Universität Hamburg
Janko Latschev, Fabian Kirchner,
Giorgio Laguzzi

Winter 2013/14

Topologie

Übungsaufgaben 2

1. *(2+1+2 Punkte)* Für $n \in \mathbb{N}$ seien nichtleere metrische Räume (X_n, d_n) gegeben.

a) Zeigen Sie, dass für festes n die Funktion $d'_n(x,y) := \frac{d_n(x,y)}{1+d_n(x,y)}$ eine Metrik auf X_n definiert, welche dieselbe metrische Topologie induziert wie d_n.

b) Zeigen Sie, dass

$$d((x_n),(y_n)) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d'_n(x_n, y_n)$$

eine Metrik auf dem Produkt $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ definiert! Warum ist es wichtig, hier die Metriken d'_n zu benutzen?

c) Stimmt die von d induzierte metrische Topologie mit der Produkttopologie überein?

2. *(2+1 Punkte)* Sei X ein beschränkter metrischer Raum, d.h. $d(x,y) \leq C$ für alle $x, y \in X$ und ein $C > 0$. Außerdem nehmen wir an, dass X eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt, d.h. es existiert ein $M = \{x_1, x_2, \dots\} \subset X$ mit $\overline{M} = X$.

a) Zeigen Sie, dass X in den Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{R})$ der quadratisch-summierbaren reellen Folgen eingebettet werden kann, indem Sie die Abbildung $f(x) := (\frac{1}{2}d(x,x_1), \dots, \frac{1}{2^n}d(x,x_n), \dots)$ untersuchen!

b) Gilt die Behauptung auch, wenn X nicht als beschränkt angenommen wird?

3. *(3+1 Punkte)* Wir versehen $\mathbb{Z}$ mit der diskreten Topologie und betrachten für eine irrationale Zahl $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ die Abbildung

$$f_\alpha : \mathbb{Z} \to S^1 \subset \mathbb{C} \quad , \quad n \mapsto e^{2\pi \mathbf{i} n\alpha}.$$

a) Beschreiben Sie den Abschluß von $f_\alpha(\mathbb{Z})$ in S^1!

b) Ist f_α eine Einbettung?

4. *(2+2+3 Punkte)* Auf dem Raum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen reeller Zahlen haben wir bereits zwei Topologien kennengelernt: die *Produkttopologie* und die *Boxentopologie*. Die *uniforme Topologie* auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist die metrische Topologie, die von der Metrik

$$d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \{\min(|x_n - y_n|, 1)\}$$

erzeugt wird.

a) Vergleichen Sie die drei Topologien paarweise!

Bitte wenden!

b) In welchen dieser Topologien sind die folgenden Abbildungen stetig?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, t \mapsto (t, 2t, 3t, \dots)$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, t \mapsto (t, \frac{t}{2}, \frac{t}{3}, \dots)$$

c) Betrachten Sie die Teilmenge $\mathbb{R}^{\infty} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen, die nur endlich viele von 0 verschiedene Glieder haben. Was ist der Abschluss von $\mathbb{R}^{\infty}$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bezüglich jeder der drei Topologien?