Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Janko Latschev
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik I für Studierende der Physik: Blatt 10 zur Abgabe am 30.1.2019 (in den Übungen).

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.
Bitte nur dann abgeben, wenn Ihnen noch Punkte fehlen!

Aufgabe 1: (1+1+2 Punkte)

Sei $\mathrm{Abb}(X,\mathbb{R})$ die Menge aller Abbildungen von einer Menge X nach $\mathbb{R}$, welche einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bzgl. der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation bildet. Es bezeichne $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ den Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, der alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen enthält.
Durch welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume gegeben? Beweisen Sie, dass ein Untervektorraum vorliegt, oder widerlegen Sie dies durch Angabe eines geeigneten Gegenbeispiels.

(a) $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$,

(b) $U = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist beschränkt}\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

(c) $U = \{f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid af'' + bf' + cf = 0\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, wobei $a,b,c \in \mathbb{R}$ fest gegeben sind,

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Bilden folgende Spaltenvektoren jeweils eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

(a) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Aufgabe 3: (2 Punkte)

Geben Sie eine Basis der linearen Hülle der Familie $(v_i)_{i\in I}$ an:

$$v_1 = \begin{pmatrix}4\\4\\9\\5\\2\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-5\\-3\\2\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}5\\5\\14\\9\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5.$$

Aufgabe 4: (1+1+2 Punkte)
Es seien V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, $v_1, v_2, v_3 \in V$. Beweisen Sie oder widerlegen Sie (zum Beispiel durch ein geeignet gewähltes Gegenbeispiel) die folgenden Aussagen zur linearen Unabhängigkeit:

(a) Ist (v_1, v_2) linear unabhängig, dann ist auch $(v_1 + v_2, v_2)$ linear unabhängig.

(b) Ist $v_1 \in \operatorname{span}\{v_2, v_3\}$, dann ist $v_3 \in \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$.

(c) Es seien $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$. Dann ist (v, w) genau dann linear unabhängig, wenn $ad - bc \neq 0$ ist.

Aufgabe 5: (3 Punkte)
Sind die Funktionen

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

aufgefasst als Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Abbildungen $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, linear unabhängig?