Übungsstunde 1

1. Gibt es einen metrischen Raum (X, d), Punkte $x, y \in X$ und Radien $0 < r < R$, so dass $B(x, R) \subset B(y, r)$? Geben Sie ein Beispiel oder beweisen Sie die Unmöglichkeit eines solchen!

2. Ist (X, τ) ein topologischer Raum, so sieht man aus der Definition leicht, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. Die Teilmenge $U \subset X$ ist offen.
2. Für jeden Punkt $x \in U$ und jede offene Umgebung $V \subset X$ von x ist $U \cap V$ offen.
3. Jeder Punkt $x \in U$ besitzt eine offene Umgebung $V \subset X$, so dass $U \cap V$ offen ist.

Die Offenheit einer Teilmenge ist also eine lokale Eigenschaft, d.h. es genügt, sie in einer offenen Umgebung jedes ihrer Punkte zu prüfen. Gilt das auch für Abgeschlossenheit? Mit anderen Worten: Welche Implikationen gelten zwischen den folgenden Aussagen?

1. Die Teilmenge $A \subset X$ ist abgeschlossen.
2. Für jeden Punkt $x \in A$ und jede offene Umgebung $V \subset X$ von x ist $A \cap V$ abgeschlossen in V.
3. Jeder Punkt $x \in A$ besitzt eine offene Umgebung $V \subset X$, so dass $A \cap V$ abgeschlossen in V ist.

Was passiert, wenn man bei den letzten beiden Aussagen jeweils "in X" statt "in V" schreibt?

3. Sei X eine nichtleere Menge und seien β_1 und β_2 zwei Teilmengen in $\mathcal{P}(X)$, welche die Bedingungen (B1) und (B2) für eine Basis erfüllen. Die beiden Basen heißen *äquivalent*, falls für die von ihnen erzeugten Topologien $\tau_1 = \tau_2$ gilt.

a) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Äquivalenz von Basen, ohne die von ihnen erzeugten Topologien explizit zu erwähnen!

b) Geben Sie verschiedene (z. B. auch disjunkte) Basen für die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^2$ an!

4. Sei X eine Menge, (Y, τ_Y) ein topologischer Raum, und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Was ist die gröbste Topologie auf X, für die f stetig ist?

5. Beweisen Sie mit Hilfe der Topologie auf $\mathbb{N}$ aus der Vorlesung, dass es unendlich viele Primzahlen gibt!

Bitte wenden!

6. Sei X eine Menge, und $h : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung mit den Eigenschaften

(K1) $h(\varnothing) = \varnothing$.

(K2) Für alle $A \subset X$ gilt $A \subset h(A)$.

(K3) Für Teilmengen $A, B \subset X$ gilt $h(A \cup B) = h(A) \cup h(B)$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F} := \{A \subset X \mid A = h(A)\}$ die Axiome für die abgeschlossenen Teilmengen einer Topologie τ_h auf X erfüllt!

b) Wir nehmen an, dass h zusätzlich noch die Eigenschaft

(K4) Für alle $A \subset X$ gilt $h(h(A)) = h(A)$.

erfüllt. Beweisen Sie, dass dann $h(A)$ gerade die abgeschlossene Hülle von A bezüglich der Topologie τ_h ist!

c) Geben Sie ein Beispiel für eine Menge X und eine Abbildung h, welche (K1)-(K3) aber nicht (K4) erfüllt!