Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Janko Latschev
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik I für Studierende der Physik: Blatt 7 zur Abgabe am 9.1.2019 (in den Übungen).

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (3+2 Punkte)

(a) Beweisen Sie die *Leibnizregel*: Sind f und g n-fach differenzierbare Funktionen, so gilt:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Hinweis: Sie dürfen die Gleichung $\binom{x-1}{k-1} + \binom{x-1}{k} = \binom{x}{k}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, benutzen.

(b) Berechnen Sie damit die 2019-te Ableitung der Funktion $(x^3 - x^2)\sinh(x)$.

Aufgabe 2: (2 Punkte)

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die differenzierbar auf (a, b) sind. Es gelte $f(a) = g(a)$ und $0 \leq f'(x) \leq g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$.
Zeigen Sie, dass dann

$$f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in [a, b]$$

gilt.

Aufgabe 3: (2+3 Punkte)

(a) Sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4})e^{2x}$.
Bestimmen Sie die lokalen Extrema (und deren Art).

(b) Untersuchen Sie die Funktion

$$f \; : \; (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) \; := \; x^{-a} \, e^x$$

für $a \in \mathbb{R}$ hinsichtlich (Art und Lage der) Extrema und hinsichtlich Monotonie und Konvexität (bestimmen Sie dabei jeweils die Intervalle für die Sie eine einheitliche Aussage treffen können).

Aufgabe 4: (1+3 Punkte)

(a) Sei $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^5 - 3x^4 + 5x^2 + 2x - 7$. Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung $T(f, 1)(x)$ von f im Punkt 1.
Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe gegen $f(x)$?

(b) Sei $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Zeigen Sie: g ist in 0 beliebig oft differenzierbar mit

$$g^{(n)}(0) = 0 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N},$$

und damit, dass die Taylorreihe von g im Punkt 0 nur in 0 gegen $g(x)$ konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst mit Hilfe von vollständiger Induktion, dass es für alle $n \in \mathbb{N}$ Polynomfunktionen $h_n(y)$ vom Grad $3n$ gibt, so dass

$$g^{(n)}(x) = h_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{für} \quad x \neq 0 \quad \text{ist.}$$

Verwenden Sie anschließend erneut vollständige Induktion, um die Behauptung zu zeigen.