Definition 14.3.1 (Kurve)
Es sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Eine C^1-Kurve $\gamma : (-a, a) \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma((-a, a)) \subset M$ heißt Kurve *auf M durch $\mathbf{x}_0 = \gamma(0)$.*

Definition 14.3.2 (Tangentialvektor)

1. *Es sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Ein Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ heißt* Tangentialvektor *an M im Punkt $\mathbf{x}_0$, wenn es eine Kurve γ auf M durch $\mathbf{x}_0$ gibt mit*
$$\gamma'(0) = \mathbf{v}.$$
2. *Die Menge der Tangentialvektoren im Punkt $\mathbf{x}_0 \in M$ wird als* Tangentialraum *an M im Punkt $\mathbf{x}_0$ bezeichnet, wir schreiben dafür $T_{\mathbf{x}_0}M$.*

Der Tangentialraum ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ und erbt von diesem ein Skalarprodukt und eine Norm.

Satz 14.3.3 (Tangentialraum)
Es sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in M$. Ferner sei (U, ψ_U) eine Karte mit $0 \in U$, $\psi_U(0) = \mathbf{x}_0 \in \psi_U(U)$.

1. *Der Tangentialraum $T_{\mathbf{x}_0}M$ ist ein k-dimensionaler linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$.*
2. *Eine Basis dieses Raumes ist gegeben durch*
$$\left\{ \frac{\partial \psi_U(0)}{\partial y_j} \right\}_{j=1,\ldots,k}.$$
3. *Ist $\mathbf{x}_0 \in M$, $W \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{f} : W \to \mathbb{R}^{n-k}$ eine C^1-Abbildung mit $f(W \cap M) = 0$ mit $\mathrm{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ hat vollen Rang, so sind die Vektoren*
$$\operatorname{grad} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_0), \ldots, \operatorname{grad} \mathbf{f}_{n-k}(\mathbf{x}_0)$$
linear unabhängig und orthogonal zu $T_{\mathbf{x}_0}M$.

Beweis. Da der Rang der Matrix
$$\left(\frac{\partial \psi_j(0)}{\partial y_i} \right)_{j=1,\ldots,n, i=1,\ldots,k}$$

k ist, sind die Vektoren

$$\left\{\frac{\partial \psi_U(0)}{\partial y_j}\right\}_{j=1,\dots,k}$$

linear unabhängig und spannen einen k-dimensionalen Unterraum von $\mathbb{R}^n$ auf. Wir bezeichnen diesen mit $T_{\mathbf{x}_0}$. Wir wollen zeigen, dass dies der Tangentialraum an M im Punkt $\mathbf{x}_0$ ist.

Dazu zeigen wir, dass $T_{\mathbf{x}_0} \subset T_{\mathbf{x}_0}(M)$ und umgekehrt. Für die Hinrichtung nehmen wir an, $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}_0}$ sei gegeben. Sei (U, ψ_U) eine Karte mit $0 \in U$ und $\psi_U(0) = \mathbf{x}_0$ (eine solche Karte gibt es immer). Dann hat $\mathbf{v}$ eine Darstellung

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \frac{\partial \psi(0)}{\partial y_j}.$$

Betrachte die Standardbasis $\mathbf{y}_j,\ j = 1, \dots, k$ in $\mathbb{R}^k$ und damit die Abbildung

$$\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k : t \mapsto t \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{y}_j \right).$$

Dann gibt es ein $a > 0$ mit $\gamma_1((-a, a)) \subset U$. Setze für $t \in (-a, a)$

$$\gamma(t) = \psi_U(\gamma_1(t)).$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\gamma'(0) &= \mathrm{D}\psi_U(\mathbf{0})\gamma_1'(0) \\
&= \mathrm{D}\psi_U(\mathbf{0}) \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{y}_k \right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathrm{D}\psi_U(\mathbf{0})\mathbf{y}_j \\
&= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \frac{\partial \psi_U}{\partial y_j}(\mathbf{0}) \\
&= \mathbf{v}.
\end{aligned}$$

Damit ist $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}_0}$ ein Tangentialvektor von M im Punkt $\mathbf{x}_0$.

Andererseits sei $\mathbf{v} = \gamma'(0)$ mit $\gamma(0) = \mathbf{x}_0$ ein Tangentialvektor. Wir betrachten eine Umgebung W von $\mathbf{x}_0$ und ein $\mathbf{f} : W \to \mathbb{R}^{n-k}$ mit $f(W \cap M) = 0$ und $\operatorname{rang} \mathrm{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = n - k$. Sei $a > 0$ so gewählt, dass $\gamma((-a, a)) \subset W$. Dann ist für $t \in (-a, a)$

$$\mathbf{f}(\gamma(t)) = \mathbf{0}.$$

Insbesondere ist $\mathbf{f} \circ \gamma$ differenzierbar und

$$(\mathbf{f} \circ \gamma)'(0) = \mathbf{0}.$$

Da $(\mathbf{f} \circ \gamma)'(0) = \mathrm{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\gamma'(0)$ ist $\gamma'(0) \in \ker \mathrm{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. Anders ausgedrückt bedeutet dies

$$\langle \operatorname{grad} f_i(\mathbf{x}_0), \gamma'(0) \rangle = 0 \text{ für } i = 1, \dots, n-k.$$

Damit haben wir gezeigt

1. $\dim T_{\mathbf{x}_0} = k$
2. $T_{\mathbf{x}_0} \subset T_{\mathbf{x}_0}(M)$
3. $\operatorname{grad} f_i(\mathbf{x}_0) \perp T_{\mathbf{x}_0}(M), i = 1, \dots, n-k$
4. $\dim \operatorname{span}\left(\left\{\operatorname{grad} f_i(\mathbf{x}_0) \;\middle|\; i = 1, \dots, n-k\right\}\right) = n-k.$

Damit ist $T_{\mathbf{x}_0}(M) \subset T_{\mathbf{x}_0}$ und $\dim T_{\mathbf{x}_0}(M) \leq k$ und aus den ersten beiden Eigenschaften folgt

$$T_{\mathbf{x}_0} = T_{\mathbf{x}_0}(M) \text{ und } \dim T_{\mathbf{x}_0}(M) = k.$$ □

Definition 14.3.4 (Normalenvektor)
Ein Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ *heißt* Normalenvektor *zu* M *im Punkt* $\mathbf{x}_0$, *falls* $\mathbf{w} \perp T_{\mathbf{x}_0}(M)$ *ist, d. h. wenn*

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0 \textit{ für alle } \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}_0}(M).$$

Satz 14.3.5 (Raum der Normalenvektoren)
Die Menge der Normalenvektoren zu M *im Punkt* $\mathbf{x}_0$ *bildet einen linearen Unterraum von* $\mathbb{R}^n$ *der Dimension* $n-k$. *Eine Basis dieses Unterraums ist durch die Vektoren* $\left\{\operatorname{grad} f_i(\mathbf{x}_0) \;\middle|\; i = 1, \dots, n-k\right\}$ *gegeben.*

Beweis. Die Tatsache, dass die Menge der Normalenvektoren einen linearen Unterraum bilden, folgt einfach aus der Definition des Normalenvektors und der Definition des linearen Unterraums: Betrachte

$$N_{\mathbf{x}_0}(M) = \left\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0, \forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}_0}(M)\right\}.$$

Sind $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in N_{\mathbf{x}_0}(M)$, so ist offensichtlich für jedes $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}_0}(M)$

$$\langle \mu_1 \mathbf{w}_1 + \mu_2 \mathbf{w}_2, \mathbf{v} \rangle = \mu_1 \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v} \rangle + \mu_2 \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Da $T_{\mathbf{x}_0}(M) \cap N_{\mathbf{x}_0}(M) = \{\mathbf{0}\}$ und gleichzeitig

$$T_{\mathbf{x}_0}(M) + N_{\mathbf{x}_0}(M) = \mathbb{R}^n \tag{14.1}$$

ist, ist die Summe direkt und

$$\dim T_{\mathbf{x}_0}(M) + \dim N_{\mathbf{x}_0}(M) = n.$$

Daraus folgt dann die Dimensionsaussage. Da wir bereits die Gradienten der f_i aus dem letzten Satz als $n-k$-elementige, linear unabhängige Menge kennen gelernt haben, bilden diese eine Basis. □

Aufgabe 14.3.6 (Direkte Summe)
Beweisen Sie die Gleichung (14.1).

Definition 14.3.7 (Normalenraum)
Der Raum $N_{\mathbf{x}_0}(M)$ wird als Normalenraum *zu M im Punkt $\mathbf{x}_0$ bezeichnet.*

14.4 Kompakta mit glattem Rand

In diesem Abschnitt wollen wir spezielle kompakte Mengen im $\mathbb{R}^n$ betrachten, deren Rand eine $n-1$-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

Definition 14.4.1 (Rand)
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Der Rand ∂A *einer Menge $A \subset X$ ist $\overline{A} \setminus A^\circ$.*

Lemma 14.4.2 (Rand, Inneres, Abschluss)
Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann gilt

1. *$x \in \partial A$ genau, wenn für jede offene Umgebung U von x gilt*

$$U \cap A \neq \emptyset,\ U \cap A^c \neq \emptyset.$$

2. *$\overline{A} = A \cup \partial A$*

3. *$A^\circ = A \setminus \partial A$*

4. *∂A ist abgeschlossen.*

Beweis. Aus der Definition des Abschlusses folgt für $x \in \overline{A}$, dass jede offene Umgebung Punkte in A enthält: Entweder ist $x \in A$, so ist $x \in A \cap U$ oder $x \notin A$, dann folgt aus der Existenz einer offene Umgebung U von x mit $U \cap A = \emptyset$, dass $\overline{A} \subset U^c$ und $x \notin \partial A$.
Ist $A^c \cap U = \emptyset$, so ist $U \subset A$ und $x \in A^\circ$, was der Definition des Randes widerspricht. Damit ist die erste Aussage gezeigt.
Die zweite Aussage erhält man, da nach Definition $\partial A \subset \overline{A}$ und damit $A \cup \partial A \subset \overline{A}$ ist. Die umgekehrte Richtung folgt aus der folgenden Rechnung

$$\partial A \cup A \supset \partial A \cup A^\circ = (\overline{A} \setminus A^\circ) \cup A^\circ = \overline{A}.$$

Für die dritte Aussage benutzen wir die Definition und schließen $A^\circ \cap \partial A = \emptyset$. Dann impliziert $A^\circ \subset A$, dass $A^\circ \subset A \setminus \partial A$. Die umgekehrte Folgerung folgt aus der ersten Aussage dieses Satzes.
Für die vierte Aussage nutzen wie die elementare Formel

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^0 = \overline{A} \cap (A^\circ)^c$$

und damit ist ∂A als Schnitt zweier abgeschlossener Mengen abgeschlossen. □

Definition 14.4.3 (Kompaktum mit glattem Rand)
Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Wir sagen K habe glatten Rand, *wenn es zu jedem $\mathbf{x}_0 \in \partial K$ eine offene Umgebung U von $\mathbf{x}_0$ und eine C^1-Abbildung $\Phi : U \to \mathbb{R}$ gibt mit*

$$\text{(i)} \quad U \cap K = \left\{ \mathbf{x} \in U \;\middle|\; \Phi(\mathbf{x}) \leq 0 \right\}$$

und

$$\text{(ii)} \quad \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{x}) \neq 0 \;\forall \mathbf{x} \in U \;\textit{mit}\; \Phi(\mathbf{x}) = 0.$$

Lemma 14.4.4 (Glatter Rand als Nullstellengebilde)
Ist K ein Kompaktum mit glattem Rand und sind U, Φ wie in der vorstehenden Definition, so ist

$$\partial K \cap U = \left\{ \mathbf{x} \in U \;\middle|\; \Phi(\mathbf{x}) = 0 \right\}.$$

Beweis. Angenommen, es sei $\mathbf{x} \in U$ mit $\Phi(\mathbf{x}) = 0$, wir wollen zeigen $\mathbf{x} \in \partial K \cap U$. Da $\operatorname{grad} \Phi(\mathbf{x}) \neq 0$ ist, ist eine der partiellen Ableitung $\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \neq 0$. OBdA ist $j = n$ und wir schreiben $\Phi : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\mathbf{x}' = (x_1, \ldots, x_{n-1})^T$ und $y = x_n$. Dann kann der Satz 9.2.2 über implizite Funktionen angewendet werden, der besagt, dass es Umgebungen $U' \subset U$ von $\mathbf{x}'$ und $(x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon)$ von $x_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass es zu $\Phi : U' \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ eine implizite Funktion $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$ gibt mit $\Phi(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n_1})) = 0$. Für konstantes $\mathbf{x}'$ hat $\Phi(\mathbf{x}', \cdot)$ als Funktion von x_n in $g(\mathbf{x}')$ eine Ableitung ungleich 0 und nimmt daher als Funktion von x_n sowohl positive wie auch negative Werte an, also gibt es in jeder Umgebung sowohl Punkte in K wie auch Punkte außerhalb von K und damit ist $\mathbf{x} \in \partial K$.

Für die umgekehrte Inklusion überlegen wir uns einfach, dass $\Phi(\mathbf{x}) \neq 0$ bedeutet, dass Φ auf einer ganzen Umgebung nicht Null ist (wegen der Stetigkeit von Φ). Damit ist $x \notin \partial K$. Damit folgt aus $\mathbf{x} \in \partial K$ impliziert $\Phi(\mathbf{x}) = 0$. □

Korollar 14.4.5 (Glatter Rand als Untermannigfaltigkeit)
Der Rand eines Kompaktums mit glattem Rand ist eine $n-1$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Satz 14.4.6 (Kompakta mit glattem Rand)
Ist K ein Kompaktum mit glattem Rand, $\mathbf{x}_0 \in \partial K$, so gilt:

1. $N_{\mathbf{x}_0}(\partial K)$ *ist eindimensional.*
2. *In* $N_{\mathbf{x}_0}(\partial K)$ *gibt es genau zwei Vektoren* $\mathbf{v}, -\mathbf{v}$ *mit* $\|\mathbf{v}\|_2 = \|-\mathbf{v}\|_2 = 1$.
3. *Genau einer dieser beiden Vektoren hat die Eigenschaft: Es gibt ein* $\varepsilon > 0$, *so dass für alle* $0 < t < \varepsilon$ *gilt* $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} \notin K$.

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort aus den allgemeinen Überlegungen zum Normalenraum. Die zweite Aussage ist (fast) trivial: In jedem eindimensionalen linearen Vektorraum über $\mathbb{R}$ gibt es genau zwei Vektoren der Länge eins, einer ist das Negative vom anderen. Die dritte Aussage ist eine Konsequenz des Beweises des vorherigen Satzes. □

Definition 14.4.7 (Äußerer Normalenvektor)
Es K ein Kompaktum mit glattem Rand, $\mathbf{x}_0 \in \partial K$. Der eindeutig bestimmte Vektor $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$ aus Satz 14.4.6 heißt äußerer Normalenvektor *oder die äußere Normale zu ∂K im Punkt $\mathbf{x}_0$.*

Bemerkung 14.4.8 (Normalenfeld)
Zu einem Kompaktum K mit glattem Rand gibt es ein C^1-Vektorfeld, das jedem Punkt auf dem Rand die äußere Normale zuordnet.

Zum Ende dieses kurzen Abschnittes wollen wir noch die äußere Normale für Kompakta mit glattem Rand untersuchen, wenn wir den Rand als Graphen einer