Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Janko Latschev
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik I für Studierende der Physik: Blatt 5 zur Abgabe am 12.12.2018 (in den Übungen).

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (2+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des ϵ-δ-Kriteriums, dass die folgenden reellwertige Funktionen stetig sind:

(i) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ z \mapsto |z|$.

(ii) $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ z \mapsto \operatorname{Im} z$.

(b) Zeigen Sie, dass für jede Wahl von $c \in \mathbb{C}$ die Funktion

$$f_c\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f_c(z) = \frac{z}{\overline{z}} \quad \text{für} \quad z \neq 0 \quad \text{und} \quad f_c(0) = c$$

stetig in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und unstetig in $z_0 = 0$ ist.

Aufgabe 2: (2+1+1 Punkte)

In welchen Punkten sind folgende Funktionen stetig?

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^4-1}$ für $x^2 \neq 1$, $f(1) = 1$ und $f(-1) = 1$.

(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{\exp(x)-1}{x}$ für $x \neq 0$ und $g(0) = 1$.

(c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \frac{|x|}{x^4+|x|}$ für $x \neq 0$ und $h(0) = 1$.

Aufgabe 3: (2+1+1 Punkte)

(a) Gibt es stetige, injektive Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nicht streng monoton sind? (Beweisen Sie Ihre Antwort.)

(b) Folgern Sie aus dem Satz über logarithmisches Wachstum aus der Vorlesung die folgende Gleichung:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0.$$

(c) Betrachten Sie die auf dem offenen Intervall $(0, \infty)$ definierte Funktion f mit

$$f(x) = x^x.$$

Existiert eine Fortsetzung zu einer auf dem Intervall $[0, \infty)$ definierten stetigen Funktion? (Beweisen oder widerlegen Sie dies mit Hilfe von (b).)

Aufgabe 4: (1+1+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion cosh auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ eine streng monoton wachsende reelle Funktion $\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$ ist.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe des natürlichen Logarithmus ln und der Wurzelfunktion $\sqrt{}$ eine Funktion

$$S \colon \mathbb{R}_{\geq 1} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{mit} \quad S \circ \cosh = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \quad \text{und} \quad \cosh \circ S = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{\geq 1}}.$$

Damit ist dann gezeigt, dass $\cosh \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$ bijektiv ist mit Umkehrfunktion S. Die Funktion $\operatorname{arcosh} := S$ heißt **Area Kosinus hyperbolicus**.

Die folgenden Aufgaben sind als weitere Anregungen zur Beschäftigung mit dem Stoff der Vorlesung gedacht. Lösungen können abgegeben werden, gehen aber nicht in Wertungen ein und werden auch weniger ausführlich kommentiert.

Aufgabe 5: (0 Punkte)
Bestimmen Sie die genauen Werte von $\sin \frac{\pi}{n}, \cos \frac{\pi}{n}$ und $\tan \frac{\pi}{n}$ für

(a) $n = 3$,

(b) $n = 4$,

(c) $n = 6$.

Hinweis: Nutzen Sie den binomischen Lehrsatz und die Gleichung $\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^n = -1$.

Aufgabe 6: (0 Punkte)

(a) Beweisen Sie für nichtnegative reelle Zahlen $x, y \geq 0$ die Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel, d.h. die Ungleichung

$$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x+y). \tag{1}$$

Analysieren Sie Ihren Beweis, um die Fälle zu charakterisieren, in denen Gleichheit gilt.

(b) Beweisen Sie für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$e^{\frac{1}{2}(a+b)} \leq \frac{1}{2}(e^a + e^b).$$

(c) Können Sie diese Ungleichung auch geometrisch interpretieren?