Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Janko Latschev
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik I für Studierende der Physik: Blatt 2 zur Abgabe am 21.11.2018 (in den Übungen).

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der Gestalt $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar:

$$\frac{2+i}{3+4i}, \quad (1+i)^6 - (i-1)^6, \quad \frac{5}{(2-i)^2}, \quad \frac{1+2i}{4-(2+i)^2}.$$

Zeichnen Sie diese in der komplexen Zahlenebene ein.

Aufgabe 2: (2 Punkte)

Sei P ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass die Nullstellen in $\mathbb{C}$ achsensymmetrisch bezüglich der Gerade $\mathrm{Im}(s) = 0$ angeordnet sind, d.h. dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow P(\bar{z}) = 0.$$

Aufgabe 3: (2+1+1 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass man auf dem Körper $\mathbb{F}_3$ (von Blatt 1) und auf dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen keine Ordnungsrelation definieren kann, die den Axiomen (O1) und (O2) aus dem Skript genügt. (Tipp: Führen Sie jeweils einen Widerspruchsbeweis.)

(b) Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^2 = 4i$.

(c) Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen von $z^3 + 2z^2 + 2z$.

Aufgabe 4: (2+1 Punkte)

Untersuchen Sie die nachfolgend gegebenen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

(a) $x_n = \dfrac{(-3)^n}{3^n - \pi}$.

(b) $x_n = \dfrac{6 - 8n^2 - 5n^3}{7n^3 + 2n^2 + n + 4}$.

Aufgabe 5: (2+1+1 Punkte)
Zeigen Sie:
(a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \geq 0$ für alle n und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.
Hinweis: Betrachten Sie die Fälle $a = 0$ und $a > 0$ getrennt.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + 2018} - n) = 0$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^4 + 3n^2} - \sqrt{n^4 - 81}) = \dfrac{3}{2}$ (diese Folge ist nur ab $n = 3$ definiert; für die Bestimmung des Grenzwerts spielt dies keine Rolle).

Hinweis: Aus der Formel $x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y)$ für $x, y \in \mathbb{R}$ folgt:

$$(*) \qquad \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \quad \text{für} \quad x, y \geq 0,\ (x, y) \neq (0, 0)\,.$$

Damit folgt auch die Monotonie der Wurzelfunktion, also

$$(**) \qquad 0 \leq y < x \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{y} < \sqrt{x}.$$

Die folgenden Aufgaben sind als weitere Anregungen zur Beschäftigung mit dem Stoff der Vorlesung gedacht. Lösungen können abgegeben werden, gehen aber nicht in Wertungen ein und werden auch weniger ausführlich kommentiert.

Aufgabe 6: (0 Punkte)
Beweisen Sie folgenden Aussagen:

(a) Ist $x \in \mathbb{Q}$ und $y \in \mathbb{R}$ irrational, dann sind $x + y$ und (falls $x \neq 0$) auch $x \cdot y$ irrational.

(b) Zwischen zwei irrationalen Zahlen $a < b$ liegt stets eine rationale Zahl

(c) Zwischen zwei rationalen Zahlen $c < d$ liegt stets eine irrationale Zahl.

Wir werden später sehen, dass es trotz dieser scheinbaren Symmetrie in gewissem Sinne “viel mehr” irrationale als rationale Zahlen gibt.

Aufgabe 7: (0 Punkte)
Bei der Konstruktion der komplexen Zahlen haben wir auf Paaren reeller Zahlen Addition und Multiplikation definiert. Man kann ganz analog auf Paaren komplexer Zahlen $\mathbb{C}^2 = \{(z, w) \mid z, w \in \mathbb{C}\}$ Operationen einführen:

$$\begin{aligned} +\colon\ & \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \\ & (z, w) + (u, v) := (z + u, w + v) \qquad \text{und} \\ \cdot\ \colon\ & \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \\ & (z, w) \cdot (u, v) := (zu - \bar{w}v, \bar{z}v + wu). \end{aligned}$$

Die Konjugation, welche bei der Multiplikation auftaucht, ist das einzige neu auftretende Phänomen. Auf diese Weise wird die Menge $\mathbb{C}^2$ *fast* zu einem Körper, es wird nur genau ein Körperaxiom verletzt. Finden Sie heraus, welches!