

GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK

Übungsblatt 12

Präsenzaufgaben

(P22) Rechnen in Körpern

In dieser Aufgabe ist $(K, +, \cdot)$ ein beliebiger Körper, d.h. wir setzen die Existenz einer Ordnung in K *nicht* voraus.

$-a$ bezeichnet das additive inverse Element zu $a \in K$, und a^{-1} bezeichnet das multiplikative inverse Element zu $a \in K$. Zeigen Sie mit Hilfe der Körperaxiome:

- a) Für alle $a, b \in K$ gilt: $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(ab)$.
- b) Für alle $a, b \in K \setminus \{0\}$ gilt: $a^{-1} + b^{-1} = (a + b) \cdot (ab)^{-1}$.

(P23) Quadratische Gleichungen in Körpern

Für einen Körper $(K, +, \cdot)$ und $b \in K$ betrachten wir nun die quadratische Gleichung

$$x^2 + b = 0. \tag{1}$$

- a) Untersuchen Sie, für welche $b \in \mathbb{Z}_5$ die Gleichung (1) eine Lösung $x_0 \in \mathbb{Z}_5$ besitzt.
- b) Untersuchen Sie, für welche $b \in \mathbb{Z}_{11}$ die Gleichung (1) eine Lösung $x_0 \in \mathbb{Z}_{11}$ besitzt.
- c) Beweisen Sie: Löst $x_0 \in K$ die Gleichung $x^2 + b = 0$, dann löst auch $-x_0 \in K$ die Gleichung $x^2 + b = 0$, und dies sind die einzigen beiden Lösungen.

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass für jede solche Lösung $x_0 \in K$ die Gleichung

$$x^2 + b = (x - x_0)(x + x_0)$$

gilt. Wie hilft das?

- d) Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Für wieviele $b \in \mathbb{Z}_p$ hat die Gleichung (1) mindestens eine Lösung?

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Mo, 23.1.17, zu Beginn der Vorlesung

(A33) Schulaktivität

(20 Punkte)

Wir haben uns seit Blatt 5 mit natürlichen Zahlen, ganzen Zahlen und Bruchzahlen befasst, sie zum Teil konstruiert und viele ihrer Eigenschaften studiert, und dabei außerdem unter anderem auch Ordnungs- und Äquivalenzrelationen kennengelernt. Auch wenn dieses Material aktuell *nicht in dieser Form* in der Schule auftritt, sollen Sie noch einmal statt Aufgaben zu lösen selbst eine Aufgabe oder eine Aktivität für die Schule entwickeln. Das genaue Thema bestimmen Sie selbst, es sollte aber einen klaren Bezug zum bisherigen Vorlesungsstoff geben.

In dieser Woche dürfen Sie wieder ausnahmsweise in Gruppen mit bis zu 4 Studierenden abgeben.

Formulieren Sie jeweils klar

- das Ziel der Aufgabe/Aktivität (Was sollen die Schülerinnen und Schüler üben oder neu lernen?)
- die Voraussetzungen (Für welche Klassenstufe ist die Aufgabe/Aktivität gedacht? Was sollten die Schülerinnen und Schüler bereits wissen/kennen, bevor sie diese Aufgabe/Aktivität bearbeiten?)
- die Aufgabenstellung für die Schülerinnen und Schüler (d.h. konzipieren Sie ein Arbeitsblatt oder eine konkrete Aufgabenstellung)
- die von Ihnen erwartete Lösung (d.h. schreiben Sie eine Musterlösung, und gehen Sie eventuell auch auf alternative Lösungsmöglichkeiten ein. Welche Hinweise und Hilfestellungen könnte man geben, ohne die Aufgabe „kaputtzumachen“?)