

Kapitel 4

Bifurkationen

Bifurkationstheorie ist der Ausgangspunkt einer großen Anzahl von Anwendungen der Theorie dynamischer Systeme in der Technik (z.B. Auftreten von unerwünschten Schwingungen) in den Naturwissenschaften (z.B. Belousov-Zabosinski-Reaktion) in den Wirtschaftswissenschaften (???). Hier betrachten wir dynamische Systeme, die von einem Parameter abhängen und bei denen sich unter Variation des Parameters die Lösungsstruktur verändert. Es kann dabei sein, dass sich einzig die Anzahl der Gleichgewichte verändert (Knickprobleme wie z.B. Eulerbalken), dass sich Schwingungen um ein vorher vorhandenes Gleichgewicht einstellen (Hopf-Bifurkation, Taylor-Problem in der Fluidmechanik), oder dass sich Muster bilden (Bifurkation mit Symmetrie, Netzwerkdynamik).

4.1 Grundlegendes

Die nachfolgende Definition kann man in verschiedenen Formen der Allgemeinheit angeben, wir wollen hier einen relativ einfachen Kontext vorgeben.

Definition 4.1.1 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, wir betrachten $\text{Lip}(U)$ aller lokal Lipschitz stetigen Vektorfelder auf U mit der Metrik d_L . Gibt es zu $V_0, V_1 \in \text{Lip}(U)$ einen Homöomorphismus $h : U \rightarrow U$ mit*

1. *h bildet Trajektorien bzgl. V_0 auf solche bzgl. V_1 ab und*
2. *h erhält die durch die Zeit auf den Trajektorien vorgegebene Orientierung*

Aufgabe 4.1.2 Formulieren Sie eine entsprechende Bedingung für diskrete dynamische Systeme (X, f) .

Definition 4.1.3 Ein Vektorfeld $V \in \text{Lip}(U; \mathbb{R}^n)$ heißt strukturell stabil, wenn es eine Kugel $B_\varepsilon(V_0) \subset \text{Lip}(U; \mathbb{R}^n)$ bezüglich der Metrik d_L gibt, so dass jedes $V \in B_\varepsilon(V_0)$ topologisch äquivalent zu V_0 ist.

Satz 4.1.4 1. Topologische Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation.

2. Notwendig für topologische Äquivalenz zweier Systeme ist, dass die Mengen der Ruhelagen homöomorph sind, die Mengen der periodischen Orbits homöomorph sind. Bei diskreten Systemen sind auch die Periodenlängen unter Äquivalenz erhalten.

Beweis. Die erste Aussage ist nahezu trivial. Nachdem eine topologische Äquivalenz Ruhelagen auf Ruhelagen und periodische Orbits auf periodische Orbits abbildet, muss die Menge der Ruhelagen und die Vereinigung aller periodische Orbits in beiden Systemen gleichmächtig sein. \square

Aufgabe 4.1.5 Man formuliere eine entsprechende Äquivalenzrelation für diskrete dynamische Systeme und beweise, dass bei diskreten Systemen auch die Periode eine Invariante unter Äquivalenz sein.

Definition 4.1.6 Sei $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz stetiges Vektorfeld. gibt es in jeder Umgebung von V zwei Lipschitzstetige Vektorfelder V_1, V_2 , die nicht topologisch äquivalent sind, so nennen wir V ein verzweigendes Vektorfeld.

In dieser Allgemeinheit ist der Begriff des verzweigenden Vektorfeldes nichts anderes als die Aussage, dass V nicht strukturell stabil ist. Wir betrachten den Fall einer parametrisierten Menge von Vektorfeldern. Dazu sei P ein metrischer Raum, der Parameterraum und wir nehmen an, dass wir eine stetige Abbildung

$$P \rightarrow \text{Lip}(U, \mathbb{R}) : p \mapsto V(\cdot, p)$$

haben. Nun definieren wir

Definition 4.1.7 Ein Punkt $p_0 \in P$ heißt Verzweigungspunkt, wenn es in jeder Umgebung von p_0 zwei Parameterwerte p_1, p_2 gibt mit $V(\cdot, p_1)$ und $V(\cdot, p_2)$ sind nicht topologisch äquivalent.

Die einfachsten Verzweigungen sind solche wenn sich bei einem Parameterwert die Anzahl der Ruhelagen oder von periodischen Lösungen ändert, oder aber sich die Länge von periodischen Lösungen ändert.

Um solche Phänomene untersuchen zu können, brauchen wir einige Aussagen über parameterabhängige Matrizen. Wir beginnen mit der folgenden einfachen Aussage.

Satz 4.1.8 *Es sei λ_0 ein (algebraisch) einfacher Eigenwert von $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. dann gibt es eine Umgebung $B_\varepsilon(A_0)$ und eine glatte Funktion $\lambda : B_\varepsilon(A_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda(A_0) = \lambda_0$ mit*

$$A \in B_\varepsilon(A_0) \Rightarrow \lambda(A) \text{ ist Eigenwert von } A.$$

Der Eigenwert $\mu(A)$ ist (algebraisch) einfach, die Abbildung $A \mapsto \lambda(A)$ ist reell analytisch der zugehörige Eigenvektor kann ebenfalls reell analytisch gewählt werden.

Beweis. Wir lösen die Eigenwertgleichung

$$Av = \lambda v$$

in einer geeigneten Weise mit dem Satz über implizite Funktionen.

Sei $v_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v_0\|_{\mathbb{R}^n} = 1$ und $A_0 v_0 = \lambda_0 v_0$. Wir betrachten das Paar $(\lambda_0, v_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$ als Lösung einer geeigneten Gleichung. Sei

$$G : \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : G(A, v, \lambda) = Av - \lambda v.$$

Dann ist G eine reell analytische Abbildung, $G(A_0, v_0, \lambda_0) = 0$ Wir fassen die Variable (v, λ) zusammen und schreiben dafür w , also ist $G(A_0, w_0) = 0$ und wir betrachten

$$D_w G(A_0, w_0) : \mathbb{R}^{n \times n} \times T_{w_0}(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Dies ergibt sich mit $w = (v, \lambda)$ zu

$$D_w G(A_0, w_0)w = D_v G(A_0, v_0, \lambda_0)v + D_\lambda G(A_0, v_0, \lambda_0)\lambda = (A_0 - \lambda_0 \mathbb{1})v - \lambda v_0.$$

Nun ist

$$T_{v_0} \mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{R}^{n-1} = v_0^\perp.$$

Auf v_0^\perp ist A_0 ein Isomorphismus, da v_0 einfacher Eigenwert von A_0 ist, liegt v_0 nicht im Bild von A_0 und $D_w G(A_0, w_0)$ ist ein Isomorphismus auf

\mathbb{R} . Also gibt es eine Umgebung $B_\varepsilon(A_0)$ und Umgebungen W von w_0 , so dass

$$w : B_\varepsilon(A_0) \rightarrow W$$

reell analytisch ist und die Gleichung

$$G(A, w) = 0$$

löst. □

Ein vergleichbarer Satz gilt für einfache komplexe Eigenwerte reeller Matrizen, der Beweis benutzt wieder den Satz über implizite Funktionen, nur ist hier der Eigenwert in \mathbb{C} , was wir mit \mathbb{R}^2 identifizieren und den Eigenvektor fassen wir als Element von $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ auf. Dies ergibt des Satz:

Satz 4.1.9 *Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ sei ein einfacher Eigenwert von A mit Eigenvektor $u_0 + iv_0$. Dann gibt es eine Umgebung $B_\varepsilon(A_0) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ und Abbildungen $\lambda : B_\varepsilon(A_0) \rightarrow \mathbb{C}$, $w : B_\varepsilon(A_0) \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1}$ mit λ, w sind reell analytisch, $\lambda(A_0) = \lambda_0$ und $w(A_0) = u + iv_0$ und*

$$(A - \lambda(A)\mathbb{1})w(\lambda) = 0.$$

Satz 4.1.10 *Sei $P \subset \mathbb{R}^m$ eine Parametermenge $A : P \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ eine parametrisierte Schar von Matrizen $p_0 \in P$ sei fest gewählt, λ_0 sei Eigenwert von $A(p_0)$. Es sei $Q_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ der zugehörige Eigenprojektor. Dann gibt es eine Umgebung $Y \subset P$ und eine Abbildung*

$$Q : Y \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$$

mit Q ist Projektor, $Q\mathbb{R}^n$ ist eine Summe von verallgemeinerten Eigenräumen von A und für $p \rightarrow p_0$ konvergiert $\sigma A|_{Q\mathbb{R}^n}$ gegen λ_0 . Q ist genauso glatt wie A .

Beweis. Folgt aus dem Residuensatz der Funktionentheorie, siehe z.B. [17], Perturbation theory for linear operators. □

Wir kommen nun zu eigentlichen Verzweigungsaussagen und beginnen mit der folgender Nichtverzweigungsaussage.

Satz 4.1.11 *Gegeben sei eine Parametermenge $P \subset \mathbb{R}^m$, eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine Abbildung $V \in C^1(U \times P; U)$. Wir nehmen an, dass wir es eine Abbildung $u : P \rightarrow U$ gibt mit*

$$V(u(p), p) = 0.$$

Gilt für $p_0 \in P$

$$D_u V(u(p_0), p_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ist ein Isomorphismus, so gibt es eine Umgebung U_0 von $u(p_0)$, und eine Umgebung P_0 von p_0 , so dass $(u, p) \in U_0 \times P_0$ und $V(u, p) = 0$ impliziert $u = u(p)$.

Beweis. Folgt sofort aus dem Satz über implizite Funktionen. \square

Interessanterweise werden auch die Verzweigungsaussagen mit dem Satz über implizite Funktionen gezeigt.

Sei

$$\dot{u} = V(u, \lambda)$$

eine autonome, parameterabhängige Differentialgleichung auf $U \subset \mathbb{R}^n$ mit einer Kurve $(u(s), \lambda(s))$ von Ruhelagen, d.h. $V(u(s), \lambda(s)) = 0$. Sei $A(s) = D_u V(u(s), \lambda(s))$. Bezüglich des Spektrums von $A(s)$ wollen wir voraussetzen:

1. $\ker A(0) \neq 0$.
2. der Eigenwert 0 von $A(0)$ ist geometrisch einfach und
3. es gibt eine Fortsetzung des Eigenwertes 0, d.h. es existiert eine Kurve $\mu(\lambda(s))$ mit $\mu(\lambda_0) = 0$ mit $\sigma'(\lambda_0)\lambda'(0) \neq 0$.

Um Struktur und parameterabhängige Veränderungen der Lösungsmenge von $V(u, \lambda) = 0$ aufklären zu können, schreiben wir die Gleichung um, unter Ausnutzung von Eigenschaften der Matrix $A = A(0)$. Sei R der Bildraum von A und $K = \ker A$. Sei $Q_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow K$ ein Projektor und Q_2 ein komplementärer Projektor, d.h. $Q_1 + Q_2 = \mathbb{1}$. Ebenso wählen wir einen Projektor $P_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow R$ und P_2 einen komplementären Projektor. Wir setzen für $u \in \mathbb{R}^n$

$$v = Q_1 u \text{ und } w = Q_2 u.$$

Damit erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} P_1 V(v + w, \lambda) &= 0 \\ P_2 V(v + w, \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Ferner setzen wir $W = Q_2 \mathbb{R}^n$, $V = P_2 \mathbb{R}^n$ und beachten, dass damit das Gleichungssystem als Abbildung $F = K \times W \times \mathbb{R} \rightarrow R \oplus V$ geschrieben wird, mit $F = (F_1, F_2)$, $F_j = P_j f$.

Wir berechnen die Ableitung $D_w F_1(v, w, \lambda)$ bei $(v, w, \lambda) = (0, 0, 0)$:

$$D_w F_1(v, w, \lambda) = D_w P_1 F(Q_1 u + Q_2 u, \lambda) = P_1 D_w f(Q_2 u, \lambda) Q_2 = P_1 A Q_2.$$

Diese Matrix hat vollen Rang und mit dem Satz über implizite Funktionen (DIEUDONNE [9]) folgt, dass man lokal, d.h. in einer Umgebung, eine Auflösung der Gleichung $F_1(v, w, \lambda) = 0$ in der Form

$$w = w(v, \lambda)$$

finden kann. Wir setzen dies in die Gleichung $F_2 = 0$ ein und erhalten die sogenannte *Verzweigungsgleichung*

$$F_2(v, w(v, \lambda), \lambda) = 0.$$

Die Verzweigungsgleichung bezeichnen wir oft mit dem Buchstaben $f = f(x, \lambda)$. Das bisher beschriebene Verfahren zur Reduktion des Problems auf eine Verzweigungsgleichung wird nach den beiden Mathematikern Ljapunov und E. Schmidt¹ als *Ljapunov-Schmidt-Verfahren* bezeichnet.

Lemma 4.1.12 *Es gilt*

1. $D_v w(0, \lambda_0) = 0$.
2. $D_\lambda w(0, \lambda_0) = 0$.

Beweis.

1. $F_1(v + w(v, \lambda), \lambda) = 0$, ergibt

$$D_v F_1(0, \lambda_0)(\mathbb{1} + w_v(0, \lambda))v = 0$$

für alle $v \in \ker(A_0)$, dabei ist $w_v : \ker(A_0) \rightarrow u_0^\perp$. Also ist $A_0 v + A_0 w_v(0, 0)v = 0$. Dies ist richtig für alle $v \in \ker(A_0)$ genau dann, wenn $w_v(0, 0) = 0$ ist.

¹Erhard Schmidt (13.1.1876-6.12.1959) war Schüler von Hilbert. Er ist vor allem wegen des nach ihm benannten Orthogonalisierungsverfahren bekannt. Er arbeitete über Integralgleichungen und brachte die Funktionalanalysis vorwärts. In drei Arbeiten aus den Jahren 1906-1908 tauchte das hier vorgestellte Verfahren zur Untersuchung der Verzweigungen bei Integralgleichungen auf.

2. Wir beginnen wieder mit $F_1(v + w(v, \lambda), \lambda) = 0$ und leiten nach λ ab. Dies ergibt

$$D_u F_1(v + w(v, \lambda), \lambda) w_\lambda(v, \lambda) + D_\lambda F_1(v + w(v, \lambda), \lambda) = 0.$$

An der Stelle $0 = u = 0 + 0$ ergibt sich $D_\lambda F(0, \lambda_0) = 0$ (wegen des Verschwindens von $F(0, \lambda)$). Also folgt

$$D_u F(0, 0) w_\lambda(0, 0) = 0$$

oder auch

$$A_0 w_\lambda(0, 0) = 0.$$

Nun ist $w : K \times P \rightarrow u_0^\perp$ und damit $w_\lambda : P \rightarrow u_0^\perp$ linear, insbesondere folgt aus $w_\lambda(0, 0) \neq 0$, dass die die Projektion von $w_\lambda(0, 0)$ auf den gewählten Komplementärraum zu $\ker(A_0)$ nicht Null ist, also $A_0 w_\lambda(0, 0) \neq 0$. Dies ist ein Widerspruch zur oben abgeleiteten Gleichung und $w_\lambda(0, 0) = 0$.

□

4.2 Verzweigung am einfachen Eigenwert Null

Wir nehmen an, wir hätten ein parameterabhängige Differentialgleichung

$$\dot{u} = V(\lambda, u)$$

mit $\lambda \in P \subset \mathbb{R}$. Für jeden Parameterwert habe $V(\lambda, \cdot)$ eine Ruhelage $u(\lambda)$, wie zuvor, sei OBdA $u(\lambda) = 0$ und damit ergeben sich folgende Voraussetzungen

$$V \in C^2(P \times U; \mathbb{R}^n), \quad V(\lambda, \cdot) = 0 \text{ für alle } \lambda \in P.$$

Setze

$$A(\lambda) = D_u V(\lambda, 0).$$

Dann gilt

Satz 4.2.1 Für $\lambda_0 \in P$ gelte

1. $A(\lambda_0)$ hat einen geometrisch einfachen Eigenwert 0 mit zugehörigem Eigenvektor u_0 , also $\ker A(\lambda_0) = [u_0]$.

2. Es gibt ein $\delta > 0$, so dass für $\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \setminus \{\lambda_0\}$ die Matrix $A(\lambda)$ regulär ist.
3. $D_\lambda A(\lambda_0)u_0 \notin \text{BILD}(A(\lambda_0))$

Dann enthält jede Umgebung von $(\lambda_0, 0) \in P \times U$ Lösungen (λ, u) von $V(\cdot, \cdot) = 0$ mit $u \neq 0$.

Bemerkung 4.2.2 1. Man beachte, dass im Falle des geometrisch einfachen Eigenwertes die Dimension des Kernes von A_0 eins ist. Dann hat das Bild von A_0 auch Kodimension eins und die Voraussetzungen des Verfahrens von Ljapunov-Schmidt sind erfüllt.

2. Die Aussage bedeutet, dass unter den angegebenen Bedingungen neue Ruhelagen in der Nähe der uns bekannten Ruhelagen entstehen.
3. Im Falle eines algebraisch einfachen Eigenwertes ist die Bedingung an $D_\lambda A(\lambda_0)$ eine Aussage über das Verhalten des Eigenwertes, der nach Satz 4.1.9 den Nulleigenwert von $A(\lambda_0)$ fortsetzt: nach der zweiten Voraussetzung gilt für diesen Eigenwert $\mu(\lambda) \neq 0$. Die dritte Bedingung sagt aus, $\mu'(\lambda_0) \neq 0$, d.h. die Bedingung erzwingt einen Vorzeichenwechsel des Eigenwertes. Wir wollen dies nachprüfen. Wir entwickeln die Störungen von A, μ , und u nach Potenzen von λ und erhalten mit $\mu_0 = 0$ und mit der Normierung $\lambda_0 = 0, A_0 = A(0), A_1 = A'(0), \mu_0 = \mu(0) = 0, \mu_1 = \mu'(0), u_0 = u(0), u_1 = u'(0)$ aus

$$A(\lambda)u(\lambda) = \mu(\lambda)u(\lambda)$$

die Entwicklung

$$A_0 u_0 + \lambda(A_0 u_1 + A_1 u_0) + o(h) = \lambda(\mu_1 u_0 + \mu_0 u_1) + o(h)$$

und damit

$$A_0 u_1 + A_1 u_0 = \mu_1 u_0.$$

Da $A_1 u_0$ nicht im Bild von A_0 enthalten ist, gibt es ein lineares Funktional $\ell \in (\mathbb{R}^n)^*$, das auf dem Bild von A_0 verschwindet und auf $A_1 u_0$ den Wert 1 annimmt. Mit diesem Funktional gilt

$$\mu_1 \ell(u_0) = 1.$$

Damit ist $\mu_1 \neq 0$, und dies war zu zeigen.

Beweis. Wie beschrieben nehmen wir oBdA an, dass $u(\lambda) = 0$ die bekannte Lösung unserer Gleichung ist. Das Verfahren von Ljapunov–Schmidt führt auf eine eindimensionale Verzweigungsgleichung

$$f : \ker(A_0) \times P \rightarrow \ker(A_0)$$

und $\ker(A_0)$ ist eindimensional. Nun entsprechen die Ruhelagen im System $V(u, \lambda) = 0$ in eindeutiger Weise den Lösungen der Gleichung $f(v, \lambda) = 0$ durch

$$v \mapsto w = w(v, \lambda)$$

Da die $(0, \lambda)$ eine Lösung von $V(u, \lambda) = 0$ ist und 0 sich eindeutig als $0 = 0_{\ker(A_0)} + 0_W$ darstellt, ist

$$f(0, \lambda) = 0$$

auf einer offenen Umgebung P_0 von $0 = \lambda_0 \in P_0$. Also ist

$$f(v, \lambda) = vg(v, \lambda).$$

Die nichttrivialen Lösungen von $f(v, \lambda) = 0$ erhält man nun aus der Gleichung

$$g(v, \lambda) = 0.$$

Um diese Gleichung zu analysieren, wollen wir sie noch etwas genauer anschauen. Die ursprüngliche Gleichung hat die Form

$$V(u, \lambda) = 0$$

mit $V(u, \lambda) = A_0u + \lambda A_1u + \tilde{A}(\lambda)u + h(u, \lambda)$, wobei $\tilde{A}(\lambda) = O(\lambda^2)$ und $h(u, \lambda) = O(\|u\|^2)$ gleichmäßig in $\lambda \in P_0$, einer Umgebung von $0 \in P$. Mit $u = w(v, \lambda) + v$ und der Projektion P auf $\ker(A_0)$, die als Kern das Bild von A_0 hat und damit als Vielfaches von ℓ gegeben ist, erhalten wir mit $v = su_0$, s hinreichend klein (als Variable in $\ker(A_0)$)

$$w = w(s, \lambda)$$

mit der zusätzlichen Bedingungen

$$\ell(A_0(su_0 + w(su_0, \lambda)) + \lambda A_1(su_0 + w(su_0, \lambda)) + \tilde{A}(\lambda)(su_0 + w(su_0, \lambda)) + h(su_0 + w(su_0, \lambda), \lambda)) = 0.$$

Linearität und die Definition von ℓ durch $\ell(A_1 u_0) = 1$ ergibt

$$0 + A_0 w(su_0, \lambda) + \lambda s + \lambda \ell(A_1 w(su_0, \lambda)) + \ell(\tilde{A}(\lambda)(su_0 + w(su_0, \lambda)) + \ell(h(su_0 + w(su_0, \lambda), \lambda))) = 0.$$

Da $w(0, \lambda) = 0$ kann man $w(su_0, \lambda)$ in der Form $s\tilde{w}(su_0, \lambda)$ schreiben. Also folgt

$$s \left(A_0 \tilde{w}(su_0, \lambda) + \lambda + \ell(A_1 \tilde{w}(su_0, \lambda)) + \ell(\tilde{A}(\lambda)(u_0 + \tilde{w}(su_0, \lambda))) + \ell(\tilde{h}(u_0 + \tilde{w}(su_0, \lambda), \lambda)) \right) = 0$$

Nach Division durch s berechnen wir D_λ vom verbleibenden Ausdruck im Punkt $(0, 0)$ und erhalten 1. Wegen $g(0, 0) = 0$ gibt es nun eine Funktion $\lambda = \lambda(s)$ mit

$$g(su_0, \lambda(s)) = 0.$$

Also ist $\lambda = \lambda(s)$ eine Lösung dieser Gleichung. Diese führt offensichtlich auf nichttriviale Lösungen. \square

Ein entsprechender Satz gilt für Ruhelagen diskreter dynamischer Systeme.

Satz 4.2.3 Für $\lambda_0 \in P$ gelte

1. $A(\lambda_0)$ hat einen geometrisch einfachen Eigenwert 1 mit zugehörigem Eigenvektor u_0 , also $\ker(A(\lambda_0) - \mathbb{1}) = [u_0]$.
2. Es gibt ein $\delta > 0$, so dass für $\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \setminus \{\lambda_0\}$ die Matrix $A(\lambda) - \mathbb{1}$ regulär ist.
3. $D_\lambda A(\lambda_0)u_0 \notin \text{BILD}((A(\lambda_0)) - \mathbb{1})$

Dann enthält jede Umgebung von $(\lambda_0, 0) \in P \times U$ Lösungen (λ, u) von $f(\lambda, x) = x$ mit $x \neq 0$.

Beweis. Beweis folgt aus dem vorherigen durch intelligentes Abschreiben. \square

4.3 Periodenverdoppelung

Eine der einfachsten und eine der wichtigsten Verzweigungen ist die Periodenverdoppelung, sie tritt sowohl bei diskreten, wie auch bei kontinuierlichen dynamischen Systemen auf. Wir beginnen mit den diskreten Systemen.

Satz 4.3.1 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen (oder in einer Mannigfaltigkeit offen), $f : U \times P \rightarrow U$ sei stetig differenzierbar, wobei $P \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge sei. Wir nehmen an für $p \in P$ sei $x_0(p)$ ein periodischer Punkt der Periode $k \geq 1$, d.h.*

$$\{x_0(p), x_1(p), \dots, x_{k-1}(p)\}$$

sei ein periodischer Orbit. Wir nehmen ferner an, dass es in einer Umgebung keine weiteren periodischen Punkte mit Periode k gibt. Für einen Wert p_0 habe die Linearisierung von $D_x f^k(x_0(p_0), p_0)$ genau einen (algebraisch) einfachen Eigenwert auf dem Rand des Einheitskreises. Dieser ist dann reell. Dann gibt es zunächst genau einen Eigenwert $\lambda(p)$ für p nahe p_0 , der diesen Eigenwert fortsetzt. Wir nehmen an:

1. $\lambda(p_0) = -1$
2. $\lambda'(p_0) \neq 0$

Dann gibt es in jeder Umgebung von p_0 ein $p \in P$ mit $f(\cdot, p)$ hat einen Orbit der Länge $2k$.

Beweis. Die Abbildung f^{2k} hat p_0 als Fixpunkt, und einen Eigenwert 1. Damit kann der Verzweigungssatz für Fixpunkte angewendet werden und dieser impliziert die Existenz nichttrivialer Lösungen der Gleichung

$$f^{2k}(x) = x.$$

□

4.4 Sattel–Knoten–Verzweigung

Die Begriffsbildung kommt von folgendem Bild 4.1, die zugehörige Differentialgleichung hat folgende Gestalt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda + x^2 \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned}$$

In diesem System finden wir für $\lambda < 0$ einen Sattel und einen Knoten, die sich bei $\lambda = 0$ auslöschen. Dieses Beispiel mag als Grundlage für die

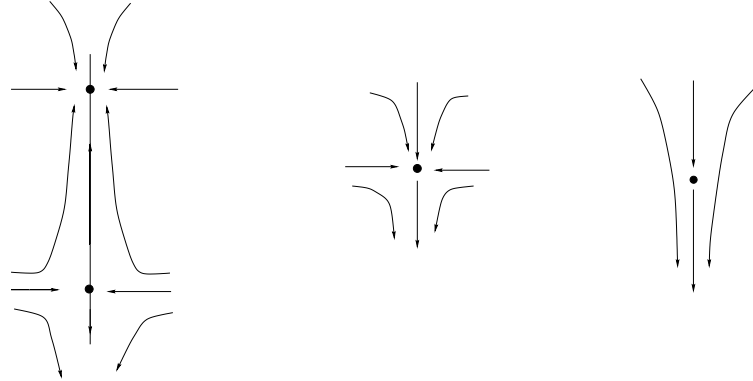


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung einer Sattel-Knoten-Verzweigung

nachfolgenden abstrakteren Betrachtungen dienen.

Es sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein parametrisiertes Vektorfeld mit folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0 \\ \ker D_x f(0, 0) &\neq \{0\} \\ R(D_x f(0, 0)) \oplus D_\lambda f(0, 0)1 &= \mathbb{R}^n \\ \langle D_{xx} f x_0, x_0 \rangle &\notin R(D_x f(0, 0)), \end{aligned}$$

wobei x_0 den Kern von $D_x f(0, 0)$ aufspannt. Dann ist $Df(0, 0)$ surjektiv, also $f^{-1}(0)$ eine eindimensionale glatte Mannigfaltigkeit. Sei $(x(s), \lambda(s))$ eine lokale Parametrisierung. Dann ist $f(x(s), \lambda(s)) = 0$ und natürlich auch $\frac{d^j}{ds^j} f(x(s), \lambda(s)) = 0$. Für $j = 1$ ergibt sich

$$D_x f(0, 0)\dot{x} + D_\lambda f(0, 0)\dot{\lambda} = 0.$$

Da $D_\lambda f(0, 0)\dot{\lambda} \in \ker D_x f(0, 0)$, ist $D_x f(0, 0)x \neq 0$, also $\dot{\lambda} = 0$ und $\dot{x} = \alpha x_0$. Für $j = 2$ ergibt sich

$$f_{xx}\dot{x}^2 + f_x\ddot{x} + D_{\lambda x} f \dot{x}\dot{\lambda} + f_\lambda \ddot{\lambda} = 0.$$

Es folgt aus den Annahmen $\ddot{\lambda} \neq 0$. Insbesondere haben wir die wesentlichen Eigenschaften einer Sattel-Knoten Verzweigung.

4.5 Hopf-Verzweigung

In diesem Abschnitt untersuchen wir einen Stabilitätsverlust durch ein Paar rein imaginärer Eigenwerte. Wir beginnen mit einem Beispiel, der Einfachheit halber schreiben wir dies in komplexen Koordinaten (man überlege sich, wie dies als System im \mathbb{R}^2 aussieht!)

$$\dot{z} = \alpha z + iz, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Für $\alpha < 0$ ist $z = 0$ eine stabile Ruhelage, für $\alpha > 0$ ist sie instabil. Für $\alpha = 0$ ergibt sich eine Ebene gefüllt mit invarianten Kreisen. Wir sehen, dass der Stabilitätsverlust für eine Ruhelage durch ein Paar komplexer Eigenwerte zu periodischen Lösungen führt. Wie werden sehen, dass das gleiche Bild für nichtlineare Systeme erhalten bleibt, nur dass die Fläche der periodischen Lösungen verbogen wird. Wir machen dies in zwei Schritten, einmal zweidimensional und dann höher dimensional.

Lemma 4.5.1 *Gegeben sei ein eindimensionaler Parameterraum $P \subset \mathbb{R}$ offen und eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ mit $0 \in U$ und ein zweidimensionales autonomes System*

$$\dot{u} = V(u, \lambda)$$

mit $V : U \times P \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

1. $V(0, p) = 0$ für alle $p \in P$
2. $\sigma(D_u V(0, p)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}$ für $p < 0$ und
3. $\sigma(D_u V(0, p)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ für $p > 0$.
- 4.
5. $\sigma(D_u V(0, 0)) = \{\pm \omega i\}$ mit $\omega > 0$.

Dann gibt es in jeder Umgebung $(0, 0) \in K \subset U \times P$ geschlossene Orbits.

Bemerkung 4.5.2 *Wir werden etwas mehr beweisen, und diese zusätzlichen Aussagen nach dem Beweis als Korollar formulieren.*

Beweis. Wir betrachten das System bei $p = 0$. Da die Linearisierung von V regulär ist, gibt es eine Umgebung $W \subset U \times P$, die keine nichttrivialen Gleichgewichte enthält.

Nun fragen wir uns ob 0 für den Parameterwert 0 stabil oder instabil ist. Im ersten Fall gibt es zwei Unterfälle: ist 0 asymptotisch stabil, oder ist stabil und nicht asymptotisch stabil. Im zweiten dieser Fälle gibt es ein zu jedem offenen $0 \in U_0$ ein offenes U_1 mit $u_0 \in U_1$ impliziert $u(t, u_0) \in U_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, insbesondere gibt es wegen der nicht vorhandenen asymptotischen Stabilität einen Anfangswert \tilde{u} in einem geeigneten $U_2 \subset U_0$ mit $\omega(\tilde{u}) \neq \{0\}$. Da die Linearisierung die Eigenwerte $\pm\omega i$ hat ist dann $0 \notin \omega(\tilde{u})$. Damit ist der positive Halborbit von \tilde{u} beschränkt, nach dem Satz von Poincaré–Bendixson, enthält er dann eine Ruhelage oder einen periodischen Orbit, da er 0 fern bleibt und keine weitere Ruhelage in der Nähe liegt, muss es einen periodischen Orbit geben.

Im ersten der beiden Fälle, der asymptotischen Stabilität betrachten wir einen Kreis $K_r(0)$ für ein $r > 0$. Nun gibt es zu jedem Anfangswert u_0 auf der Kreislinie ein $t_0 > 0$ mit $u(t_0, u_0) \in B_r(0)$. Aufgrund der stetigen Abhängigkeit hängt t_0 stetig von u_0 ab. Also gibt es ein $T > 0$ mit $t_0(u_0) < T$ für alle $u_0 \in K_r(0)$. Nun betrachten wir ein $p > 0$, so dass für alle $\tilde{u}, p \in K_r(0) \times \{p\}$ gilt $\|u(T, \tilde{u}, p)\|_{\mathbb{R}^n} < r$. Da 0 für diesen Wert total instabil ist, gibt es keinen Anfangswert ungleich Null, dessen ω -Limesmenge den Nullpunkt enthält. Also gibt der Satz von Poincaré–Bendixson wieder einen periodischen Orbit.

Im zweiten der beiden ursprünglichen Fälle ist 0 für $p = 0$ instabil. Da jede Lösung, die in der Nähe der Null startet, in der Zeit $2\pi/\omega$ einmal den Ursprung umläuft, und die Umläufe alle die gleiche Orientierung haben, konvergiert eine Lösung für $t \rightarrow -\infty$ gegen 0 genau dann, wenn dies alle mit hinreichend kleinen Startwerten tun. Nun betrachten wir eine Folge $0 < \varepsilon_n \rightarrow 0$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} < 1.$$

Dann existiert zu jedem ε_n ein Startwert u_n mit

$$\|u_n\|_{\mathbb{R}^n} = \varepsilon_{n+1}$$

und eine Folge $t_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\|u(t_n, u_n)\|_{\mathbb{R}^n} = \varepsilon_n.$$

Da die radiale Geschwindigkeit des Vektorfeldes gegen 0 geht (die Ableitung hat radiale Geschwindigkeit 0 und

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{R}^2} \rightarrow 0} \frac{1}{\|x\|_{\mathbb{R}}^2} \|V(x)\|_{\mathbb{R}^2} = 0$$

folgt, dass die Zeiten $t_n \rightarrow \infty$. Damit gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$ impliziert $t_n > \frac{2\pi}{\omega}$. Nun schreitet der Winkel für $n > n_0$ während der Zeit t_n um mehr als 2π vorwärts. Da für alle Startwerte hinreichend nahe bei 0 der Drehsinn gleich bleibt, konvergieren nun entweder alle Orbits mit hinreichend kleinem Startwert für $t \rightarrow -\infty$ gegen 0 oder keiner hat diese Konvergenzeigenschaft. Im letzten Fall enthält die α -Limesmenge eines beliebigen kleinen Startwertes nach Poincaré-Bendixson einen geschlossenen orbit, und wir haben die Aussage gezeigt. Im anderen Fall zeigt ein Argument wie zuvor, durch Zeitumkehr, dass Lösungen rückwärts gegen Null konvergieren, also können wir für $\lambda < 0$ Anfangswerte finden, die nach Poincaré-Bendixson auf periodische Orbits führen. \square

Wir kommen zum allgemeinen Hopf Bifurkationssatz.

Satz 4.5.3 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen $0 \in U$, $P \subset \mathbb{R}$ offen, $0 \in P$. Ferner sei $V : \mathbb{R}^n \times P \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^2 -Vektorfeld, $V(0, \lambda) = 0$ für alle $\lambda \in P$. Sei $A(\lambda) = D_u V(0, \lambda)$. Wir nehmen an, für $\lambda < 0$ sei 0 asymptotisch stabil, für $\lambda > 0$ sei 0 instabil und für $\lambda = 0$ sei $A_0 = A(0)$ eine lineare Abbildung mit genau einem Paar von Eigenwerten $\pm i\omega$ auf der imaginären Achse mit algebraischer Vielfachheit 1, alle anderen Eigenwerte haben negative Realteile. Sei*

$$\mu : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C} : A \mapsto \mu(A)$$

mit $\mu(A)$ ist Eigenwert zu A und $\mu(0) = i\omega$. Wir nehmen an

$$\mu'(0) \neq 0.$$

Dann enthält jede Umgebung $W \subset U \times P$ von 0 einen geschlossenen Orbit.

Beweis. Wir beweisen dies, indem wir eine entsprechende Gleichung in einem Raum von 2π -periodischen Funktionen lösen. Sei

$$X = C_p^1([0, 2\pi], \mathbb{R}^n)$$

der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen vom Intervall $[0, 2\pi]$ mit Werten in \mathbb{R}^n mit folgender zusätzlicher Periodizitätsforderung

$$u \in X \Rightarrow u(0) = u(2\pi), \quad u'(0) = u'(2\pi)$$

wobei hier die Ableitung für den rechtsseitigen, bzw. linksseitigen Differenzenquotienten steht. Es sei

$$Y = C_p([0, 2\pi], \mathbb{R}^n)$$

der aus der stetigen Funktionen $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit der zusätzlichen Forderung

$$u(0) = u(2\pi).$$

Beide Räume seien mit der natürlichen Norm ausgestattet und sind damit Banachräume.

Sei nun $z \in \mathbb{C}^n$ ein komplexer Eigenvektor zum Eigenwert $i\omega$ von A_0 , $z = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}^n$. Nun ist

$$A_0 z = i\omega z = (i\omega)(u + iv) = i\omega u - \omega v$$

und es gilt eine entsprechende Gleichung für $A\bar{z}$. Sei

$$J_0 : X \rightarrow Y : x \mapsto \omega \frac{d}{dt} x - A_0 x.$$

Wir zeigen:

1. $\dim \ker J_0 = 2$
2. $\text{Im}(J_0) = Y \cap (\ker J_0)^\perp$ wobei \perp sich auf das L^2 -Skalarprodukt bezieht.

Wir beginnen mit dem ersten Schritt. Dazu geben wir zwei linear unabhängige Funktionen an, die im Kern von J_0 liegen und zeigen dann, dass es keine von diesen beiden linear unabhängigen Funktionen im Kern von J_0 gibt.

Die Angabe der beiden Funktionen wird am einfachsten, wenn wir komplex arbeiten. Sei $z \in \mathbb{C}^n$ Eigenvektor von A_0 zum Eigenwert ωi , sei $w(t) = ze^{it}$. Dann ist

$$J_0 w = i\omega w - i\omega w = 0.$$

Ebenso ist

$$J_0 \bar{w} = 0$$

und damit sind $\text{Re } w$, $\text{Im } w$ beides reelle Lösungen der Gleichung. Sie sind offenbar linear unabhängig.

Betrachten wir die Frage der Lösbarkeit der Gleichung

$$J_0 u = 0$$

so nutzen wir die Projektoren auf den Eigenraum zu $\pm i Q$, und $1 - Q$ um die Gleichung in zwei Anteile zu zerlegen. Auf $(1 - Q)\mathbb{R}^n$ hat $(1 - Q)A_0$ keine Eigenwerte auf der imaginären Achse und daher hat die Gleichung

$$\dot{u} = (1 - Q)Au$$

für $u_0 \in (1 - Q)\mathbb{R}^n$ keine nichttrivialen beschränkten Lösungen. Also können periodische Lösungen nur im zweidimensionalen Raum $Q\mathbb{R}^n$ liegen. Man prüft leicht nach, dass neben den genannten Lösungen keine davon linear unabhängigen existieren.

Wir kommen zur Frage des Bildes von J_0 . Mit Q zerlegen wir jede rechte Seite in einen Anteil in $(1 - Q)\mathbb{R}^n$ und einen Anteil in $Q\mathbb{R}^n$. Die Gleichung in $(1 - Q)\mathbb{R}^n$ lässt sich für jede rechte Seite lösen, die Gleichung in $Q\mathbb{R}^n$ gerade für die Funktionen in $\ker J_0$ nicht. J_0 ist ein stetiger linearer Operator, abgeschlossenem zweidimensionalen Kern und einen abgeschlossenen Komplementärraum, dem Bild von J_0 .

Bei der Verzweigung periodischer Orbits erwarten wir periodische Lösungen der ungestörten Periode $\frac{2\pi}{\omega}$, die Bestimmung der genauen Periode ist Teil der Aufgabenstellung. Wir schreiben die uns unbekannt Periode in der Form $\frac{2\pi}{\mu + \omega}$ mit μ nahe 0. Die Skalierung auf 2π -periodische Funktionen ergibt dann die Gleichung

$$(\mu + \omega) \frac{d}{dt} u - V(u, \lambda) = 0.$$

Wir können dies auch schreiben als

$$\left(\mu \frac{d}{dt} + J_0 \right) u - \tilde{V}(u, \lambda) = 0.$$

wobei $\tilde{V} = V - A_0$. Sei \mathcal{P} der Projektor in X auf $\ker J_0$, $(1 - \mathcal{P}) : X \rightarrow Z$ wobei Z ein Komplementärraum von $\ker J_0$ ist, und \mathcal{Q} sei ein entsprechender Projektor auf $\text{BILD}(J_0)$ in Y und $(1 - \mathcal{Q})$ der komplementäre Projektor. Dann zerlegen wir die obige Gleichung $v = \mathcal{P}u$, $w = (1 - \mathcal{P})u$ in

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} \left(\left(\mu \frac{d}{dt} + J_0 \right) (v + w) - \tilde{V}(v + w, \lambda) \right) &= 0 \\ (1 - \mathcal{Q}) \left(\left(\mu \frac{d}{dt} + J_0 \right) (v + w) - \tilde{V}(v + w, \lambda) \right) &= 0. \end{aligned}$$

Differenzieren im Punkt $(\lambda, \mu, v, w) = (0, 0, 0, 0)$ nach w ergibt einen Isomorphismus von Banachräumen

$$J_0 : Z \rightarrow \text{BILD}(J_0).$$

Der Satz über implizite Funktionen löst nun die erste Gleichung in Form einer Abbildung

$$w : \mathbb{R}^2 \times P \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Q}Y : (v, \lambda, \mu) \mapsto w(v, \lambda, \mu),$$

mit $w(v, \lambda, \mu) = 0$. Da die Ableitung nach v in der ersten Gleichung im Punkt $(v, \mu, \lambda) = (0, 0, 0)$ gleich 0 ist, folgt aus dem Satz über implizite Funktionen auch noch

$$D_v w(0, 0, 0) = 0.$$

Wir setzen diese Funktion in die zweite Gleichung ein und erhalten ein zweidimensionales System

$$\Phi(\lambda, \mu, v) = 0.$$

Hier haben wir zwei Gleichungen mit vier Unbekannten, um einen (eindimensionalen) Lösungszweig zu erhalten, sollten wir noch eine Variable eliminieren. Im nächsten Abschnitt zeigen wir, dass das Lyapunov–Schmidt Verfahren eine Äquivarianzbedingung erhält. Im gegenwärtigen Kontext bedeutet dies folgendes: Der Kern von J_0 wird aufgespannt von zwei Funktionen $v_1(t), v_2(t)$. Jede Funktion hat die Form

$$v(t) = r_1 v_1(t) + r_2 v_2(t).$$

Wir können durch eine Phasenverschiebung auf X , bzw. Y operieren, sei $S_\theta f(t) = f_\theta(t) = f(t - \theta)$. Dann gilt zunächst:

$$w(S_\theta v, \lambda, \mu) = S_\theta w(v, \lambda, \mu)$$

Auf $\ker J_0$ können wir so operieren, dass

$$S_\theta v = r_1 S_\theta v_1 + r_2 S_\theta v_2,$$

dies führt in den Koordinaten (r_1, r_2) auf

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

Wir können oBdA erreichen, dass $r_2 = 0$ ist. Damit können wir schreiben

$$w = w(r_1, \lambda, \mu).$$

Die Verzweigungsgleichung hat dann die Form

$$\begin{aligned} c\lambda r_1 + O(r_1^2) &= 0 \\ \mu r_1 + O(r_1^2) &= 0 \end{aligned}.$$

Diese Gleichung erhalten wir Skalarprodukt mit den entsprechenden Kernvektoren von J_0^* . Nun hat der erste Term in der ursprünglichen Gleichung die Gestalt $\mu \frac{d}{dt} u$. Seien nun v_1^*, u_1^* die Kernvektoren von J_0^* mit

$$\langle v_i, u_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Dann erhalten wir in der ersten Gleichung den Term bei μ in niedrigster Ordnung

$$\begin{aligned} \mu \left\langle \frac{d}{dt} (v + w(v, \lambda)), u_1^* \right\rangle &= \mu r_1 \left\langle \frac{d}{dt} v_1, u_1^* \right\rangle + \dots \\ &= \mu r_1 \langle v_2, u_1^* \rangle + \dots \\ &= 0 + \dots \end{aligned}$$

Also verschwindet nach Division durch r_1 die Ableitung nach μ im Ursprung. Für die zweite Gleichung ergibt sich eine ähnliche, im Detail aber etwas andere Rechnung:

$$\begin{aligned} \mu \left\langle \frac{d}{dt} (v + w(v, \lambda)), u_2^* \right\rangle &= \mu r_1 \left\langle \frac{d}{dt} v_1, u_2^* \right\rangle + \dots \\ &= \mu r_1 \langle v_1, u_1^* \rangle + \dots \\ &= \mu r_1 + \dots \end{aligned}$$

Hier ergibt sich nach Division durch r_1 die Ableitung nach μ im Ursprung zu 1. Beim λ -Term hat man wieder eine ganz ähnliche Rechnung. Zunächst erhält man für die erste Gleichung

$$\begin{aligned} c\lambda \langle (v + w(v, \lambda)), u_1^* \rangle &= c\lambda r_1 \langle v_1, u_1^* \rangle + \dots \\ &= c\lambda r_1 + \dots \end{aligned}$$

Man beachte, dass hier $r_2 = 0$ ist. In der zweiten Gleichung führt genau dies auf den verschwindenden Term, der linear in λ und r_2 ist.

Wie bei der Verzweigung am einfachen Eigenwert 0 kann man nun durch r_1 dividieren und erhält eine Gleichung mit partieller Ableitung nach (μ, λ) regulär und wir erhalten einen Lösungszweige der Form $(\lambda(r_1), \mu(r_1))$. \square