Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Janko Latschev
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik I für Studierende der Physik: Blatt 4 zur Abgabe am 05.12.2018 (in den Übungen).

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (0,5+0,5 Punkte)
Es bezeichne ζ_3 die nicht-reelle Lösung der Gleichung $z^3 = 1$ mit dem kleinsten Argument zwischen 0 und 2π.
Bestimmen Sie den Imaginärteil, den Realteil, den Betrag und das Argument der folgenden komplexen Zahlen:

$$\text{(a)} \quad \left(\zeta_3 \sqrt[4]{2}\right)^{10} \qquad \text{(b)} \quad \cos(-i)$$

Aufgabe 2: (2+2+1 Punkte)

(a) Berechnen Sie jeweils das Supremum und das Infimum für die folgenden Teilmengen in $\mathbb{R}$:

$$\text{(i)} \quad M = \left\{ \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) : n \in \mathbb{Z} \right\} \qquad \text{(ii)} \quad N = \left\{ \frac{n^2 - 2n - 2}{n^2} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

(b) Berechnen Sie $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ für die Folge (a_n) gegeben durch

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{wenn } n \text{ keine Potenz einer Primzahl ist.} \\ p, & \text{wenn } n = p^k \text{ für eine Primzahl } p \text{ und ein } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(c) Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen. Zeigen Sie:

(i) Ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

(ii) Falls $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt, so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nicht konvergent. Dies ist insbesondere für $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ der Fall.

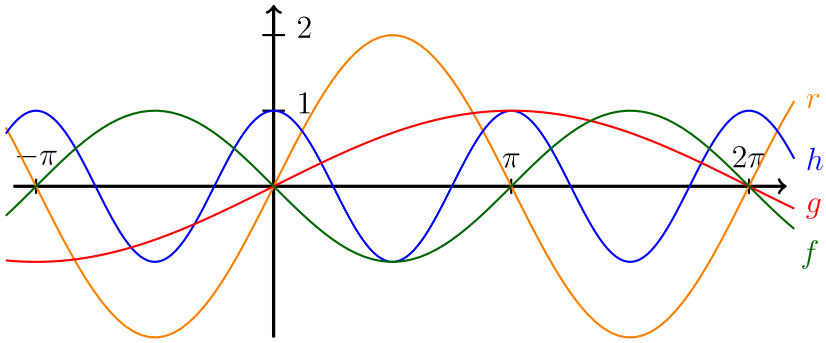
Hinweis: Nutzen Sie für (i) das Wurzelkriterium.

Aufgabe 3: (2+2 Punkte)
Seien A und B nicht-leere beschränkte Mengen nichtnegativer reeller Zahlen. Beweisen Sie:

(a) Für $C := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ gilt $\inf(C) = \inf(A) + \inf(B)$.

(b) Für $D := \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}$ gilt $\sup(D) = \sup(A) \cdot \sup(B)$.

Aufgabe 4: (2 Punkte)



Die Graphen welcher 4 der folgenden 8 Funktionen sind oben dargestellt? Welche dieser Funktionen ist jeweils f, g, h, r?

$$x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad x \mapsto 2\cos(x) \qquad x \mapsto \cos(2x) \qquad x \mapsto \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$x \mapsto \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad x \mapsto 2\sin(x) \qquad x \mapsto \sin(2x) \qquad x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Aufgabe 5: (1+1+1+1 Punkte)

Sei z eine (komplexe) Variable. Unter einer *Potenzreihe* (über $\mathbb{C}$) versteht man eine Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$. Der *Konvergenzradius* der Potenzreihe ist als die Zahl $R := \sup\left\{r \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \text{ konvergiert}\right\}$ definiert. Aus der Vorlesung kennen Sie schon den Konvergenzradius von zwei Potenzreihen: Für die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ findet man $R = 1$, für die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ findet man $R = \infty$. Zeigen Sie:

(a) Konvergiert die Potenzreihe in einem Punkt $z_0 \neq 0$, so konvergiert sie absolut in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$.

(b) Ist $|z| < R$, so konvergiert die Potenzreihe absolut, und für $|z| > R$ ist sie nicht konvergent.

Hinweis: Nutzen Sie Aufgabenteil (a).

(c) Der Konvergenzradius lässt sich durch die *Cauchy–Hadamardsche* Formel

$$R = \frac{1}{L} \quad \text{mit} \quad L := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

berechnen. In diesem Zusammenhang setzt man $\frac{1}{0} := \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$.

Hinweis: Nutzen Sie Aufgabenteil (b) und Aufgabe 2(c).

(d) Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3^n - (-3)^n) z^n$$