Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik

Winter 2016/17

Janko Latschev

Grundlagen der Mathematik

Übungsblatt 13

Präsenzaufgaben

(P24) Reelle Zahlen

Finden Sie jeweils eine unendliche Menge von

a) irrationalen Zahlen.

b) irrationalen Zahlen zwischen 0 und 1.

c) irrationalen Zahlen zwischen 100 und 1000.

(P25) Potenzen in Halbgruppen

Sei $(H, \star)$ eine Halbgruppe. Für $x \in H$ definieren wir Potenzen, indem wir $x^1 := x$ setzen und für $n \in \mathbb{N}$ die rekursive Definition $x^{n+1} := x^n \star x$ benutzen.

a) Zeigen Sie durch Induktion über b, dass für alle natürlichen Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$x^a \star x^b = x^{a+b}$$

gilt.

b) Zeigen Sie ebenfalls durch Induktion über b, dass hieraus auch für alle $a, b \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

folgt.

Bitte wenden!

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Mo, 30.1.17, zu Beginn der Vorlesung

Die mit den folgenden Übungsaufgaben erreichten Punkte können Sie benutzen, um fehlende Punkte in den Kurztest und/oder in den bisherigen Übungsserien auszugleichen.

(A34) Mengen **($\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ Punkte)**

Schreiben Sie die folgenden Mengen jeweils in beschreibender Form (d.h. in der Form $M = \{x \in X \mid A(x) \wedge / \vee B(x) \ldots\}$ für geeignete Grundmenge X und geeignete Aussagenformen $A(x)$, $B(x)$, usw):

a) die Menge der ungeraden ganzen Zahlen,

b) die Menge aller positiven rationalen Zahlen, deren Nenner größer als ihr Zähler ist,

c) die Menge aller negativen irrationalen Zahlen,

d) die Menge aller ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^2 - 3y^2 = 6$.

(A35) Induktionsbeweis **(4 Punkte)**

Beweisen Sie **eine** der folgenden Aussagen:

a) Die Summe der ersten n Quadratzahlen ist

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

b) Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist 5 ein Teiler von $2^{n+1} + 3 \cdot 7^n$.

c) Die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ sei rekursiv durch $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ und für $n \geq 3$ durch $x_n := x_{n-1} + x_{n-2}$ definiert. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $x_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst durch geschicktes Ausklammern und Abschätzen (also ohne Induktion) die Ungleichung $\left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Warum hilft das?*

(A36) Teilbarkeit I **(2+1 Punkte)**

Für $a, b \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Zahlenmenge

$$M(a,b) := \{ak + b \mid k \in \mathbb{N}_0\} = \{b, b+a, b+2a, b+3a, \ldots\}.$$

a) Beweisen Sie, dass diese Menge für $\mathrm{ggT}(a,b) > 1$ *höchstens* eine Primzahl enthält.

b) Finden Sie zwei natürliche Zahlen a und b, so dass $M(a,b)$ überhaupt keine Primzahl enthält.

Siehe nächstes Blatt!

(A37) Teilbarkeit II **(2+1 Punkte)**

a) Beweisen Sie, dass für jede Primzahl $p > 3$ der Ausdruck $p^3 - p$ durch 6 teilbar ist. *Hinweis: Schreiben Sie $p^3 - p$ zuerst als Produkt von drei aufeinanderfolgenden Zahlen.*

b) Können Sie auch eine noch größere Zahl finden, die für jede Primzahl $p > 3$ den Ausdruck $p^3 - p$ teilt?

(A38) Abbildungen I **(2+2 Punkte)**

Wir betrachten die Menge $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und definieren eine Addition

$$+ : \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

durch $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, d.h. Funktionen werden addiert, indem ihre Werte punktweise addiert werden.

a) Zeigen Sie, dass $(\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +)$ eine Gruppe bildet. Ist sie kommutativ? Beschreiben Sie das neutrale Element!

b) Wir betrachten nun die Teilmenge $W \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der streng monoton wachsenden Funktionen, d.h. der Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \,:\, x < y \implies f(x) < f(y).$$

Ist $(W, +)$ eine Halbgruppe? Eine Gruppe?

(A39) Abbildungen II **(2+1+2 Punkte)**

a) Beweisen Sie direkt (d.h. ohne Verwendung von Teil **c)**), dass die Abbildung

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{x}{1 - |x|},$$

injektiv ist.

b) Skizzieren Sie den Graphen von f.

c) Bestimmen Sie für die Funktion $g : \mathbb{R} \to (-1, 1)$, gegeben als

$$g(x) = \frac{x}{1 + |x|},$$

die Verknüpfungen $f \circ g$ und $g \circ f$. Was können Sie daraus folgern?