Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik

Winter 2016/17

Janko Latschev

Grundlagen der Mathematik

Übungsblatt 3

Präsenzaufgaben

(P4) Wir betrachten die Menge $M := \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- $1 \in M$
- $1 \subseteq M$
- $\{1\} \in M$
- $\{1\} \subseteq M$
- $\{\{1\}\} \in M$
- $\{\{1\}\} \subseteq M$
- $\varnothing \in M$
- $\varnothing \subseteq M$
- $\{\varnothing\} \in M$
- $\{\varnothing\} \subseteq M$
- $\{\{\varnothing\}\} \in M$
- $\{\{\varnothing\}\} \subseteq M$

(P5) Welche der folgenden Aussagen gelten für alle Mengen A, B und C?

a) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

b) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

c) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B$

d) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$

Zeichnen Sie jeweils die Venn-Diagramme für beide Seiten, und geben Sie für falsche Aussagen jeweils ein konkretes Gegenbeispiel an.

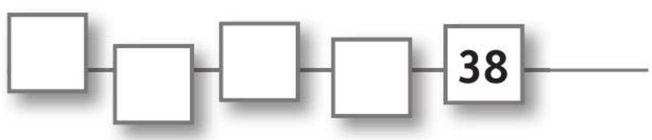
Bitte wenden!

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Mo, 7.11.16, zu Beginn der Vorlesung

(A7) Fibonacci-Folgen (2+2+2+2 Punkte)

Wir betrachten wieder eine Aufgabe, welche im Auftrag der BSB für Schülerzirkel im Grundschulalter konzipiert wurde.

Zahlenketten bestehen aus fünf aufeinander folgenden Zahlen.
Die ersten beiden Zahlen darfst du frei wählen. Die dritte Zahl ergibt sich dann als Summe der ersten und der zweiten Zahl.
Die vierte Zahl ist die Summe der zweiten und der dritten Zahl, die fünfte Zahl die Summe der dritten und der vierten Zahl.
Die fünfte Zahl wird auch Zielzahl genannt.



Aufgabe
Finde mit verschiedenen Anfangszahlen Zahlenketten zur Zielzahl 38!

Wir wollen (der Zielgruppe der Aufgabe entsprechend) annehmen, dass für die beiden ersten Zahlen nur Elemente aus $\mathbb{N}_0$ zugelassen werden. In jeder Zahlenkette ist die „Zielzahl“ durch diese ersten beiden Zahlen eindeutig bestimmt, d.h. wir haben eine Abbildung

$$f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0,$$

welche jedem Paar von Startzahlen seine Zielzahl zuordnet.

a) Finden Sie eine Formel für die Abbildung f (mit Herleitung).

b) Geben Sie die Bildmenge der Abbildung f an (mit Begründung).

c) Finden Sie die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $f^{-1}(n) \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ aus mehr als einem Element besteht (mit Begründung).[1]

d) Finden Sie alle Lösungen der eigentlichen Aufgabe, d.h. finden Sie $f^{-1}(38)$.[1]

[1] Wie in der Vorlesung erwähnt wird für das Urbild $f^{-1}(\{n\})$ einer Teilmenge, die nur aus einem Element n des Wertebereichs besteht, meist $f^{-1}(n)$ geschrieben, auch wenn dies etwas inkonsequent ist.

Siehe nächstes Blatt!

(A8) Eine Abbildung und ihre Eigenschaften (1+1+3+3 Punkte)

Wir betrachten die Mengen $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ und $N := \{1, 2, 3, 4\}$ sowie die Abbildung $f : M \to N$, die durch folgende Wertetabelle beschrieben wird:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	2	1	3	2	1	4	3	1

a) Geben Sie die Bilder der Teilmengen $A_1 = \{1, 2, 3\}$ und $A_2 = \{2, 3, 5\}$ von M unter der induzierten Abbildung[2] $\mathfrak{f} : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$ an.

b) Geben Sie die Bilder der Teilmengen $B_1 = \{1, 2\}$ und $B_2 = \{1, 3\}$ von N unter der induzierten Abbildung $f^{-1} : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(M)$ (also die Urbilder der Teilmengen B_1 und B_2 unter f) an.

c) Ist f injektiv? Ist $\mathfrak{f}$ injektiv? Ist f^{-1} injektiv?

d) Ist f surjektiv? Ist $\mathfrak{f}$ surjektiv? Ist f^{-1} surjektiv?

(A9) Abbildungen und Potenzmengen (2+2 Punkte)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. In der Vorlesung wurden die von dieser abgeleiteten Abbildungen zwischen den Potenzmengen

$$\begin{aligned} \mathfrak{f} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y), &\quad \mathfrak{f}(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \subset Y \qquad \text{und} \\ f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X), &\quad f^{-1}(B) := \{x \mid f(x) \in B\} \subset X \end{aligned}$$

erwähnt. Die folgenden vier Aussagen sind wahr:

- Für alle Teilmengen $A_1, A_2 \subseteq X$ gilt $\mathfrak{f}(A_1 \cup A_2) \subseteq \mathfrak{f}(A_1) \cup \mathfrak{f}(A_2)$.
- Für alle Teilmengen $A_1, A_2 \subseteq X$ gilt $\mathfrak{f}(A_1 \cap A_2) \subseteq \mathfrak{f}(A_1) \cap \mathfrak{f}(A_2)$.
- Für alle Teilmengen $B_1, B_2 \subseteq Y$ gilt $f^{-1}(B_1 \cup B_2) \subseteq f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
- Für alle Teilmengen $B_1, B_2 \subseteq Y$ gilt $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subseteq f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

In drei dieser vier Aussagen kann das Zeichen $\subseteq$ durch ein Gleichheitszeichen ersetzt werden, und die Aussage bleibt immer noch wahr.

a) Für welche der Aussagen gilt das nicht? Begründen Sie Ihre Behauptung mit einem selbst gewählten Gegenbeispiel.

b) Beweisen Sie für eine der anderen drei Situationen die stärkere Aussage, dass die beiden angegebenen Mengen tatsächlich gleich sind.

[2] Zur besseren Unterscheidung zwischen $f : X \to Y$ und $\mathfrak{f} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ verwenden wir auf diesem Übungsblatt ausnahmsweise verschiedene Schriftarten. Üblicherweise werden beide Abbildungen mit demselben Symbol f bezeichnet.