Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik

Winter 2016/17

Janko Latschev

Grundlagen der Mathematik

Übungsblatt 6

Präsenzaufgaben

(P9) Die Ordnung der natürlichen Zahlen I

Wir hatten in der Vorlesung die Ordnung der natürlichen Zahlen folgendermassen definiert:

$$n < m \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{N} \,: m = n + k.$$

In dieser Aufgabe sollen Sie mit Hilfe dieser Definition und der Exklusivität der Alternativen $n < m$, $n = m$ oder $n > m$ die folgende Behauptung aus der Vorlesung beweisen:

Zu keiner natürlichen Zahl n gibt es eine natürliche Zahl m mit

$$n < m < n + 1.$$

a) Formulieren Sie diese Aussage als logische Formel. Vielleicht müssen Sie den Satz zuerst sprachlich anders formulieren (natürlich ohne den Wahrheitsgehalt zu ändern).
Bemerkung: Hier könnte die Tautologie $(\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})) \iff (\mathcal{A} \implies (\neg\mathcal{B}))$ *hilfreich sein. Können Sie diese beweisen?*

b) Beweisen Sie die Aussage mit Hilfe der Definition und der aus der Vorlesung bekannten Eigenschaften der Addition.

(P10) Die Ordnung der natürlichen Zahlen II

Beweisen Sie mit Hilfe der in der Vorlesung formulierten Definitionen und Aussagen folgende Implikationen für alle natürlichen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{N}$:

a) Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.

b) Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$.

c) Aus $a < b$ folgt $ac < bc$.

d) Aus $a + c = b + c$ folgt $a = b$.

e) Aus $ac = bc$ folgt $a = b$.

Hinweis: Für Punkt **d)** *bietet sich ein Induktionsbeweis an.*

Bitte wenden!

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Mo, 28.11.16, zu Beginn der Vorlesung

(A14) Endliche Mengen und die Addition (2+2+2+2+4 Punkte)+(3 Bonus)

Kinder lernen die Addition vermutlich zunächst in einem sehr praktischen Kontext: Wenn man disjunkte endliche Mengen (Bonbons? Sammelkarten?) vereinigt, so ist die Kardinalität der Vereinigung die Summe der Kardinalitäten der einzelnen Mengen.
Definition: Zwei Mengen M_1 und M_2 heißen *disjunkt*, wenn $M_1 \cap M_2 = \varnothing$, d.h. wenn sie kein Element gemeinsam haben.
Allgemeiner sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Menge M_n gegeben. Man nennt die Mengen M_n *paarweise disjunkt*, falls

$$\forall\, i, j \in \mathbb{N} : i \neq j \implies M_i \cap M_j = \varnothing.$$

a) Beweisen Sie: Sind M_1 und M_2 zwei endliche Mengen, so gilt

$$|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2|. \tag{*}$$

Bemerkung: Insbesondere gilt also für disjunkte endliche Mengen M_1 und M_2

$$|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2|.$$

Die Kommutativität der Addition natürlicher Zahlen ist also eine Konsequenz der Kommutativität der Vereinigung von Mengen.

b) Geben Sie je ein Beispiel für eine Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen $M_n \subset \mathbb{N}$ an, die

- paarweise disjunkt sind.
- nicht paarweise disjunkt sind.

c) Beweisen Sie: Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$ beliebige Mengen, so gilt

$$(M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n) \cap M_{n+1} = (M_1 \cap M_{n+1}) \cup (M_2 \cap M_{n+1}) \cup \cdots \cup (M_n \cap M_{n+1}).$$

d) Beweisen Sie:
Satz (Additivität von Kardinalitäten): Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Menge M_n gegeben und sind die Mengen M_n paarweise disjunkt, so gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n| = |M_1| + |M_2| + \cdots + |M_n|.$$

Bemerkung: Auch die Assoziativität der Addition natürlicher Zahlen kann also als Konsequenz der Assoziativität der Vereinigung von Mengen betrachtet werden.

e) Von 23 Schülerinnen und Schülern einer Klasse spielen 11 Fußball, 6 Handball und 7 Basketball; 3 von ihnen spielen Fußball und Handball, 2 Handball und Basketball, 3 nur Basketball und 1 Schülerin betreibt alle drei Sportarten.

(i) Wieviele Schülerinnen und Schüler spielen Fußball und Basketball?
(ii) Wieviele Schülerinnen und Schüler spielen nur Fußball?

Siehe nächstes Blatt!

(iii) Wieviele Schülerinnen und Schüler spielen nur Handball?

(iv) Wieviele Schülerinnen und Schüler betreiben keine der drei Sportarten?

f) **(Bonus)** Formulieren und beweisen Sie die zu (*) analoge allgemeine Formel für die Kardinalität der Vereinigung von drei endliche Mengen M_1, M_2 und M_3.

(A15) Weitere Induktionsbeweise **(2+3+3 Punkte)**

a) Beweisen Sie für eine reelle Zahl $h \geq -1$ und jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

b) Beweisen Sie, dass die Summe der ersten n Kubikzahlen für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Quadratzahl ist.

c) Bestimmen Sie die Menge aller natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$, für die $2^n \geq 3n + 1$ gilt (natürlich mit Beweis).