Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik

Winter 2016/17
Janko Latschev

Grundlagen der Mathematik

Übungsblatt 10

Präsenzaufgaben

(P18) Division mit Rest in $\mathbb{Z}$

Es gilt folgende Verallgemeinerung von Proposition 16 der Vorlesung:
Zu $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$ gibt es eindeutige Zahlen $q \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq r < b$, so dass

$$a = qb + r.$$

Bestimmen Sie den Quotienten q und den Rest r für die folgenden Paare

a) $a = -7$ und $b = 2$

b) $a = -317$ und $b = 17$.

(P19) Kann man aus jeder kommutativen Halbgruppe eine Gruppe machen?

Wir haben in der Vorlesung an den beiden Beispielen $(\mathbb{N}, \cdot)$ und $(\mathbb{N}, +)$ gesehen, wie man aus einer kommutativen Halbgruppe eine Gruppe konstruieren kann. Hier wollen wir der Frage nachgehen, ob dies immer funktioniert.

Sei also $(H, \star)$ eine kommutative Halbgruppe. Wir definieren auf $H \times H$ eine Relation durch

$$(a, b) \sim (c, d) \quad :\Longleftrightarrow \qquad a \star d = c \star b.$$

a) Welche Eigenschaften hat diese Relation? Welche Bedingung müsste noch zusätzlich erfüllt sein, damit $\sim$ immer eine Äquivalenzrelation ist?

b) Was passiert zum Beispiel konkret für $(H, \star) = (\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \cup)$ bei den drei Paaren $(A = \{1\}, B = \{2, 3\})$, $(C = \{1\}, D = \{1, 2, 3\})$ und $(E = \{2\}, F = \{2, 3\})$?

Wir wünschen Ihnen frohe Feiertage und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Bitte wenden!

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Mo, 09.01.17, zu Beginn der Vorlesung

(A27) Eine Ordnungsrelation (2+2+3 Punkte)

Sei X eine Menge, und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X.

a) Zeigen Sie, dass die Beziehung $A \subseteq B$ auf $\mathcal{P}(X)$ eine Ordnungsrelation ist.

Für die folgenden Teilaufgaben betrachten wir die konkrete Menge $X = \{1, 2, 3\}$, so dass $\mathcal{P}(X)$ aus 8 Elementen besteht.

b) Wie lang ist die längste Kette von echt verschiedenen Elementen $A_i \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ mit

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots ?$$

Geben Sie ein Beispiel einer solchen Kette.

c) Stellen Sie die Relation in einem möglichst übersichtlichen Diagramm dar, in dem jedem Element $A \in \mathcal{P}(X)$ ein Punkt zugeordnet ist, und je zwei solche Punkte A und B durch einen Pfeil verbunden werden, falls $A \subseteq B$ gilt (die Pfeile von einem Element zu sich selbst dürfen jeweils weggelassen werden).

(A28) Rechnen mit Kongruenzen (1+2+2+2+3+3 Punkte)

Wir fixieren eine natürliche Zahl $n > 1$ und betrachten auf $\mathbb{Z}$ die Äquivalenzrelation

$$x \equiv y \mod n \quad :\Longleftrightarrow \quad x \text{ und } y \text{ lassen bei Division durch } n \text{ denselben Rest } r$$

(Division mit Rest in $\mathbb{Z}$ wurde in Aufgabe **(P19)** formuliert). Zeigen Sie

a) $a \equiv b \mod n$ gilt genau dann, wenn $a - b$ durch n teilbar ist.

b) Aus $a \equiv b \mod n$ und $c \equiv d \mod n$ folgt $a + c \equiv b + d \mod n$.

c) Aus $a \equiv b \mod n$ und $c \equiv d \mod n$ folgt $ac \equiv bd \mod n$.

Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen unserer Relation $x \equiv y \mod n$ auf $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Z}_n$. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass $\mathbb{Z}_n$ aus genau n Elementen besteht, nämlich aus den Äquivalenzklassen $[1]$, $[2]$, ... bis $[n] = [0]$. Die bisherigen Teilaufgaben zeigen, dass wir auf $\mathbb{Z}_n$ sowohl eine Addition als auch eine Multiplikation sinnvoll definieren können. Mit jeder dieser Operationen wird $\mathbb{Z}_n$ jeweils zu einer kommutativen Halbgruppe mit neutralem Element.

d) Beschreiben Sie das neutrale Element in $(\mathbb{Z}_n, +)$ und zeigen Sie, dass in $(\mathbb{Z}_n, +)$ jedes Element ein inverses Element besitzt, d.h. $(\mathbb{Z}_n, +)$ bildet eine kommutative Gruppe.

e) Stellen Sie in einer Tabelle alle Produkte von Elementen aus $\mathbb{Z}_5$ dar. Welche Elemente in $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$ besitzen ein inverses Element?

f) Stellen Sie in einer Tabelle alle Produkte von Elementen aus $\mathbb{Z}_6$ dar. Welche Elemente in $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$ besitzen ein inverses Element?