Universität Hamburg
Janko Latschev, Fabian Kirchner,
Giorgio Laguzzi

Winter 2013/14

Topologie

Übungsaufgaben 7

1. Zeigen Sie: Ist $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf X und sind $A, B \subset X$ Teilmengen mit $A \cup B \in \mathcal{U}$, so gilt $A \in \mathcal{U}$ oder $B \in \mathcal{U}$.

2. Es sei $f\colon X \to Y$ stetig, und $\mathcal{F}$ sei ein Filter auf Y. Bilden die Urbilder der Mengen in $\mathcal{F}$ eine Filterbasis, so heisst der zu dieser Basis gehörende Filter das *Urbild von* $\mathcal{F}$, und wird dann mit $f^{-1}(\mathcal{F})$ bezeichnet. Beweisen Sie:

a) Es sei $\mathcal{B}$ eine Filterbasis von $\mathcal{F}$ auf Y. Dann hat $\mathcal{F}$ bezüglich der Abbildung f genau dann ein Urbild, falls alle Urbilder der Mengen in $\mathcal{B}$ nicht leer sind. (Dies gilt also insbesondere, falls f surjektiv ist.)

b) Ist $\mathcal{F}$ schon Bild eines Filters $\mathcal{F}'$ auf X, dann besitzt $\mathcal{F}$ ein Urbild.

c) Ist $\mathcal{F}'$ Filter auf X, dann ist $f^{-1}(f(\mathcal{F}'))$ gröber als $\mathcal{F}'$, und es gilt $f^{-1}(f(\mathcal{F}')) = \mathcal{F}'$, falls f injektiv ist.

d) Ist $\mathcal{F}$ Filter auf Y und $f^{-1}(\mathcal{F})$ existiert, dann ist $f(f^{-1}(\mathcal{F}))$ feiner als $\mathcal{F}$, und es gilt $f(f^{-1}(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$, falls f surjektiv ist.

3. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen für einen topologischen Raum X:

a) X ist Hausdorffsch.

b) Für jeden Punkt $x \in X$ ist der Durchschnitt aller seiner abgeschlossenen Umgebungen[1] gleich $\{x\}$.

c) Jeder konvergente Filter auf X besitzt genau einen Limespunkt.

Warum ist es in Teil **b)** wichtig, abgeschlossene Umgebungen zu betrachten?

4. Beweisen Sie, dass $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz ist, falls Abbildungen $g\colon Y \to X$ und $h\colon Y \to X$ existieren, so dass $f \circ g$ und $h \circ f$ Homotopieäquivalenzen sind.

[1] Eine abgeschlossene Umgebung von $x \in X$ ist eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ mit $x \in \operatorname{Int} A$.