Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Janko Latschev
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik I für Studierende der Physik: Blatt 6 zur Abgabe am 18.12.2018 (in den Übungen).

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (2+1 Punkte)

Betrachten Sie die stetigen Funktionen $f_n\colon [0,\, 1] \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f_n(x) = x^n$.

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $a \in [0,1]$ gegen einen reellen Grenzwert $l_a := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ konvergiert.

(b) Wir definieren nun eine Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = l_x$. Ist f wieder stetig?

Aufgabe 2: (2+2+1 Punkte)

In welchen Punkten sind folgende Funktionen differenzierbar?

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin x & x \le 0 \\ \sinh x & x > 0. \end{cases}$

(b) $f\colon [0,2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ 2 - x & x \in (1,2]. \end{cases}$

(c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \exp(x) & x \ge 0 \\ x & x < 0. \end{cases}$

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass Produkte und Verkettungen differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar sind.

Aufgabe 3: (1+1 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $\sinh' = \cosh$ und $\cosh' = \sinh$ gilt.

(b) Berechnen Sie die Ableitung von

$$\operatorname{arcosh} := (\cosh\big|_{[0,\infty)})^{-1} \quad \text{in} \quad (1,\infty)$$

(arcosh ist die Umkehrfunktion von cosh, vgl. Blatt 5).

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen

$$f_j \;:\; (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\; j \in \{1,2,3\} \;:$$

$$f_1(x) \;:=\; x^{(x^a)} \quad , \quad f_2(x) \;:=\; x^{(a^x)} \quad , \quad f_3(x) \;:=\; a^{(x^x)}\,.$$

Aufgabe 5: (1+1+1+0 Punkte)
Untersuchen Sie jeweils, ob der angegebene uneigentliche Grenzwert existiert. Falls ja, bestimmen Sie den Wert, ohne die Regel von L'Hospital zu verwenden:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x}$ für $a \in \mathbb{R}$,

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+1) - \ln(x))$,

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^m-1}$ für natürliche Zahlen $n, m \geq 1$, und

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.