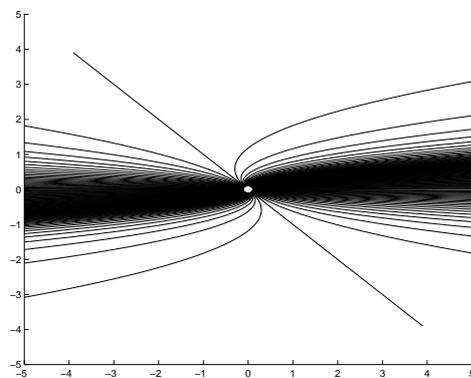


Abbildung 2.2: Die Trajektorien von $E(A, t)$ mit schief liegenden Eigenräumen.

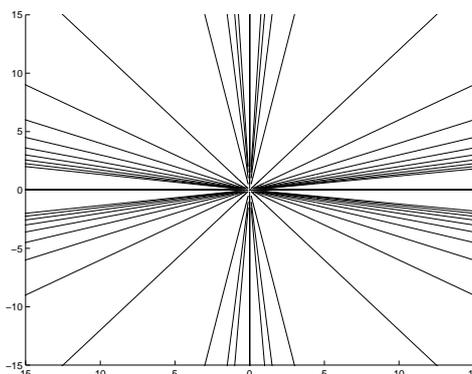


Abbildung 2.3: Die Trajektorien von $E(J, t)$ mit halbeinfachen Eigenwerten.

2. Fall: Wir unterscheiden zwei mögliche Formen des Jordan Blocks (Eigenwerte sind geometrisch einfach oder nicht). Zunächst der Fall der geometrisch einfachen Eigenwerte. Hier hat der entsprechende Jordanblock die Form

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Alle Lösungen haben dieselben Konvergenzeigenschaften wie zuvor. Nur ist die Bewegung längs gerader Linien.

Ist der Eigenwert nicht geometrisch einfach, so hat der Jordanblock die Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Auch hier hat man die Konvergenzeigenschaften wie im ersten Fall, jedoch schaut das Bild wiederum anders aus.

3. Fall: Wieder ergibt sich die gleiche Konvergenz, jedoch erhält man einen Strudel. Sei $\lambda_1 = |\lambda|e^{i\theta}$. Dann ist $\lambda_2 = |\lambda|e^{-i\theta}$ und die reelle Normalform hat die Form

$$J = |\lambda| \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

4. Fall: Für die Jordan Form ergibt sich

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

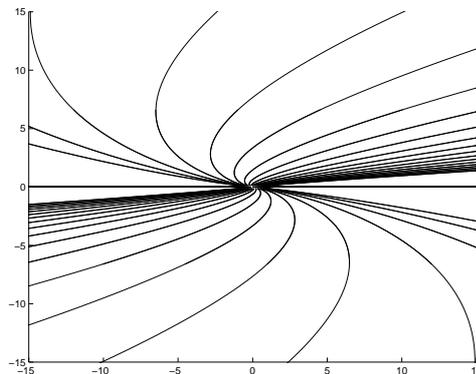


Abbildung 2.4: Die Trajektorien von $E(J, t)$ mit geometrisch einfachem, algebraisch doppelten Eigenwert.

Längs der e_2 -Achse hat man konstante Lösungen (*Ruhelagen*). Alle anderen Lösungen konvergieren für $t \rightarrow -\infty$ gegen 0 und verlassen in positiver Zeitrichtung jedes Kompaktum.

5. Fall: In diesem Fall hat die Jordan Form das Aussehen

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

oder

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Der erste dieser beiden Fälle liefert ausschließlich konstante Lösungen. Im zweiten hat man eine Bewegung auf Parallelen zur e_1 -Achse gegen unendlich.

6. Fall: Unsere Abbildung erhält die Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Wir erhalten Lösungen, die sich auf Kreislinien um den Ursprung bewegen.

7. Fall: Ein qualitativ neues Bild ergibt sich hier. Auf der einen Achse bewegt man sich für $t \rightarrow \infty$ gegen unendlich und für $t \rightarrow -\infty$ gegen Null, auf der anderen Achse hat man das gegenteilige Verhalten. Dazwischen sind Lösungen, die für beide Zeitrichtungen jedes Kompaktum verlassen

und sich für $t \rightarrow \pm\infty$ an die jeweilige Eigenwertachse anschmiegen. (Dies ist die Motivation für den Begriff *hyperbolisch*, den wir noch einführen werden.)

In den anderen Fällen ergeben sich ganz ähnliche Bilder wie bisher, nur die Zeitrichtungen sind anders. Wir geben nur die Normalformen und die Bilder, keine weiteren Kommentare.

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

8. Fall:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

oder

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

9. Fall:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

10. Fall:

$$J = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

11. Fall:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

2.6 Newtons Methode als dynamisches System

Numerische Methoden zur Lösung eines (nichtlinearen) Gleichungssystems

$$f(z) = 0.$$

Iterationsvorschrift

$$x_1 = x_0 - Df(x_0)^{-1}f(x_0).$$

Fixpunkte dieser Gleichung lösen

$$x_0 = x_0 - Df(x_0)^{-1}f(x_0)$$

und damit

$$f(x_0) = 0.$$

Definition 2.6.1 Ein Fixpunkt einer Iteration F heißt *superattraktiv*, falls $DF(x_0) = 0$.

Als Abbildung F erhalten wir

$$F(x) = x - Df(x)^{-1}f(x).$$

Nun ergibt sich

$$DF(x_0) = \mathbb{1} - (Df(x_0)^{-1})Df(x_0) - (Df(x_0)^{-1})^2 D^2f(x_0)[\cdot, f(x_0)] = 0.$$

Also ist der Fixpunkt *superattraktiv* und die Konvergenz gegen den Fixpunkt ist *quadratisch*.

Allerdings ist das globale Verhalten sehr viel komplizierter: sucht man nach den komplexen Nullstellen von einfachen Gleichungen wie $z^3 = 1$, so sieht man, dass die Einzugsgebiete der einzelnen Lösungen, d.h. die Gebiete $\omega(z) = z_i$ auf komplizierte Weise ineinander verwoben sind.

2.7 Aufgaben

Aufgabe 2.7.1 Beweisen Sie Lemma 2.4.6.

Aufgabe 2.7.2 Geben Sie einen vollständigen Beweis von Satz 2.4.7.

Aufgabe 2.7.3 Zeigen Sie: ist A schiefssymmetrisch, so ist $E(A, t)$ orthogonal.

Aufgabe 2.7.4 Untersuchen Sie, ob $A \mapsto E(A, 1)$ als Abbildung $\mathbb{M}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) \rightarrow \text{GL}(2; \mathbb{R})$ surjektiv ist. Vergleichen Sie das Resultat mit der Situation über \mathbb{C} .

Aufgabe 2.7.5 Wir betrachten das Newton-Verfahren zur Berechnung der Lösung von $z^3 - 1 = 0$ in \mathbb{C} als dynamisches System (\mathbb{C}, F) .

Erstellen Sie eine Graphik, die den Einzugsbereich der Lösungen der Gleichung $z^3 - 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$ anzeigt. Dabei ist der *Einzugsbereich* der Lösung z_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, definiert als die Menge der Punkte $\left\{ z \in \mathbb{C} \mid \omega(z) = z_i \right\}$, wobei sich $\omega(z)$ auf das dynamische System (\mathbb{C}, F) bezieht.

